数理解析研究所講究録
1063巻 1998年 144-153

Potts type 又は Cyclic type の行列から作られる Four-weight spin model について

坂内 悦子 (Etsuko Bannai)
澤野 光弘 (Mitsuhiro Sawano)

Spin model とは knot や link の invariant を定義するもので V.F.R. Jones によって示されたものです。この Jones によって定義された Spin model は二つの対称行列を用いて表されます。その後, Spin model は川越-宗政-綿谷によって非対称行列を用いたものに拡張され, 更に坂内-坂内によって4つの行列を用いた 4-weight Spin model に拡張されました。

この Spin model を分類する上での一つの指標として後程紹介する F. Jaeger の gauge 同値というものがあります。今回の話はある条件をつけた 4-weight Spin model を gauge 同値を用いて分類しようというものです。まずは必要となる定義や定理を紹介します。

Definition 4-weight Spin model (坂内-坂内)

Four weight spin model on a finite non-empty set X is a 5-tuple (W_1, W_2, W_3, W_4, D), where $D^2 = |X|$

and W_1, W_2, W_3, W_4 are in $M_C(X)$ satisfy the following equations for all $a, b, c \in X$,

1) $\sum_{x \in X} W_1(a, x) W_3(x, b) = \sum_{x \in X} W_2(a, x) W_4(x, b) = |X| \delta_{a,b}$

2) $W_1(a, b) W_3(b, a) = W_2(a, b) W_2(b, a) = 1$

3)-a $\sum_{x \in X} W_2(a, x) W_2(b, x) W_4(x, c) = D W_1(b, a) W_3(a, c) W_3(c, b)$

3)-b $\sum_{x \in X} W_2(x, a) W_2(x, b) W_4(c, x) = D W_1(a, b) W_3(b, c) W_3(c, a)$

3)の式は star-triangle relation と呼ばれます。この 3)式より，次の式を満たすような 0 でない複素数 μ が導かれます。

4) $W_3(a, a) = \mu^{-1}$ $\sum_{x \in X} W_2(a, x) = \sum_{x \in X} W_2(x, a) = D\mu^{-1}$

5) $W_1(a, a) = \mu^{-1}$ $\sum_{x \in X} W_4(a, x) = \sum_{x \in X} W_4(x, a) = D\mu$

この μ を spin model の modulus と呼びます。

Definition

Let $|X| = n$. A matrix W in $M_C(n)$ with non-zero entries is called a type II matrix if W satisfies the following condition for $x, y \in X$

$$\sum_{z \in X} \frac{W(x, z)}{W(y, z)} = n\,\delta_{x,y}$$

上の定義は 4-weight spin model の定義の 1)式に相当するも

ので，Wをtype II matrixと呼びます。またWがtype II matrixであれば，任意のPermutation matrix P, P'，正則な対角行列Δ, Δ'に対して$P\Delta W\Delta' P'$もtype II matrixとなることは容易にわかります。そこで二つのtype II matrix WとW'がある時，次の様な同値を定義します。

$$W \sim W' \iff {}^{\exists} P, P', \Delta\ \Delta' \text{ s.t. } W' = P\Delta W\Delta' P'$$

この時，この定義は同値関係を満たしています。type II matrixの例として，今回扱う2種類のtype II matrixを紹介します。

Examples 1. (Type II matrixes)

(i) $W \in M_C(X)$ defined by

$$W(x,y) = \begin{cases} \alpha & (x=y) \\ 1 & (x \neq y) \end{cases}, \text{ where } \alpha + \alpha^{-1} + (n-2) = 0$$

(ii) $W \in M_C(X)$ defined by

$$W(x,y) = \eta^{(x-y)^2}, \text{ where } \eta^2 \text{ is a primitive } n\text{-th root of unity.}$$

注) (i)において$\alpha+\alpha^{-1}+(n-2)=0$の二解による二つの行列は，$n<5$をのぞいてtype II同値とはならない。(ii)においては原始n乗根のとり方によらずtype II同値である。

次に知られている4-weight spin modelの例として今回扱う

二つのSpin modelを紹介します。

Examples 2. (4-weight spin models of size $|X|=n$)

(i) Cyclic model

$$W_1(x,y)=\eta^{(x-y)^2}, \quad W_2=\frac{D}{\sum_{x\in X}\eta^{x^2}}W_1,$$

, where η^2 is the primitive n-th root of unity.

