

## コード頂点作用素代数とクリフォード代数

宮本雅彦

平成10年3月

頂点作用素代数の中でもっとも有名であり、且つ重要なのがモンスター単純群を全自己同型群としてもつムーンシャイン頂点作用素代数です。私はこの数年このムーンシャイン頂点作用素代数の別構成法を目指していて、最近完成したのですが、その構成においては、有限群的な観点から出てきたコード頂点作用素代数と呼ばれる頂点作用素代数とその表現論が中心的な役割を果たします。これは非常に美しい性質を持っており、例えば、その表現の性質から、これを含んだ頂点作用素代数を自然にメロモルフィックと呼ばれる重要な頂点作用素代数（その指標がモジュラー関数となる頂点作用素代数）に拡張できることが分かります。

この講演での最初の話は頂点作用素代数の重要な例であるコード頂点作用素代数の通常の代数的な構成の仕方や性質について述べたいと思います。

2つ目の話しは、頂点作用素代数の自己同型群を構成する話しです。一般に自己同型群を構成しようとするときは、当然の様に自己同型を構成しなければなりません。ところが、これからの話しは、コード頂点作用素代数の美しい性質を使って、個々の自己同型がどうなっているのか不明ですが、自己同型群自身が定義できるという話です。実際は、自己同型群というよりは、その自己同型群の群環（ホップ代数）の作用が定義出来るということです。

何度も言っていますが、頂点作用素代数は数理物理的には2次元共形場理論であり、代数的には無限個の積をもつ代数です。ですから内部に色々な代数が入っており、それぞれ重要な働きをしています。例えば、リー代数は当然ですが、最近論文をほとんど見る事がなくなったジョルダン代数も頂点作用素代数のグライス代数の一つの形と考えることが出来ます。まるで、消滅しそうな代数の救済をしているみたいですが、今日でてる代数は消滅しそうな代数というわけではありません。今日の話は、前半がクリフォード代数、後半はホップ代数に関係しています。ただし、アイジング模型の構成に関する前半の話は、本質的には知られていたこと（[FRW]の論文など）僕の結果ではありません。クリフォード環は鈴木先生の群論の本にも出ていますように、群論や代数的組み合わせ論にとって基本的なものです。

1. クリフォード代数の説明から始めましょう。 $U$  を (非退化) な 2 次形式をもつ  $n$  次元ベクトル空間。ここでは簡単のため複素数体上で考えます。そうすると正規直交基底が存在します。

$$T(U) = \mathbb{C} \oplus U \oplus (U \otimes U) \oplus (U \otimes U \otimes U) \oplus \dots$$

で  $U$  のテンソル積代数を表し、

$$\{u \otimes v + v \otimes u - 2\langle u, v \rangle 1 : u, v \in U\}$$

で生成される両側イデアルを  $I$  とし、それによる剰余環  $T(U)/I$  をクリフォード代数とよび、 $C(U)$  で表します。クリフォード代数は次元が偶数と奇数で性質が大きく異なり、次元が偶数の場合には

$$\{v_{-k}, \dots, v_{-1}, v_1, \dots, v_k\}$$

で  $\langle v_i, v_j \rangle = \delta_{i+j,0}$  となるもの、奇数次元の時には

$$\{v_{-k}, \dots, v_{-1}, v_0, v_1, \dots, v_k\}$$

で  $\langle v_i, v_j \rangle = \delta_{i+j,0}$  となる基底がそれぞれとれます。それで、それぞれクリフォード代数は

$$C(\mathbb{C}^n) \cong \begin{cases} M(2^{n/2}, \mathbb{C}) & \text{偶数次元 } n \\ M(2^{(n-1)/2}, \mathbb{C}) \oplus M(2^{(n-1)/2}) & \text{奇数次元 } n \end{cases}$$

となります。ここで注意してほしいのは上の既約表現は唯一であり、下は既約表現を 2 つ持っていることです。

では実際に  $C(U)$  の表現  $W$  を考えてみましょう。明らかに  $C(U)$  は  $\{v_i : i \in J\}$  で生成されていますので、一元  $a \in W$  を固定しておく、 $v_{i_1} \cdots v_{i_s} a$  という元の線形和でかけることが分かります。この時、

$$v_i v_j = -v_j v_i + 2\langle v_i, v_j \rangle 1$$

を使って  $i_1 \leq \dots \leq i_s$  と考えて良いことが分かります。また、

$$v_i v_i + v_i v_i = 2v_i v_i = 2\langle v_i, v_i \rangle 1$$

より、同じ元は 2 度でてこないことが分かります。即ち、 $W$  の元は  $i_1 < i_2 < \dots < i_s$  となるような元  $v_{i_1} \cdots v_{i_s} a$  の線形和となっています。

