数理解析研究所講究録
1063 巻 1998 年 49-52

Conway 群 Co_1 の 2-radical 部分群について

沢辺 正人 (Masato Sawabe) 熊本大大学院自然科学

1 はじめに

有限群 G とその位数を割り切る素数 p に対して $\widetilde{\mathcal{B}}_p(G) = \{U : p\text{-部分群} \subseteq G \mid O_p(N_G(U)) = U\}$ および $\mathcal{B}_p(G) = \widetilde{\mathcal{B}}_p(G) - \{1\}$ と置く。$\mathcal{B}_p(G)$ の各元を G の p-radical 部分群と呼ぶ。$\Delta(\mathcal{B}_p(G))$ を $\mathcal{B}_p(G)$ の order complex とする。即ち $\mathcal{B}_p(G)$ の中で自然に定義される包含関係に対して、その包含列全体の集まりを単体の集合とする単体複体を $\Delta(\mathcal{B}_p(G))$ と書く。ところで modular 表現における Dade 予想を検証する際に重要な役割を果たす G の radical p-chain とは G の p-部分群の列 $P_0 < P_1 < \cdots < P_n$ で $P_0 = O_p(G)$, $P_i = O_p(\cap_{j=0}^{i} N_G(P_j))$ $(1 \leq i \leq n)$ を満たすものである。以下述べる様に Conway 群 Co_1 の 2-radical 部分群とその正規化群の構造を今回決定した。この結果から Co_1 の radical 2-chain の P_1, P_2 が決定できたことになり、しかも chain を求める本質的な作業はこれで完了している。実際、後は(ほとんど)ただちに標数 2 の体上で定義されている Lie 型の群の radical 2-chain を求める作業に帰着され、機械的な作業を残すのみとなる。他の(散在)群に関しても本質的な部分は最初の P_1, P_2, P_3 程度で、後は機械的な作業に帰着されると思われる。一方 p-進整数環 $\mathbf{Z_p}$ 係数の G のコホモロジーに関して次の交代和分解が知られている。

$$\tilde{H}^n(G, \mathbf{Z}_p) = \sum_{\sigma \in \Delta(\mathcal{B}_p(G))/G} (-1)^{\dim(\sigma)} \tilde{H}^n(G_\sigma, \mathbf{Z}_p) \ ([6]).$$

ここで n は非負整数、G_σ は単体 σ の G における固定部分群、$\Delta(\mathcal{B}_p(G))/G$ は $\Delta(\mathcal{B}_p(G))$ の G-軌道の完全代表系である。つまりこの分解によって G のコホモロジーの計算がより小さい群のコホモロジーの計算に帰着される。さらに $\Delta(\mathcal{B}_p(G))$ と G の幾何との間に次の様な関係がある。G を標数 p の体上で定義されている Lie 型の群とすると$\Delta(\mathcal{B}_p(G))$ はいわゆる G の建物とホモトピー同値になっている。ここで $\mathcal{B}_p(G)$ の各元の正規化群は全て p-束縛になっていることに注意する。一方 G を散在型単純群とすると $\Delta(\mathcal{B}_p(G))$ の頂点をその正規化群が p-束縛になっているものに制限した $\Delta(\mathcal{B}_p^{con}(G))$ がいわゆる G の p-局所幾何とホモトピー同値になっていることが多数確認されている。そこで逆に $\Delta(\mathcal{B}_p^{con}(G))$ とホモトピー同値になるような G の幾何が本質的なものであろうと推察される。故に各散在群に対して $\mathcal{B}_p(G)$ を計算してそれらをカタログ的に知っておくことは意味のあることである。このように $\mathcal{B}_p(G)$ は各方面で重要視され、また応用されている。

以下述べる様に G を標数 p の体上で定義されている Lie 型の群とすると $\mathcal{B}_p(G)$ は Borel-Tits によって完全に決定されている。一方散在群の radical 群は Smith, Yoshiara 達によって数多く計算されている。そこで本講演の目的は Conway 群 Co_1 の 2-radical 群およびその正規化群の構造を完全に決定したことの報告である(詳しくは [4] を参照された