(ii) Potts model

$$W_1(x,y)=\begin{cases}\alpha & (x=y)\\ 1 & (x\neq y)\end{cases}, \quad W_2=\frac{D}{\alpha-1}W_1$$

, where $\alpha+\alpha^{-1}+(n-2)=0$

Example 1で与えた二つのtype II matrixはそれ自身4-weight spin modelとなることがわかります。ここで今後，Example (i)の行列をPotts type (ii)の行列をCyclic typeと呼ぶことにします。次に紹介するのはgauge変換と呼ばれるものでF. Jaegerによって示されました。

Theorem (Odd gauge transformation)

Let (W_1, W_2, W_3, W_4, D) be a 4-weight spin model.

Then $(W_1', W_2, W_3', W_4, D)$ is a four-weight spin model if and only if there exists a invertible diagonal matrix Δ in $M_c(X)$ satisfying $W_1'=\Delta W_1\Delta^{-1}$, $W_3'=\Delta W_3\Delta^{-1}$.

Moreover if $(W_1', W_2, W_3', W_4, D)$ a four-weight spin model then the associated link invariant is the same as the one associated to (W_1, W_2, W_3, W_4, D).

Theorem (Even gauge transformation)
Let (W_1, W_2, W_3, W_4, D) be a four-weight spin model.
Then $(W_1, W_2', W_3, W_4', D)$ is a four-weight spin model if and only if there exists a permutation matrix $P \in M_c(X)$ satisfying the following conditions.

i) $W_2^{-1} P W_2$ is also a permutation matrix.

ii) $W_2' = PW_2$, $W_4' = W_4 {}^tP$.

Moreover if $(W_1, W_2', W_3, W_4', D)$ is a four-weight spin model then the associated link invariant is the same as the one associated to (W_1, W_2, W_3, W_4, D).

上の二つの定理より容易に次の定理を得ることが出来る。

Theorem (Jaeger)
Let (W_1, W_2, W_3, W_4, D) be a four-weight spin model.
Let P be a permutation matrix in $M_c(X)$ such that $W_2^{-1} P W_2$ is also a permutation matrix, Δ be an invertible diagonal matrix in $M_c(X)$ and λ be a non-zero

complex number. Then $(\lambda\Delta W_1\Delta^{-1}, \lambda^{-1}PW_2, \lambda^{-1}\Delta W_3\Delta^{-1}, \lambda W_4{}^tP, D)$ is also a four-weight spin model which gives the same associated link invariant as the one associated to (W_1, W_2, W_3, W_4, D).

あるSpin modelを一つ与えた時，gauge変換によってそれから得られるSpin modelは同じlink invariantを持つことがわかります。そこで，gauge同値を次の様に定義します。

Definition
$(W_1', W_2', W_3', W_4', D)$ is gauge equivalent to (W_1, W_2, W_3, W_4, D) when $(W_1', W_2', W_3', W_4', D)$ is expressed as $(\lambda\Delta W_1\Delta^{-1}, \lambda^{-1}PW_2, \lambda^{-1}\Delta W_3\Delta^{-1}, \lambda W_4{}^tP, D)$, with some invertible diagonal matrix Δ, permutation matrix P and scalar $\lambda\ (\neq 0)$.

TypeII同値とgauge同値という二つの同値を紹介したのですが，この二つの同値の関係がどの様になっているかという疑問がわきます。そこで今回考えたのは，先に紹介した2つのtypeII matrix，Cyclic typeとPotts typeのいずれかを少なくとも一つ持つようなSpin modelの場合についてです。その

結果は次の様になりました。

Theorem (Potts type)

Let (W_1, W_2, W_3, W_4, D) be a four-weight spin model.
If there exists $1 \le i \le 4$ such that W_i is equivalent to potts type II matrix then (W_1, W_2, W_3, W_4, D) is gauge equivalent to a potts model.

