数理解析研究所講究録
1064 巻 1998 年 129-147

建部賢弘の極値計算について*

小川束 (四日市大学)†

1998 年 5 月 12 日

1 はじめに

本稿は, 建部賢弘 (1664-1739) の『綴術算経』(1722) 第六章探直堡求積術[1]において扱われた極値問題の検討を通じて, 建部の数学の特質を探るものである.

極値問題を扱うこの第六章は, 導関数による極値の計算を日本数学史上はじめて行ったものとして意義を持っている[2]. 今日的言葉で言えば, 建部の扱った問題は, 関数

$$V(x)=0+abx+(b-a)x^{2}-x^{3} \tag{1}$$

の極大値を求める問題であり, 建部は確かにこの関数の導関数 $V'(x)$ と, $a=7, b=8$ の時のその零点 $x=14/3$ を求めている. しかしながら, その方法を子細に検討してみると, 建部の方法は, いわゆる「微分法の理論」とは無縁のものであり, それとは全く別の経緯を辿って, 導関数の発見に至り, 極大値を求めていたことがわかる.

建部の方法は, 一言で言えば数学的経験に基づく帰納的推理であり, それが『綴術算経』全体を貫く方法論でもあった[3]. ここで問題にしている極値計算についても同様である. 各計算過程においては精密な方法を援用しつつも, その根幹を支えているのは, 体系的な数学理論ではない. 建部の解法に, 今日から見て批判に耐えうる何らかの数学理論を期待するとすれば, われわれは期待はずれに終わるであろう. しかし一方で, われわれが期待するような確固たる理論的基盤を持たずとも, 数学上の諸経験を踏まえつつ正しい結論に到達した建部の「方法」には感嘆せざるを得ない.

以下, 第 2 節では建部の解法の概略を述べ, その方法の歴史的根拠について述べる. 建部は, 組み立て除法による方程式の解法 (開出商数の法) を援用した上で, 別の数値計算による解法との比較観察を通して, 導関数の利用法および導関数の導出法を獲得した. 第 3 節では, 建部による 2 次方程式の解法について述べる. その方法は, まず開出商数の法により解の十

---

*On a Calculation of an Extremum by Takebe Katahiro

†Ogawa Tsukane (Yokkaichi University), ogawa@yokkaichi-u.ac.jp

[1] 以下, 引用は国立公文書館内閣文庫 194-214 を用いる. なお, 東京大学に『不休建部先生綴術』(T20:74, 外題は『建部先生綴術真本』) があるが, 章立て, 内容に異同がある. また, 九州大学工学部物理学教室には『不休建部先生綴術』上下 (805795, 外題は『綴術』) という二冊に分かれたものがあり, これは [4] に翻刻されている. その他,『綴術算経』は各所に存在する.

[2] [6], p.292.

[3] 『綴術算経』全般にわたり検討したものとしては [6], pp.284-310 あるいは [7] がある.

進近似値を求め, その小数以下の部分を分数で近似し, 方程式を変数変換する. そして, この方程式を改めて開出商数の法によって解き直すのである. こうして正確な解が得られる. このように建部は, いわゆる解の公式を用いずに, 2 次方程式を解いたのである. 第 4 節は,『綴術算経』第六章探直堡求積術の原文の翻刻に, 現代語訳, 注釈を施したものである.

2 建部賢弘の方法とその特質

『綴術算経』第六章探直堡求積術で与えられた問題は, 三辺が x, y, z の直方体があり, $y-x=7(=a$ とおく$)$, $x+z=8(=b$ とおく$)$ となっているときに, その体積 xyz の最大値を求めることである[4]. 建部は, y, z を x であらわすことによって (1) 式を得て[5], その最大値を求める.

まず, 開出商数の法と呼ばれる組み立て除法により, 導関数を導く[6]. その計算は次のようになる.

