

On algebraic independence of certain functions related to the elliptic modular function

天羽雅昭
群馬大学工学部

1 問題

$j(\tau)$ を楕円モジュラー関数とする。まず、1969 年に Mahler が証明した結果（の特別な場合）を述べよう。

定理 (Mahler [6]) α を零ではない複素数とすると、4 つの関数

$$e^{\alpha\tau}, j(\tau), j'(\tau), j''(\tau)$$

は $\mathbb{C}(\tau)$ 上代数的独立である。

本稿で扱うのは、この定理を一般化した次の問題である。

問題 $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ を零ではない複素数とし、 β_1, \dots, β_n を零ではない複素数で $|\arg \beta_{l_1} - \arg \beta_{l_2}| < \pi$ ($1 \leq l_1 < l_2 \leq n$) をみたすものとする。このとき $\alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta_1, \dots, \beta_n$ についての適当な条件の下で、 $m + 3n$ 個の関数

$$(1) \quad e^{\alpha_k \tau}, j(\beta_l \tau), j'(\beta_l \tau), j''(\beta_l \tau) \quad (k = 1, \dots, m; l = 1, \dots, n)$$

の $\mathbb{C}(\tau)$ 上での代数的独立性を証明せよ。

ここで β_l ($l = 1, \dots, n$) の偏角についての条件は、 $j(\beta_l \tau)$ たちが同じ領域で定義できるためのものである。また、この問題を解くためには次の 2 条件が必要である：

1° $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ は有理数体上 1 次独立。

2° β_{l_1}/β_{l_2} ($1 \leq l_1 < l_2 \leq n$) はどれも有理数ではない。

実際、条件 1° は $e^{\alpha_1 \tau}, \dots, e^{\alpha_m \tau}$ が $\mathbb{C}(\tau)$ 上代数的独立になるための必要十分条件であり、条件 2° は $j(\beta_{l_1} \tau)$ と $j(\beta_{l_2} \tau)$ が \mathbb{C} 上代数的独立であるための必要条件である。後者は、モジュラー多項式から従う (Lang [5], Chap. 5 を参照のこと)。さらに、これらの 2 条件が (問題を解くための) 十分条件でもあることが予想される。以下で述べるように (定理 1 の系)、 $m = 1, n = 2$ の場合には確かに予想が成り立つ (ただし、 $m = 1$ のとき 1° は無内容)。

注意 1 Mahler [6] の結果は, $j(\tau)$ に対してだけでなく, ある条件をみたす保型関数 $f(\tau)$ に対して, $e^{\alpha\tau}, f(\tau), f'(\tau), f''(\tau)$ の $\mathbb{C}(\tau)$ 上での代数的独立性を主張するものである. また, Mahler が $f(\tau)$ に課した条件は, Nishioka [8] によって緩められた.

注意 2 $j(\tau)$ の q -展開を $J(q)$ とおく. q が $0 < |q| < 1$ をみたす代数的数のとき, Barré, Diaz, Gramain, Philibert [2] が証明したように $J(q)$ は超越数であり, さらに Nesterenko [7] が証明したように $J(q), DJ(q), D^2J(q)$ は代数的独立である (ただし, $D = q \frac{d}{dq}$). Bertrand [3] は, これを一般化して次のような予想をした:

q_1, \dots, q_n が $0 < |q_\ell| < 1$ をみたす代数的数で, かつ, これらのどの 2 つも乗法独立ならば, $J(q_1), \dots, J(q_n)$ は代数的独立である.

$q_\ell = e^{2\pi i \beta_\ell}$ とおくと, q_ℓ についての条件は, β_1, \dots, β_n のどの 2 つの比も有理数ではない, と読み換えられる. よって, $J(q_\ell) = j(\beta_\ell)$ に注意すると, 上述した我々の予想 (の一部) は, Bertrand の予想の関数に対する類似物とみなすことができる.

2 結果

本稿の主結果は, 次の定理である.

定理 1 $\alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta_1, \dots, \beta_n$ を零ではない複素数で, 次の 2 つの条件のうちの少なくとも一つをみたすものとする. このとき, (1) の $m + 3n$ 個の関数は $\mathbb{C}(\tau)$ 上代数的独立である:

(i) $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ は有理数体上 1 次独立で, かつ $0 < |\arg \beta_{\ell_1} - \arg \beta_{\ell_2}| < \pi$ ($1 \leq \ell_1 < \ell_2 \leq n$) をみたす.

(ii) $m = 1$ であり, かつ β_1, \dots, β_n は有理数体上 1 次独立で同じ偏角を持つ.

系 α を零ではない複素数とし, β_1, β_2 を, 比が有理数ではない複素数で $|\arg \beta_1 - \arg \beta_2| < \pi$ をみたすものとする. このとき, 7 つの関数

$$e^{\alpha\tau}, j(\beta_1\tau), j'(\beta_1\tau), j''(\beta_1\tau), j(\beta_2\tau), j'(\beta_2\tau), j''(\beta_2\tau)$$

は $\mathbb{C}(\tau)$ 上代数的独立である.

もう一つ, $j(\tau)$ の導関数を含まない次の結果を述べておく:

定理 2 $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ を零ではない複素数とし, β_1, \dots, β_n を零ではない複素数で $|\arg \beta_{\ell_1} - \arg \beta_{\ell_2}| < \pi$ ($1 \leq \ell_1 < \ell_2 \leq n$) をみたすものとする. これら $m + n$ 個の数が有理数体上 1 次独立のとき, $m + n$ 個の関数

$$e^{2\pi i \alpha_1 \tau}, \dots, e^{2\pi i \alpha_m \tau}, j(\beta_1\tau), \dots, j(\beta_n\tau)$$

は $\mathbb{C}(\tau)$ 上代数的独立である.

定理 1 の証明は, $j(\tau)$ の保型性を使った Mahler に負う議論および Kronecker の近似定理 (Hardy-Wright [4], Theorem 442) を使った議論からなる. 定理 2 の証明は, $j(\tau)$ の q -展開を使うだけでできる. 詳しくは, [1] をご覧ください.

参考文献

- [1] M. Amou, On algebraic independence of certain functions related to the elliptic modular function, preprint.
- [2] K. Barré-Sirieix, G. Diaz, F. Gramain, G. Philibert, Une preuve de la conjecture de Mahler-Manin, *Invent. Math.* 124 (1996), 1-9.
- [3] D. Bertrand, Theta functions and transcendence, Madras Number Theory Symposium 1996, *The Ramanujan J.* 1 (1997), 339-350.
- [4] G.H. Hardy and E.M. Wright, *An Introduction to the Theory of Numbers*, 5th Edition, Oxford University Press, 1979.
- [5] S. Lang, *Elliptic functions*, 2nd Edition, Springer-Verlag, 1987.
- [6] K. Mahler, On algebraic differential equations satisfied by automorphic functions, *J. Austral. Math. Soc.* 10 (1969), 445-450.
- [7] Yu.V. Nesterenko, Modular functions and transcendence questions, *Mat. Sb.* 187 (1996), 65-96. English translation: *Sbornik Math.* 187 (1996), 1319-1348.
- [8] K. Nishioka, A conjecture of Mahler on automorphic functions, *Arch. Math.* 53(1989), 46-51.