また、 $T(U)$  は明らかに  $\mathbb{Z}$ -次数をもっていますが、 $v \otimes u + u \otimes v - 2\langle u, v \rangle 1$  は次数を保ちませんが、偶数次数の線形和なので、 $C(U)$  は  $\mathbb{Z}_2$ -次数

$$C(U) = C^+(U) \oplus C^-(U)$$

をもっています。

今日の話しには直接関係ありませんが、

$$S_{0,i} = -S_{i,0} = v_i, \quad S_{i,j} = [v_i, v_j] = v_i v_j - v_j v_i$$

とおくと、 $\langle S_{i,j} : i, j \rangle$  はリー代数として閉じており、直交リー代数  $so(n+1)$  と同型です。即ち、内部に重要なリー代数を含んでいることが分かります。

ここまでが有限次元での話です。では、無限次元、無限個の積などの無限尽くしである頂点作用素代数に話を移しましょう。こう言った瞬間に多くの人が嫌ってしまうのですが、個数が無限となる以外は何も変わりません。

形式的に無限個  $\xi_i : i \in \mathbb{Z}$ , (又は  $i \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}$ ) を考えます。関係式は

$$\xi_i \xi_j + \xi_j \xi_i = 2\delta_{i+j,-1}$$

として定義します。

特に、 $\xi_{-\frac{1}{2}} \xi_{-\frac{1}{2}} = 1$  ですので、表現があれば、 $\xi_{-\frac{1}{2}}$  は位数 2 の作用となります。 $\xi_i$   $i \in \mathbb{Z}$  の場合を考えると  $(\xi_i, \xi_{-i-1})$  の対となるので有限次元の場合の偶数次元のクリフォード代数と同様の性質を持ちます。一方  $\xi_i$   $i \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}$  の場合には  $\xi_{-\frac{1}{2}}$  を中心に左右に分解するので奇数次元のクリフォード代数と同じになることがわかります。

このクリフォード代数の表現を考える訳ですが、無限個なので、後で導入する無限和の作用を可能にするために、 $a$  を固定し、半分の  $i > -\frac{1}{2}$  に対しては  $\xi_i a = 0$  と仮定し、 $i = -\frac{1}{2}$  に対しては  $\xi_{-\frac{1}{2}} a = a$  と定義します。さらに、次数を  $\deg \xi_{-\frac{1}{2}-i} = i$  とします。今の段階では  $a$  の次数は自由なのですが、後々うまく行くために  $i \in \mathbb{Z}$  の場合には、 $\deg a = 0$ 、 $i \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}$  の場合には  $\deg a = \frac{1}{16}$  とします。

では  $a$  から生成される加群を  $i \in \mathbb{Z}$  の場合と  $i \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}$  の場合をそれぞれ、 $W(0)$  と  $W(\frac{1}{16})$  で表し、それらの構造を少し見てみましょう。 $W(p)$  の元は有限次元の時と同じように  $\xi_{i_1} \cdots \xi_{i_s} a$  という元の線形和で書け、 $i_1 < \cdots < i_s$  とでき、 $\xi_n a = 0$  ( $n > -\frac{1}{2}$ ) と  $\xi_{-\frac{1}{2}} a = pa$  より、 $i_s < -\frac{1}{2}$  となります。それゆえ、 $i \in \mathbb{Z}$  の場合には  $W(0)$  を次数分解  $W(0) = \bigoplus_{i=0}^{\infty} W(0)_{i/2}$  とすると、次数空間の母関数  $\sum \dim W(0)_i z^i$  は

$$\prod_{n \in \mathbb{N} - \frac{1}{2}} (1 + z^n)$$

となることがわかります。 $i \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$  の場合には次数分解  $W(\frac{1}{16}) = \bigoplus_{i=0}^{\infty} W(\frac{1}{16})_{i+\frac{1}{16}}$  の母関数は

$$z^{1/16} \prod_{n \in \mathbb{N}} (1 + z^n)$$

となることがわかります。

$i \in \mathbb{Z}$  の場合には、 $\xi_{-\frac{1}{2}}$  がないので、 $\xi_i$  が偶数個の積で書けているような元から張られる空間は  $W(0)$  の部分空間となっており、この部分空間の次数空間への直和での母関数

