数理解析研究所講究録
1063 巻 1998 年 41-48

On Embeddings of Projective Spaces

兵庫教育大学　谷口 浩朗 (Hiroaki Taniguchi)

1　はじめに

$\mathbf{k}, \mathbf{K}$ を可換体とし, $\mathbf{P}^n(\mathbf{k})$ を $\mathbf{k}$ 上の n 次元射影空間, $\mathbf{P}^m(\mathbf{K})$ を $\mathbf{K}$ 上の m 次元射影空間とする.

定義 $n, m \geq 2$ とする. $\mathbf{P}^n(\mathbf{k})$ から $\mathbf{P}^m(\mathbf{K})$ への埋め込み ψ とは $\mathbf{P}^n(\mathbf{k})$ から $\mathbf{P}^m(\mathbf{K})$ への次の条件を満たす写像のことである.

(1) ψ は $\mathbf{P}^n(\mathbf{k})$ から $\mathbf{P}^m(\mathbf{K})$ への単射である.
(2) ψ は $\mathbf{P}^n(\mathbf{k})$ の直線全体から $\mathbf{P}^m(\mathbf{K})$ の直線全体への単射をみちびく, i.e. ψ は $\mathbf{P}^n(\mathbf{k})$ の同一直線上にある点集合を $\mathbf{P}^m(\mathbf{K})$ の同一直線上にある点集合に写し, また $\mathbf{P}^n(\mathbf{k})$ の同一直線上にない点集合を $\mathbf{P}^m(\mathbf{K})$ の同一直線上にない点集合に写す.

ここでは次の結果について解説する.

定理 1 $n \geq 3$ とする. $\mathbf{K}$ を $\mathbf{k}$ の巡回拡大とし $\dim_{\mathbf{k}} \mathbf{K} \geq n+1$ とする. σ を $\mathbf{k}$ 上 $\mathbf{K}$ のガロア群の生成元とし, $e_0, e_1, \ldots, e_n, \ldots$ を $\mathbf{K}$ の $\mathbf{k}$ 上の基底とする.

$\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbf{P}^n(\mathbf{k})$ に対して, $a_\lambda = \lambda_0 e_0 + \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n$ とし, 写像 ψ を次のように定める

$$\psi : \mathbf{P}^n(\mathbf{k}) \ni (\lambda_0, \ldots, \lambda_n) \rightarrow (a_\lambda, {a_\lambda}^\sigma, {a_\lambda}^{\sigma^2}) \in \mathbf{P}^2(\mathbf{K}).$$

このとき ψ は埋め込みになっている.

定理 2 $n \geq 3$ とする. もし $\mathbf{P}^n(\mathbf{k})$ が $\mathbf{P}^2(\mathbf{K})$ に埋め込まれるならば, $\mathbf{k}$ は $\mathbf{K}$ の部分体で, $\dim_{\mathbf{k}} \mathbf{K} \geq n+1$ である.

射影空間の埋め込みは arcs や caps の研究において調べられてきた. Thas [5] はアファイン空間の自明でない埋め込みを構成した. 1981 年には, Limbos [1] が射影空間の埋め込みを特徴づけた. [2] において, Limbos は もし $\mathbf{k}, \mathbf{K}$ が有限体で $n \geq 3$ であれば, $\mathbf{P}^n(\mathbf{k})$ が $\mathbf{P}^{n-1}(\mathbf{K})$ に埋め込めるための必要十分条件は $\dim_{\mathbf{k}} \mathbf{K} \geq 4$ であることを示した. さらに, Limbos は もし $n \geq 4$ かつ $\dim_{\mathbf{k}} \mathbf{K} = n^2 - 1$ または 4^{n-2}, または $n = 3$ かつ $\dim_{\mathbf{k}} \mathbf{K} \geq 4$ であれば $\mathbf{P}^n(\mathbf{k})$ は $\mathbf{P}^2(\mathbf{K})$ に埋め込めることを示した. [3] において, 丸田氏は , $n \geq 3$ で $\mathbf{k}$ の位数が 2 という仮定の下で, $\mathbf{P}^n(\mathbf{k})$ が $\mathbf{P}^2(\mathbf{K})$ に埋め込めるための必要十分条件は $\dim_{\mathbf{k}} \mathbf{K} \geq n+1$ であることを示した.