商	隅	廉	方	実
x	-1	$b-a$		
		$-x$	$(b-a)x-x^2$ (方級ヲ開クベキ一遍ノ数)	
	-1	$(b-a)-x$ (廉級ヲ開ク一変ノ数)		
		$-x$	$(b-a)x-2x^2$ (方級ヲ開クベキ二遍ノ数)	
	-1	$(b-a)-2x$ (廉級ヲ開ク二変ノ数)	$2(b-a)x-3x^2$ (方級ノ極限)	

以上の計算では, $V'(x)$ の計算に不要な実級 (定数項) 部分の計算は省かれている. また, 方級 (一次の項) 部分は

$$\begin{array}{r} ab \\ (b-a)x-x^2 \\ \hline ab+(b-a)x-x^2 \\ (b-a)x-2x^2 \\ \hline V'(x)=ab+2(b-a)x-3x^2 \end{array}$$

という計算から ab を加える計算を省いたものである. これは, ab を正数, $2(b-a)x-3x^2$ を負数として, 等式 $-\{2(b-a)x-3x^2\}=ab$ を作り, $ab+2(b-a)x-3x^2=0$ を得るための常法である.

記述上の特徴はともかく, ここでの計算の本質は, 組み立て除法を二回繰り返して導関数を得ることである.

ここで問題となるのは, 組み立て除法を二度用いる以上の方法を, どのようにして知ったのかという点であり, また, $V'(x)$ の零点が極値を与えることの根拠はどこにあったのか, という点である.

[4] 22 丁オ 6.
[5] 22 丁ウ 2.
[6] 23 丁オ 2.

建部はこのことについて次のように述べている[7].

> 往時, ある人が, 授時暦の月離遅疾の差を求めるのに, 立差, 平差, 定差の三差を用いているが, その損益の極限を求める術を問うことがあった. 私は理を察することはせず, 数値を細かく計算, 分析して, 直ちに, 定数項に 1, 一次の係数に 2, 二次の係数に 3 が現れることを探り得て, その術を理解した (その数値を探る部分はこれを略す). これより後, 又, 問題文をつくり変えて, この直方体の体積の極値を問うこととなったが, これらが同種の問題であるとは思わなかった. ここでは, 立元の法によってその理を察して, たちまちその術を探り得た.

授時暦[8]は王恂や郭守敬らによって編纂された暦で, 元朝の至元 17 年 (1280 年) に完成し, 翌年より使用された. 太陽の盈宿 (太陽の不等運動) や月行遅疾 (月の不等運動) を, 平立定三差術と呼ばれる高次の補完法によって計算した点に大きな特徴がある. 授時暦では, 天体の視運動の不等の大きさを $f(x) = ax + bx^2 + cx^3$, d, a, b, c は定数, x は時刻に該当する変数, で表わした. ここで a を定差, b を平差, c を立差と呼ぶ. x が 1, 2, 3, $\cdots$ と増加するに従って, a は $a, 2a, 3a$ と増加し, b は $b, 4b, 9b$ と増加し, c は $c, 8c, 27c$ と増加する. このことより, a, b, c おそれぞれ定差, 平差, 立差と呼んだ. 実際の計算は階差の計算であるから, 差という.

建部が実際に計算した式は,

$$f(x) = -11110000x + 28100x^2 + 325x^3 \tag{2}$$

であった. 詳細な計算過程は不明であるが, 建部は数値計算によって,

$$f'(x) = 1 \cdot (-11110000) + 2 \cdot 28100x + 3 \cdot 325x^2 \tag{3}$$

の零点が $f(x)$ の極値を与えることを知ったのである.

このように, 建部が導関数の零点が極値を与えることを知ったのは, 授時暦に関する問題の解法を通じてであり, その方法は, 詳細な数値計算とその結果の観察を通してであった. この詳細な数値計算とその結果の観察という手法は, 円周率計算[9] や円弧長の無限級数展開計算[10]において最大限に活用された方法であり, 建部の数学を支える柱の一つであった.