数は

$$\frac{1}{2} \left( \prod_{i \in \mathbb{N} + \frac{1}{2}} (1 + z^n) + \prod_{i \in \mathbb{N} + \frac{1}{2}} (1 - z^n) \right)$$

となることがわかります。

$i \in \mathbb{Z}$  の場合の  $\xi_i$  が偶数個の空間を  $L(\frac{1}{2}, 0)$  で表し、 $i \in \mathbb{Z}$  の場合の  $\xi_i$  が奇数個の空間を  $L(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  で表します。 $i \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$  の場合の空間を  $L(\frac{1}{2}, \frac{1}{16})$  で表すことにします。

$i \in \mathbb{Z}$  の場合の  $a$  を 1 と書き、真空 (Vacuum) と呼び、 $\xi_{-1}1$  を  $\xi$  で表し、 $\frac{1}{4}\xi_{-2}\xi_{-1}1$  を  $\omega$  と書き、ヴィラソロ元と呼びます。

ここから、前半の話は  $\xi_i$   $i \in \mathbb{Z}$  で生成された空間  $M = L(\frac{1}{2}, 0) \oplus L(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  を中心に考え、 $L = L(\frac{1}{2}, \frac{1}{16})$  をその加群の様に考えます。

$\xi_i$  ( $i \in \mathbb{Z}$ ) をすべて一つの式で表すために、

$$Y(\xi, z) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \xi_i z^{-i-1}$$

と書いてこれを  $\xi$  の頂点作用素と呼ぶことにします。ここで、 $\xi_i \in \text{End}(M)$  であると考えます。また、

$$Y^L(\xi, z) = \sum_{i \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}} \xi_i z^{-i-1}$$

とにおいて、これを加群  $L$  への頂点作用素と呼びます。ここでも  $i \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}$  に対しては  $\xi_i \in \text{End}(L)$  であると考えます。

せつかく、無限和の形の形式的ベキ級数が出てきたので、ちょっと形式的ベキ級数の計算を試みましょう。 $z, x$  を独立の変数と考え、

$$\begin{aligned} & Y(\xi, z)Y(\xi, x) + Y(\xi, x)Y(\xi, z) \\ &= (\sum \xi_i z^{-i-1})(\sum \xi_j x^{-j-1}) + (\sum \xi_j x^{-j-1})(\sum \xi_i z^{-i-1}) = \sum_{i,j} (\xi_i \xi_j + \xi_j \xi_i) z^{-i-1} x^{-j-1} \\ &= \sum_{i,j} \delta_{i+j+1} z^{-i-1} x^{-j-1} = \sum_i z^{-i-1} x^i \\ &= z^{-1} \sum_{i \in \mathbb{Z}} (x/z)^i = z^{-1} \delta(x/z) \end{aligned}$$

となります。ここで、 $\delta(w)$  はデルタ関数  $\sum_{i \in \mathbb{Z}} w^i$  を表します。 $(1-w)\delta(w) = 0$  なので、超局所可換性と呼ばれる性質

$$(z-x)\{Y(\xi, z)Y(\xi, x) + Y(\xi, x)Y(\xi, z)\} = 0$$

が成り立っていることがわかります。

これをやると難しいと感じる人が多いと思いますが、 $L(\frac{1}{2}, 0) \oplus L(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  の元に対する頂点作用素は  $Y(\xi, z)$  (または  $Y^L(\xi, z)$ ) を

$$Y^+(\xi, z) = \sum_{i < 0} \xi_i z^{-i-1}, \quad Y^-(\xi, z) = \sum_{i \geq 0} \xi_i z^{-i-1}$$

と  $z$  のべきが非負の部分と負べきの部分に分解し、 $u = \xi_{i_1} \dots \xi_{i_l} 1$  の形の元の頂点作用素  $Y(u, z)$  (または  $Y^L(u, z)$ ) を帰納的に

$$\begin{aligned} Y(1, z) &= 1, \\ Y(\xi_{-1-s} v, z) &= \left(\frac{1}{s!} (d/dz)^s Y^+(\xi, z)\right) Y(v, z) \\ &\quad - Y(v, z) \left(\frac{1}{s!} (d/dz)^s Y^-(\xi, z)\right) \end{aligned}$$