定理 1 , 定理 2 はこの結果の拡張になっている.

2 定理 1 の証明

$\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbf{P}^n(\mathbf{k})$ に対して, $a_\lambda = \lambda_0 e_0 + \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n$ は $\mathbf{K}$ の零でない元である.

さて, ψ が well defined であり ψ によって $\mathbf{P}^n(\mathbf{k})$ の一直線上にある点集合が $\mathbf{P}^2(\mathbf{K})$ の一直線上にある点集合に写ることは明らかなので, 定理 1 を証明するためには, 次のことを証明すれば十分である.

(1) ψ は単射である.

(2) ψ は $\mathbf{P}^n(\mathbf{k})$ の同一直線上にはない点集合を $\mathbf{P}^2(\mathbf{K})$ の同一直線上にはない点集合に写す.

(1) の証明. $(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ and $(\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_n) \in \mathbf{P}^n(\mathbf{k})$ とする. $a = \lambda_0 e_0 + \cdots + \lambda_n e_n$, $b = \mu_0 e_0 + \cdots + \mu_n e_n$ とし, $(a, a^\sigma, a^{\sigma^2}) \sim (b, b^\sigma, b^{\sigma^2})$ と仮定する, つまり 非零元 $s \in \mathbf{K}$ が存在して

$$(a, a^\sigma, a^{\sigma^2}) = s(b, b^\sigma, b^{\sigma^2})$$

とかけていると仮定する. すると

$$\frac{a^\sigma}{a} = \frac{b^\sigma}{b}$$

となるので

$$\left(\frac{b}{a}\right)^\sigma = \frac{b}{a}$$

がわかる. よって

$$\frac{b}{a} \in \mathbf{k},$$

となり, これより

$$(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n) = t(\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_n)$$

となる $t \in \mathbf{k}$ が存在することがわかる. 結局

$$(\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_n) \sim (\mu_0, \mu_1, \cdots, \mu_n) \in \mathbf{P}^n(\mathbf{k})$$

となることがわかった.

(2) の証明. $(\lambda_0, \ldots, \lambda_n), (\mu_0, \ldots, \mu_n), (\nu_0, \ldots, \nu_n)$ を $\mathbf{P}^n(\mathbf{k})$ の異なる３点とする.

$a = \lambda_0 e_0 + \cdots + \lambda_n e_n, b = \mu_0 e_0 + \cdots + \mu_n e_n, c = \nu_0 e_0 + \cdots + \nu_n e_n$ とする.

ここで $\mathbf{P}^2(\mathbf{K})$ において 点 $(c, c^\sigma, c^{\sigma^2})$ が ２点 $(a, a^\sigma, a^{\sigma^2})$ と $(b, b^\sigma, b^{\sigma^2})$ を結ぶ直線上にあると仮定する .

このとき $x, y \in \mathbf{K}$ が存在して

$$(c, c^\sigma, c^{\sigma^2}) = x(a, a^\sigma, a^{\sigma^2}) + y(b, b^\sigma, b^{\sigma^2})$$

とかけている. このことより

$$c = xa + yb \tag{2.1}$$

$$c^\sigma = xa^\sigma + yb^\sigma \tag{2.2}$$

$$c^{\sigma^2} = xa^{\sigma^2} + yb^{\sigma^2} \tag{2.3}$$

となる. (2.2) と (2.3) より

$$c = x^{\sigma^{-1}} a + y^{\sigma^{-1}} b \tag{2.4}$$

$$c = x^{\sigma^{-2}} a + y^{\sigma^{-2}} b \tag{2.5}$$

となる. (2.4) から (2.1) を引くことにより, また (2.5) から (2.4) を引くことにより

$$(x^{\sigma^{-1}} - x)a + (y^{\sigma^{-1}} - y)b = 0 \tag{2.6}$$

$$(x^{\sigma^{-2}} - x^{\sigma^{-1}})a + (y^{\sigma^{-2}} - y^{\sigma^{-1}})b = 0 \tag{2.7}$$