Theorem (Cyclic type)

Let (W_1, W_2, W_3, W_4, D) be a four-weight spin model.
If there exists $1 \le i \le 4$ such that W_i is equivalent to cyclic type II matrix then (W_1, W_2, W_3, W_4, D) is gauge equivalent to a cyclic model.

4-weight spin model を実際に link invariant によって分類 (与える) することが重要であり、size が4までの場合については、既にGuo-Huangによってなされています。その分類を次に紹介します。

i) $n=2$

$$W_1 = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad W_2 = \frac{D(1-i)}{2} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$$

ii) $n=3$

$$W_1=\begin{pmatrix}\alpha&1&1\\1&\alpha&1\\1&1&\alpha\end{pmatrix},\quad W_2=\frac{D}{\alpha-1}\begin{pmatrix}\alpha&1&1\\1&\alpha&1\\1&1&\alpha\end{pmatrix}$$

, where $\alpha+\alpha^{-1}+1=0$

iii) $n=4$

$$W_1=\begin{pmatrix}1&1&b&-b\\1&1&-b&b\\b&-b&1&1\\-b&b&1&1\end{pmatrix}\qquad W_2=\frac{D}{2}\begin{pmatrix}1&1&b^{-1}&-b^{-1}\\1&1&-b^{-1}&b^{-1}\\b^{-1}&-b^{-1}&1&1\\-b^{-1}&b^{-1}&1&1\end{pmatrix}$$

注) ii) において $\alpha+\alpha^{-1}+1=0$ の2つの解による Spin model は互いに gauge 同値となります。

$n=4$ の時 0でない全ての b に対し 4-weight spin model となりますが、b と b' の二つの値を持って来た時、b と b' の絶対値が等しくなければ二つの Spin model は gauge 同値とはなりません。

この分類は Guo-Huang によるものを gauge 同値を用いて書き直したものです。

Size が5の 4-weight spin model の分類は、先に示した定理と野村による Size 5 の Type II matrix の分類を用いると容易に行うことができます。まずは Size 5 の Type II matrix の分類を紹介します。

Theorem (Type II matrix of Size 5) (野村)

Every type II matrix of size five is equivalent to either potts type or cyclic type in Example 1.

注) Example1 において原始5乗根のとり方によらず cyclic type は1つの同値類となる。

potts type については $\alpha+\alpha^{-1}+3=0$ の2解による行列は type II 同値ではない。

上の Size が5の type II matrix の分類と前の定理を用いる事によって, Size が5の 4-weight Spin model は次の様に分類できる。

Theorem

Every four-weight spin models of size five is gauge equivalent to one of the following four-weight spin models.

i) Cyclic model

$$(W, \pm W, D^2W^{-1}, \pm D^2W^{-1}, D)$$

W is the matrix of i) in Example 2.

ii) Potts model

$$\left(W, \frac{D}{\alpha-1}W, D^2W^{-1}, D(\alpha-1)W^{-1}, D\right)$$

W is the matrix of ii) in Example 2.

References

1. V.F.R. Jones, On knot invariants related to some statistical mechanical models, Pacific Journal of Mathematics, Vol. 137(1989) 2, 311-334.

2. K. Kawagoe, A. Munemasa and Y. Watatani, Generalized spin models, Journal of Knot Theory and its Ramifications 3(1994) 465-476

3. E. Bannai and E. Bannai, Generalized generalized spin models (four-weight spin models), Pacific Journal of Mathematics Vol. 170 (1995) 1-16

4. F. Jaeger, On four-weight spin models and their gauge transformation, preprint.

5. K. Nomura, Type II matrices of size five, to appear in Graphs and Combinatorics.

6. H. Guo, On four-weight spin models, PhD Thesis, Kyushu University.

7. H. Gao and T. Huang, Some classes of four-weight spin models, preprint.