と定義し、さらに全空間に線形に拡張すると、すべての元に対する頂点作用素が定義できます。

これでアイジング模型と呼ばれるある種の共形場理論の説明が終わったわけです。

コード頂点作用素代数はこのアイジング模型を組み合わせて (テンソル積を作って) 構成するものですが、これも直接クリフォード代数から構成できることを紹介しましょう。では、次数をすこし変えてみましょう。

$$\xi_{i,j} : i \in \mathbb{Z} \left( \text{or } \mathbb{Z} + \frac{1}{2} \right), j = 1, \dots, n$$

と順番を並び替え、交換関係式を

$$\xi_{i,t} \xi_{j,k} + \xi_{j,k} \xi_{i,t} = 2\delta_{i,k} \delta_{i+j+1,0}$$

とします。ここで次数は第2成分を無視して、 $\deg \xi_{i,t} = -i - \frac{1}{2}$  で考えます。 $t$  を固定すると  $\xi_{i,t}$  は先ほどのアイジング模型と同じなので、アイジング模型の  $n$  個の直交直和を考えているわけです。ですから、真空  $1$  に対する作用も第2成分を無視して、 $i > -\frac{1}{2}$  なら  $\xi_{i,t} 1 = 0$  と定義します。この時、真空  $1$  から  $\xi_{i,j}$   $i \in \mathbb{Z}$ ,  $j = 1, \dots, n$  で生成される空間を  $M_{\mathbb{Z}_2^n}$  で表します。

ここで  $L(\frac{1}{2}, \frac{1}{16})^{\otimes n}$  への作用と考えてみましょう。この時、次数と保つ作用は  $\xi_{-\frac{1}{2},t}$  ( $t = 1, \dots, n$ ) ですが、

$$\begin{aligned} \xi_{-\frac{1}{2},t} \xi_{-\frac{1}{2},t} &= 1 \\ \xi_{-\frac{1}{2},t} \xi_{-\frac{1}{2},s} &= -\xi_{-\frac{1}{2},s} \xi_{-\frac{1}{2},t} \end{aligned}$$

なので、 $\langle \xi_{-\frac{1}{2},s}, \xi_{-\frac{1}{2},t} \rangle$  は dihedral group ですし、 $\langle \xi_{-\frac{1}{2},t} : t = 1, \dots, n \rangle$  は extra-special 2-group となるので、 $L(\frac{1}{2}, \frac{1}{16}) \otimes \dots \otimes L(\frac{1}{2}, \frac{1}{16})$  の各次数空間への作用は extra-special 2-group の表現となっています。良く知られたように、extra-special の既約な複素表現は極大正規部分群の一次表現を誘導したものであることを注意しておきます。

一般の交換関係式 (簡単の為 index を一つで書いて)  $\xi_i \xi_j = -\xi_j \xi_i + c$  ( $c \in \mathbb{C}$ ) から、 $(\xi_i \xi_j) \xi_k = \xi_i (-\xi_k \xi_j) = \xi_k (\xi_i \xi_j)$  が出てきますので、偶数個の積は他の元とは可換となります。先ほどのアイジング模型の時と同じように、 $\xi_{i,j}$  の偶数個の積となっているもので張られた空間は部分空間となり、これを  $M_F$  で表します。ここで  $F$  は偶数ウエイトを持つバイナリーワード全体の集合を表します。頂点作用素代数は局所可換が本質な条件なので、こ

れが実際、アイジング模型の時の  $L(\frac{1}{2}, 0)$  と同じように、 $\xi_{-1,t}1 = \xi^t$  と書き、 $Y(\xi^t, z)$  を  $\sum \xi_{i,t} z^{-i-1}$  と置くことで、頂点作用素が全空間に対して定義できます。ヴィラソロ元  $\omega$  は各アイジング模型のヴィラソロ元の和  $\omega^1 + \dots + \omega^n$  であり、これによって  $M_F$  は頂点作用素代数、 $M_{\mathbb{Z}_n^2}$  は頂点作用素超代数となることが分かります。

この頂点作用素の定義の一部  $t_1, \dots, t_k$  に対して、 $Y(\xi^{t_j}, z) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \xi_{i,t_j} z^{-i-1}$  ではなく、 $Y^L(\xi^{t_j}, z) = \sum_{i \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}} \xi_{i,t_j} z^{-i-1}$  と置くと、加群への頂点作用素が定義できます。