が得られる. また (2.6) より

$$(x^{\sigma^{-2}} - x^{\sigma^{-1}})a^{\sigma^{-1}} + (y^{\sigma^{-2}} - y^{\sigma^{-1}})b^{\sigma^{-1}} = 0 \tag{2.8}$$

が得られる.

$a \neq 0, b \neq 0$ と (2.6) より, $x^{\sigma^{-1}} - x = 0$ であるならば $y^{\sigma^{-1}} - y = 0$ であり, その逆もなりたつ. つまり $x \in \mathbf{k}$ であるならば必ず $y \in \mathbf{k}$ であり, その逆も成り立つ.

ここで $x \notin \mathbf{k}$ と仮定してみると, $y^{\sigma^{-2}} - y^{\sigma^{-1}} \neq 0$ と (2.7), (2.8) より,

$$-\frac{b}{a} = \frac{x^{\sigma^{-2}} - x^{\sigma^{-1}}}{y^{\sigma^{-2}} - y^{\sigma^{-1}}} = -\frac{b^{\sigma^{-1}}}{a^{\sigma^{-1}}}$$

となる. つまり

$$\frac{b}{a} = \left(\frac{b}{a}\right)^{\sigma^{-1}}$$

となる. 結局

$$\frac{b}{a} \in \mathbf{k}$$

となり, それは 非零元 $u \in \mathbf{k}$ が存在して

$$(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n) = u(\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_n)$$

とかけることを意味する.

これより $(\lambda_0, \ldots, \lambda_n) \sim (\mu_0, \ldots, \mu_n)$ となる.

これは $(\lambda_0, \ldots, \lambda_n)$ と $(\mu_0, \ldots, \mu_n)$ が $\mathbf{P}^n(\mathbf{k})$ において異なる点であるという最初の仮定に矛盾する.

結局 $x \in \mathbf{k}$ であり, よって $y \in \mathbf{k}$ となることがわかった.

(2.1) より $(\nu_0, \ldots, \nu_n) = x(\lambda_0, \ldots, \lambda_n) + y(\mu_0, \ldots, \mu_n)$ となるので, $(\nu_0, \ldots, \nu_n)$ が $\mathbf{P}^n(\mathbf{k})$ において 2 点 $(\lambda_0, \ldots, \lambda_n)$ と $(\mu_0, \ldots, \mu_n)$ を結ぶ直線上にあることがわかった.

これは (2) が成り立つことを意味する.

3 定理 2 の証明

次の命題は, 昔からよく知られている.

命題 1 もし $\mathbf{P}^n(\mathrm{k})$ が $\mathbf{P}^2(\mathbf{K})$ に埋め込めるならば k は $\mathbf{K}$ の部分体である.

証明. もし $\mathbf{P}^n(\mathrm{k})$ が $\mathbf{P}^2(\mathbf{K})$ に埋め込めるならば, $\mathbf{P}^n(\mathrm{k})$ のどの 2-次元部分空間 $\mathbf{P}^2(\mathrm{k})$ もまた $\mathbf{P}^2(\mathbf{K})$ に埋め込める. すると, この命題は Stevenson [4] の 定理 8.2.10 からすぐに導かれる. □

定理 2 の証明には Monique Limbos の次の結果を用いる.