い)。ここで強調したいことは次のことである。G を極大 p-局所部分群あるいは極大部分群の分かっている有限群とすると $\mathcal{B}_p(G)$ の "候補" を求める作業が既に知られている基本的な結果および今回示したいくつかの 命題 を用いることでかなり機械的になったということである。しかし、さまざま状況の下における一般的な定理の開発あるいは極大部分群の存在によらない $\mathcal{B}_p(G)$ を求めるシステムの技術開発などの余地は多分にあると思われる。

2 p-radical 部分群に関する一般論

次の補題は radical 群に関する結果の中で最も基本的なものの1つであると言える。

補題 1 ([5, **lemma 1.9**]) $\mathcal{B}_p(G) \ni U$ に対して $N_G(U) \subseteq M$ なる G の部分群 M が存在したと仮定すると $O_p(M) \subseteq U$ が成り立つ。特に $O_p(M) \neq U$ ならば $U/O_p(M) \in \mathcal{B}_p(M/O_p(M))$ が成り立つ。

上の補題は帰納的に radical 部分群を求めることができることを示している。

系 1 G を有限単純群、M を $O_p(M) \neq 1$ なる G の極大部分群とすると $\mathcal{B}_p(M) = \{U \mid U/O_p(M) \in \mathcal{B}_p(M/O_p(M))\} \cup \{O_p(M)\}$ が成り立つ。

先に述べた様に Lie 型の群に対する radical 部分群は良く分かっている。

定理 1 ([2]) G を標数 p の体上で定義されている *Lie* 型の群とすると $\mathcal{B}_p(G) = \{O_p(P) \mid G \supseteq P : parabolic$ 部分群$\}$ が成り立つ。

しかし q を p と異なる $|G|$ の素因子とすると $\mathcal{B}_q(G)$ は良く分かっていない（一般線型群の radical 群は Alperin-Fong[1] によって決定されている)。

命題 1 有限群 H, K に対して $\widetilde{\mathcal{B}}_p(H \times K) = \{V \times K \mid V \in \widetilde{\mathcal{B}}_p(H),\ W \in \widetilde{\mathcal{B}}_p(K)\}$ が成り立つ。

上の結果は具体的な群の radical 部分群を計算する際非常に有効である。(講演では H あるいは K の p-シロー部分群の巾零クラスが 2 以下であるという条件をかしていたが、その後その条件なしでの証明ができている。)

命題 2 A を有限群、G を $|A : G| = p$ (素数) なる A の正規部分群とする。この時 $U \in \mathcal{B}_p(A)$ に対して $U \cap G \in \widetilde{\mathcal{B}}_p(G)$ が成り立つ。

命題 2 の状況の下で特に $\{U \in \mathcal{B}_p(A) \mid U \subseteq G\} \subseteq \mathcal{B}_p(G)$ が成り立つ。一方 $U \not\subseteq G$ なる $U \in \mathcal{B}_p(A)$ に対して $U = (U \cap G)\langle x \rangle$ なる $x \in G$ が存在し $U_1 = U \cap G \in \widetilde{\mathcal{B}}_p(G)$ および $|U : U_1| = p$ が成り立つ。故にこの場合 A より小さい G の radical 群を決定し、そこにどの様な位数 p 巾の元が作用し得るかということさえ議論すれば良い。命題 2 の特別な場合として次を示した。

命題 3 G を標数 p の体上で定義されている *Lie* 型の群とし、σ を位数 p の G の体自己同型とすると $\{U \in \mathcal{B}_p(G\langle\sigma\rangle) \mid U \subseteq G\} = \mathcal{B}_p(G)$ が成り立つ。

3 応用

前節の応用として $\mathcal{B}_2(Co_1)$ を考える。もちろん Co_1 以外の群に対しても適用可能である。次の一般的な注意は定義から明らかであるが重要な事実である。

注意 1 $\mathcal{B}_p(G) \ni U$ に対して $N_G(U) \subseteq M$ なる G の部分群 M が存在したと仮定すると $U \in \mathcal{B}_p(M)$ が成り立つ。

Co_1 の p-局所部分群は Curtis によって分類されている。

定理 2 ([3, **theorem 2.1**]) Co_1 の任意の 2-部分群 $P \neq 1$ に対してその正規化群 $N_{Co_1}(P)$ は以下のいずれかの群の部分群と共役である。

$$\begin{array}{lll} L_1 = 2_+^{1+8} \cdot \Omega_8^+(2) & L_4 = 2^{11}{:}M_{24} & L_7 = (A_6 \times PSU_3(3)){:}2 \\ L_2 = 2^{4+12} \cdot (S_3 \times 3Sp_4(2)) & L_5 = Co_2 & \\ L_3 = 2^{2+12}{:}(S_3 \times L_4(2)) & L_6 = (A_4 \times G_2(4)){:}2 & \end{array}$$