ワード  $\alpha = (a_1, \dots, a_n)$  に対して、元  $\xi_{i_1, t_1} \dots \xi_{i_n, t_n} 1$  で、 $t_i = t$  となる  $t_i$  の数が  $a_t = 1$  なら奇数個、 $a_t = 0$  なら偶数個である様なもので張られる空間を  $M_\alpha$  とし、偶線形コード  $D \subseteq F$  に対して、 $M_D = \bigoplus_{\alpha \in D} M_\alpha$  と置くと、頂点作用素に関して、 $M_D$  は閉じていることが分かり、 $M_D$  が頂点作用素代数となることが分かります。これがコード頂点作用素代数です。

後半の話に移りましょう。

後半では上のコード頂点作用素代数の表現 (extra-special 2-group の部分群の表現) とホップ代数を使って面白い結果を紹介します。通常代数構造をもつものがあると、自己同型の定義ができます。この時、自己同型群は自己同型の集合であり、自己同型が中心です。これからの話は、自己同型を定義することなく、自己同型群を構成しようという話です。

一応 ホップ代数 (量子群) の定義を簡単に説明します。例は群環  $KG$  です。  $A$  は結合代数であり、さらに、coproduct と呼ばれる

$$\Delta : A \rightarrow A \otimes A, \quad \Delta(a) = \sum_{i=1}^r a_i \otimes a^i$$

antipode と呼ばれる

$$\gamma : A \rightarrow A$$

co-unit

$$\epsilon : A \rightarrow K$$

が幾つかの条件を満たしているものです。

(群環の場合には  $\Delta(g) = g \otimes g$ ,  $\gamma(g) = g^{-1}$ ,  $\epsilon(g) = 1$ )

$\Delta(a) = \sum a_i \otimes a^i = \sum a^i \otimes a_i$  となるようなものを余可換ホップ代数と呼びます。群環は余可換ホップ代数です。頂点作用素代数のみを考える場合には (頂点作用素代数はある意味で可換代数なので) 余可換ホップ代数しか考えません。

**定義 1**  $V$  を演算  $\times$  をもつ代数とします。ホップ代数  $A$  が  $V$  の *Endomorphism algebra* であるとは  $a \in A$  に対して、 $\Delta(a) = \sum a_i \otimes a^i$  とすると、

$$a(v \times u) = \sum (a_i v \times a^i u)$$

を満たすものとし、 $V$  を頂点作用素代数のように無限個の積がある場合にはすべての積に対して成り立つものとし、さらに、真空とかヴィラソロ元などの特別な元に対しては  $a(1) = \epsilon(a)1$ ,  $a(w) = \epsilon(a)w$  などが成り立つとします。

**定義 2**  $V$  を頂点作用素代数とし、 $G$  を余可換ホップ代数とし、 $G$  は  $V$  の *Endomorphism algebra* とする。この時、 $\{v \in V | a(v) = \epsilon(a)v \quad \forall a \in G\}$  を固定空間と呼び、 $V^G$  で表す。

昨年秋に、花木、丹原、宮本で Dong, Masaoon が出していた量子ガロア理論という予想を証明しました。即ち、 $V$  を頂点作用素代数とし、 $G$  を  $V$  の自己同型群とすると、固定空間  $V^G$  を含む部分頂点作用素代数と  $G$  の部分群との間に 1 対 1 の対応がある。

当然、ホップ代数の場合にもこのガロア対応があるのでしょうか？

**予想 1**  $V$  を頂点作用素代数とし、 $G$  を余可換ホップ代数とし、 $G$  は  $V$  の *Endomorphism algebra* とする。この時、 $V^G$  を含む部分頂点作用素代数と  $G$  の部分ホップ代数との間に 1 対 1 対応がある。

では、これから、コード頂点作用素代数を含む頂点作用素代数の *Endomorphism algebra* を構成してみましょう。

$V$  をある頂点作用素代数で、その中に  $M_D$  を含んでおり、さらに  $M_D$  は  $V$  のヴィラソロ元を含んでいると仮定します。ムーンシャイン頂点作用素代数を例として考えてよいのですが、正定値不変内積をもつものを考えます。

そうすると、特に  $M_D$  の部分代数  $T = L(\frac{1}{2}, 0) \otimes \dots \otimes L(\frac{1}{2}, 0)$  が含まれているのですが、この  $T$  の表現は非常に簡単で、すべての加群は完全可約であり、既約加群はかならず  $L(\frac{1}{2}, h^1) \otimes \dots \otimes L(\frac{1}{2}, h^n)$   $h^i = 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{16}$  と同型となることが分かっています。 $V$  は  $T$ -加群と見ることが出来るので、このような既約加群と直和となるわけですが、その重複度は先ほどの extra-special 2-group の表現からすべて決定できます。例えば、すべての  $h^i$  が 0 か  $\frac{1}{2}$  なら 重複度は 高々 1 であることが分かります。