命題 2 (Limbos [1]) $n > m \geq 2$ とする. もし $\mathbf{P}^n(\mathrm{k})$ から $\mathbf{P}^m(\mathbf{K})$ への埋め込み ψ が存在し, さらにもし $\mathbf{P}^m(\mathbf{K})$ が $\psi(\mathbf{P}^n(\mathrm{k}))$ によって張られているならば, 次の性質を満たす $(n-m-1)$-次元部分空間 $U \subset \mathbf{P}^n(\mathbf{K})$ が存在する.

$\mathbf{P}^n(\mathrm{k})$ の 3 個の元で張られるどのような 2-次元部分空間
$V \subset \mathbf{P}^n(\mathbf{K})$ に対しても, $U \cap V = \emptyset$ が成り立っている.

注意　k は $\mathbf{K}$ の部分体なので, 自然な埋め込み

$$\mathbf{P}^n(\mathrm{k}) \ni (\lambda_0, \dots, \lambda_n) \to (\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{P}^n(\mathbf{K})$$

により $\mathbf{P}^n(\mathrm{k}) \subset \mathbf{P}^n(\mathbf{K})$ と見なしている.

証明. もし $\mathbf{P}^n(\mathrm{k})$ から $\mathbf{P}^m(\mathbf{K})$ への埋め込み ψ が存在するなら, Limbos [1] の定理 2 より, $\mathbf{P}^n(\mathbf{K})$ の $(n-m-1)$-次元部分空間 U と U を中心とする射影 π で, π が $\mathbf{P}^n(\mathrm{k}) \subset \mathbf{P}^n(\mathbf{K})$ から $\psi(\mathbf{P}^n(\mathrm{k})) \subset \mathbf{P}^m(\mathbf{K})$ の上への埋め込みになっているものが存在する. ここに $\mathbf{P}^m(\mathbf{K})$ を $\mathbf{P}^n(\mathbf{K})$ の適当な m-次元部分空間と見なしている.

さて もし $\mathbf{P}^n(\mathrm{k})$ の 3 個の点 P_1, P_2, P_3 で張られる 2 次元部分空間 V に対して $U \cap V \neq \emptyset$ であったとすると, $\pi(P_1), \pi(P_2), \pi(P_3)$ は $\mathbf{P}^m(\mathbf{K})$ の同一直線上にあることになる. これは π が埋め込みであることに反する. □

なお　Limbos は [1] 定理 2 の証明において k, $\mathbf{K}$ は有限体であると仮定しているが, その証明は無限体でも成り立つ.

さて 定理 2 において, ψ は $\mathbf{P}^n(\mathrm{k}))$ から $\mathbf{P}^2(\mathbf{K})$ への埋め込みであり $n \geq 3$ であるので, $\mathbf{P}^2(\mathbf{K})$ は $\psi(\mathbf{P}^n(\mathrm{k}))$ によって張られている. つまり定理 2 の証明においては, 命題 2 を適用するための仮定は満たされている.

よって 定理 2 を証明するためには, 次の事実を証明すれば十分である.

事実 $\dim_{\mathbf{k}} \mathbf{K} \leq n$ とする．すると $\mathbf{P}^n(\mathbf{K})$ のどの $(n-3)$-次元部分空間 U に対しても，$\mathbf{P}^n(\mathbf{k}) \subset \mathbf{P}^n(\mathbf{K})$ の 3 個の元で張られた $\mathbf{P}^n(\mathbf{K})$ の 2-次元部分空間 V で $U \cap V \neq \emptyset$ となるものが存在する．

ところでこの事実は，つぎの補題からすぐにみちびかれる．

補題 $\dim_{\mathbf{k}} \mathbf{K} \leq n$ とする．すると $\mathbf{K}^{n+1}$ のどのような $(n-2)$-次元部分空間 U に対しても，$\mathbf{k}^{n+1} \subset \mathbf{K}^{n+1}$ の 3 個の元で張られた $\mathbf{K}^{n+1}$ の 3-次元 $\mathbf{K}$-部分空間 V で $U \cap V \neq \{0\}$ となるものが存在する．