注意 1 と定理 2 から $\mathcal{B}_2(Co_1) \subseteq \{U^g \mid U \in \mathcal{B}_2(L_i)\ (1 \leq i \leq 7)\ g \in Co_1\}$ が分かる。つまり $\mathcal{B}_2(L_i)$ が $\mathcal{B}_2(Co_1)$ の候補になっている。そこで各 $\mathcal{B}_2(L_i)$ を決定する。前節の結果を使うと以下の如く機械的に決定することができる。

$\mathcal{B}_2(L_i)$ $(1 \leq i \leq 5)$: 系 1 および命題 1 より $\Omega_8^+(2)$, S_3, $3Sp_4(2)$, $L_4(2)$, M_{24}, Co_2 の 2-radical 群を求めれば良い。これらは 定理 1, [5], [7] から分かる。

$\mathcal{B}_2(L_i)$ $(i = 6, 7)$: 命題 1,2,3 より本質的に A_4, A_6, $G_2(4)$, $PSU_3(3)$ の 2-radical 群を求めれば良い。A_4, A_6 は明らか。$G_2(4)$, $PSU_3(3)$ は定理 1 から分かる ($PSU_3(3) = [G_2(2), G_2(2)]$ であることに注意)。

これらの候補の中で実際にどれが $\mathcal{B}_2(Co_1)$ に属しているのかを検証することによって Table 1 の結果を得る。つまり $\mathcal{B}_2(Co_1)$ は共役を除いて 30 クラスありその代表系と正規化群の構造は以下の如くなる。

Table 1: $\mathcal{B}_2(Co_1)$

representative T	$N_{Co_1}(T)$
$R = 2_+^{1+8}$	$R \cdot \Omega_8^+(2)$
$R.P_i$ $(1 \leq i \leq 15)$	$R.N_{O_8^+(2)}(P_i)$
$E = 2^{11}$	$E : M_{24}$
$Q = 2^{4+12}$	$Q \cdot (S_3 \times 3Sp_4(2))$
$Q : S = 2^{4+12} : 2$	$Q \cdot (S \times 3Sp_4(2))$
$Q_1 = 2^{2+12}$	$Q_1 : (S_3 \times L_4(2))$
$Q_1 : N_i$ $(1 \leq i \leq 7)$	$Q_1 : (S_3 \times N_{L_4(2)}(N_i))$
$V = 2^2$	$(A_4 \times G_2(4)) : 2$
$V : \langle\sigma\rangle = 2^2 : 2$	$(V \times G_2(2)) : \langle\sigma\rangle$
$F = 2^2$	$(S_4 \times PSU_3(3)) : 2$

ここで $\{P_i\}_{1 \leq i \leq 15}$ と $\{N_i\}_{1 \leq i \leq 7}$ はそれぞれ $\mathcal{B}_2(O_8^+(2))$ と $\mathcal{B}_2(L_4(2))$ の G-共役による完全代表系である。

参考文献

[1] J. Alperin and P. Fong, Weights for symmetric and general linear groups, *J. Algebra* **131** (1990), 2–22.

[2] A. Borel and J. Tits, Eléments unipotents et sousgroupes paraboliques des grous réductives, *Inv. Math.* **12** (1971), 97–104.

[3] R. Curtis, On subgroups of ·0. II. local structure, *J. Algebra* **63** (1980), 413–434.

[4] M. Sawabe, 2-radical subgroups of the Conway simple group Co_1, preprint.

[5] S. Smith and S. Yoshiara, Some homotopy equivalences for sporadic geometries, *J. Algebra* **192** (1997), 326–379.

[6] P. Webb, A local method in group cohomology, *Comment. Math. Helv.* **62** (1987), 135–167.

[7] S. Yoshiara, The Borel-Tits property for finite groups, in : *Groups and Geometries* (L. di Martino et al. Eds.) 237–249, Trends in Mathematics, Birkhäuser, 1998.