$h^i$  の中に  $\frac{1}{16}$  が出てくる場合も扱うために、 $h = (h^1, \dots, h^n)$  に対して、バイナリーワード  $\tau(h) = (\tau(h)^1, \dots, \tau(h)^n)$  を  $h^i = \frac{1}{16}$  なら  $\tau(h)^i = 1$  とし、 $h^i = 0, \frac{1}{2}$  なら  $\tau(h)^i = 0$  として定義します。例えば、 $\frac{1}{16}$  が出てこない場合には、 $\tau(h) = (0, \dots, 0)$  です。これによって、 $V$  の中に出てくるこのようなバイナリーワード全体の集合  $S$  はアイジング模型のフージョン規則の性質より、線形コード（和で閉じている）となることが分かります。しかも  $V$  の次数は整数しかないので、 $h^1 + \dots + h^n$  は整数であり、 $L(\frac{1}{2}, \frac{1}{16})$  の数 ( $\tau(h)$  のウエイト) は 8 の倍数となることがわかります。

$\alpha = (a_i) \in S$  にたいして、 $D_\alpha = \{(b_i) \in D | b_i = 1 \text{ なら } a_i = 1\}$  と置くと、extra-special 2-group  $\hat{D}_\alpha$  の極大正規部分群は  $D_\alpha$  の中の極大自己直交部分コードから生成されたものなので、簡単に決定でき、例えばムーンシャイン加群の場合には重複度は誘導加群の次数は  $|\alpha| = 8k$  とすると、

$$|D_\alpha|/2^{4k}$$

であることが分かります。

そうすると、アイジング模型のフージョン規則  $L(\frac{1}{2}, 0) \times L(\frac{1}{2}, \frac{1}{16}) = L(\frac{1}{2}, \frac{1}{16})$  から、 $\alpha \in S$  の各元にたいするホモジニアス空間  $W$  の  $L(\frac{1}{2}, 0) \otimes \dots \otimes L(\frac{1}{2}, 0)$  の作用と可換な線型変換全体は  $End(W) = Mat(|D_\alpha|/2^{4k}, \mathbb{C})$  となります。この時、クリフォード代数 (アイジング模型) の性質から

$$\Delta : End(W) \rightarrow \sum End(W^i) \otimes End(W^j)$$

が定義できることがわかります。即ち、co-product が定義できるのです。同様に、ムーニャイン頂点作用素代数は不変内積があるので、これにより antipode が定義できます。ヴィラソロ元や真空を含む  $L(\frac{1}{2}, 0) \otimes \dots \otimes L(\frac{1}{2}, 0)$  の線型変換が  $\mathbb{C}$  と同型なので、真空を使って co-unit も定義できます。

これらがちゃんと ホップ代数 の性質をみたすのです。

**命題 1** 上で定義された  $\oplus_W End(W)$  は ホップ代数 となる。

このような形の ホップ代数 は分類されており、群環しかありません。ですから、

$$\Delta(g) = g \otimes g, \quad \gamma(g) = g^{-1}$$

となる元を集めるとそれが  $V$  の自己同型群となっているわけです。これで実際構成される自己同型群は各  $L(\frac{1}{2}, 0)$  の conformal vector  $e^i$  から定義される自己同型  $\tau_i$  が生成する基本アーベル 2 群  $P = \langle \tau_i : i = 1, \dots, n \rangle$  の中心化群となります。また、群環の構造から、位数が決定できる 2 群であることが分かります。

即ち、

**命題 2**  $V$  を上の様な頂点作用素代数とする。この時、 $C_{AutV}(P)$  は有限位数の 2 群である。

## 参考文献

- [FLM] I.B. Frenkel, J. Lepowsky, and A. Meurman, "Vertex Operator Algebras and the Monster", Academic Press, New York, 1988.
- [FRW] A.J. Feingold, J.F.X. Rieck and M. Weiner, Spinor construction of vertex operator algebras, triality and  $E_8^{(1)}$ , *Contemporary Math.* **121**, 1991.
- [M1] M. Miyamoto, Binary codes and vertex operator (super)algebras, *J. algebra* **181**, (1996) 207-222
- [M2] M. Miyamoto, Representation theory of code vertex operator algebra, *Journal of Algebra* **201**, (1998) 115-150.