注意 $\mathbf{k}$ は $\mathbf{K}$ の部分体なので，自然に $\mathbf{k}^{n+1} \subset \mathbf{K}^{n+1}$ と見なしている．

注意 $a_1, \ldots, a_l$ が $\mathbf{k}$-ベクトル空間としての $\mathbf{K}$ の基底であるならば，$\mathbf{K}^{n+1}$ の元 $(u_1, u_2, \ldots, u_{n+1})$ は $\mathbf{k}^{n+1}$ のただ一組の元 $(\alpha_{1,i}, \alpha_{2,i}, \ldots, \alpha_{n+1,i})$ によって以下のように表せる．ただし $1 \leq i \leq l$.

$$(u_1, u_2, \ldots, u_{n+1}) = \sum_{j=1}^{l} (\alpha_{1,j}, \alpha_{2,j}, \ldots, \alpha_{n+1,j}) a_j. \tag{3.1}$$

(3.1) を 元 $(u_1, u_2, \ldots, u_{n+1})$ の，基底 $a_1, a_2, \ldots, a_l$ に関する**標準的な表現** と言うことにする．

補題の証明．$\dim_{\mathbf{k}} \mathbf{K} = l$ とする．ここに $l \leq n$ である．$a_1, a_2, \ldots, a_l$ を $\mathbf{K}$ の $\mathbf{k}$-ベクトル空間としての基底とする．また $b_1, b_2, \ldots, b_{n-2}$ を U の $\mathbf{K}$-ベクトル空間としての基底とする．

$1 \leq k \leq l(n-2)$ に対し c_k を $c_{s+l(t-1)} = a_s b_t$ として定める．ただし $1 \leq s \leq l$, $1 \leq t \leq n-2$.

$1 \leq k \leq l(n-2)$ に対し，c_k の，基底 $a_1, a_2, \ldots, a_l$ に関する標準的な表現が

$$c_k = \sum_{j=1}^{l} (\alpha^k_{1,j}, \alpha^k_{2,j}, \ldots, \alpha^k_{n+1,j}) a_j \tag{3.2}$$

であるとする．

ベクトル空間 U の すべての元は c_k たちの $\mathbf{k}$ 係数の一次結合で表せることに注意する．ここに $1 \leq k \leq l(n-2)$.

さて c_k たちは $\mathbf{k}$ 上一次独立であり，また U は $\mathbf{k}$ 上 c_k たちで張られた $l(n-2)$-次元のベクトル空間であるので，ベクトル空間 U は

$$U = \{\, x_1 c_1 + x_2 c_2 + \cdots + x_{l(n-2)} c_{l(n-2)} \mid x_k \in \mathbf{k} \ \text{for } 1 \leq k \leq l(n-2) \,\}$$

と表すことができる.

ここで $1 \leq i \leq n+1, 1 \leq j \leq l$ に対して $\mathbf{k}$-ベクトル空間 $W_{i,j}$ を以下のように定義する.

$$W_{i,j} = \{ \; x_1 c_1 + x_2 c_2 + \cdots + x_{l(n-2)} c_{l(n-2)} \mid x_k \in \mathbf{k} \;\; \text{for } 1 \leq k \leq l(n-2) \\ \text{with} \;\; x_1 \alpha_{i,j}^1 + x_2 \alpha_{i,j}^2 + \cdots + x_{l(n-2)} \alpha_{i,j}^{l(n-2)} = 0 \; \}.$$

ここに $\alpha_{i,j}^1, \alpha_{i,j}^2, \ldots, \alpha_{i,j}^{l(n-2)}$ は, c_k の標準的な表現 (3.2) にでてきた $\mathbf{k}$ の元とする. ただし $1 \leq k \leq l(n-2)$.

ここで $W_{i,j} \subset U$ であり $\dim_{\mathbf{k}} W_{i,j} = \dim_{\mathbf{k}} U - 1$ となることは明らかである.

さて, さらに $\mathbf{k}$-ベクトル空間 W' を

$$W' = W_{1,1} \cap W_{2,1} \cap \cdots \cap W_{n,l-3} \cap W_{n+1,l-3} \subset U$$

として定義する.

仮定より $l \leq n$ であるので, $l(n-2) > (n+1)(l-3)$ となる.

また, $\dim_{\mathbf{k}} U = l(n-2)$ であり, W' は $(n+1)(l-3)$ 個の $W_{i,j}$ たちの交わりであるので, $c \in W' \subset U$ であるような非零元 c が存在する.

c を U の元と考えると以下のように表せる.

$$c = x_1 c_1 + x_2 c_2 + \cdots + x_{l(n-2)} c_{l(n-2)}. \tag{3.3}$$

また, $1 \leq i \leq n+1, 1 \leq j \leq l-3$ に対して, $c \in W_{i,j}$ であるので,

$$x_1 \alpha_{i,j}^1 + x_2 \alpha_{i,j}^2 + \cdots + x_{l(n-2)} \alpha_{i,j}^{l(n-2)} = 0 \tag{3.4}$$

が成り立っている.

ここで c_k たちの標準的な表現 (3.2) を思い出すと, また, $1 \leq i \leq n+1$, $1 \leq j \leq l-3$ に対して (3.3) と (3.4) を考えあわせると , 基底 $a_1, a_2, \ldots, a_l$ に関する, c の標準的な表現は

$$c = \sum_{j=1}^{l-3} (0, 0, \ldots, 0) a_j + \sum_{j=l-2}^{l} (\beta_{1,j}, \beta_{2,j}, \ldots, \beta_{n+1,j}) a_j \tag{3.5}$$

となっていることがわかる. ただし, $1 \leq i \leq n+1$, $l-2 \leq j \leq l$ に対して $\beta_{i,j} \in \mathbf{k}$ とする.

さて V を $\mathbf{k}^{n+1}$ の 3 個の元で張られた 3-次元 $\mathbf{K}$-ベクトル空間で, $\mathbf{k}^{n+1}$ の 3 個の元 $(\beta_{1,j}, \beta_{2,j}, \ldots, \beta_{n+1,j})$, ただし $l-2 \leq j \leq l$, を含んでいるものとする.

そうすると (3.5) より, $U \cap V \ni c \neq 0$ となっている.
これが補題の主張することであった. □

定理 1 においては, $\mathbf{K}$ が $\mathbf{k}$ の巡回拡大であると仮定しているので, 次の問題はまだオープンだと思われる.

問題 $\mathbf{k}$ が $\mathbf{K}$ の部分体で $\dim_{\mathbf{k}} \mathbf{K} \geq n+1$ であれば, 常に $\mathbf{P}^n(\mathbf{k})$ から $\mathbf{P}^2(\mathbf{K})$ への埋め込みが存在するか?

参考文献

[1] M. Limbos, A characterisation of the embedding of $PG(m,q)$ into $PG(n,q^r)$, *Journal of Geometry*, Vol.**16**, (1981), 50–55.

[2] M. Limbos, Plongements de $PG(n,q)$ et $AG(n,q)$ dans $PG(m,q')$, $m < n$, *C. R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada*, Vol. **IV** (1982), 65–68.

[3] T. Maruta, Arcs and Steiner triple systems (in Japanese), *RIMS kokyuroku* **697**, Research Institute for Mathematical Science, Kyoto university (1989), 29–39.

[4] F. W. Stevenson, *Projective Planes*, W. H. Freeman and Company, 1972.

[5] J. A. Thas, Connection between the n-dimensional affine space $A_{n,q}$ and the curve C, with equation $y = x^q$, of the affine plane A_{2,q^n}, *Rend. ist. di Matem. Univ. di Trieste*, Vol. **II** fasc. **II** (1970), 146–151.

[6] H. Taniguchi, On Embeddings of Projective Spaces, *Utilitas Mathematica*, to appear.