さて, 上記引用の後半部分によれば, 本問の場合, 建部は立元の法によって理を察して, たちまちその術を探り得たという. ここで, 立元の法とは, 天元の一 (未知量) を立てて, 一元高次方程式を得る方法のことである[11]. 建部は, 朱世傑選の『算学啓蒙』でそれを学び,『算学啓蒙諺解大成』(1690 年) を著した. 建部は『綴術算経』第二章探立元法において, 立元の法を「索数ノ術ヲ得ルノ神法タリ」[12]と述べている. 本問においては, (1) 式を得るまでの方法が立元の法にあたる[13].

---

[7] 24 丁オ 6.

[8] 授時暦の概要については [5], pp.199–205.

[9] 35 丁ウ 1 – 41 丁ウ 5. この部分に関する詳細については [2].

[10] 41 丁ウ 5 – 54 丁ウ 9.

[11] 立元の法は後に天元術と呼ばれるようになった.

[12] 8 丁オ 9. 建部はこの第二章において, いわゆる天元術における算木の操作法の観察から, 未知量の概念を明確にしている. 第二章の分析については [3].

[13] 22 丁ウ 2.

立元の法によって得られた方程式, たとえば (1) 式を解く方法が開出商数の法である[14]. これは関孝和の『開方翻変之法』に述べられている. たとえば 3 次方程式

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \tag{4}$$

を例として, 関による用語も付しながらその過程を示す. まず, 適当な商 α を立てて, 組み立て除法を 3 回繰り返す.

α	a	b	c	d
		$a\alpha$	$a\alpha^2 + b\alpha$	$a\alpha^3 + b\alpha^2 + c\alpha$
	a	$a\alpha + b$	$a\alpha^2 + b\alpha + c$	$a\alpha^3 + b\alpha^2 + c\alpha + d\ (= r)$
		$a\alpha$	$2a\alpha^2$	
	a	$2a\alpha + b$	$3a\alpha^2 + 2b\alpha + c\ (= q)$	
		$a\alpha$		
	a	$3a\alpha + b\ (= p)$		

ここで, $r = 0$ となるとき「実が開盡する」という. このとき, α は方程式の解である.『開方算式』ではこの α を実級定商と呼ぶ.

以上, 3 段の組み立て除法は

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = (x - \alpha)(a(x - \alpha)^2 + p(x - \alpha) + q) \tag{5}$$

と変形したことに該当する.

ここで, 右辺に含まれる $a(x - \alpha)^2 + p(x - \alpha) + q$ を (第一) 変式と呼ぶ. この変式に対して, 上と同様の計算を施す.

β	a	p	q
		$a\beta$	$a\beta^2 + p\beta$
	a	$a\beta + p$	$a\beta^2 + p\beta + q\ (= t)$
		$a\beta$	
	a	$2a\beta^2 + p\ (= s)$	

ここで, $t = 0$ となるとき「方が開盡する」という. このとき, β は変式を 0 とおいた方程式の解であり,『開方算式』ではこの β を方級定商と呼んでいる. 以上の計算は $x - \alpha = y$ とおくとき,

$$ay^2 + py + q = (y - \beta)(a(y - \beta) + r) \tag{6}$$

と変形したことに該当する. ここで $a(y - \beta) + r$ を第二変式と呼ぶ.

第二変式に対しても同様の計算をする.

γ	a	r
		$a\gamma$
	a	$a\gamma + r\ (= u)$

[14]実際には算盤上に算木を配置して計算をした. その様子については, たとえば [1], pp.11–16.

$u=0$ のとき「廉が開盡する」といい，『開方算式』では γ を廉級定商と呼ぶ．この計算は $y-\beta=z$ とおくとき，

$$az+r=(z-\gamma)a \tag{7}$$

と変形したことに該当する．

以上をまとめると，

$$\begin{aligned} ax^3+bx^2+cx+d &= (x-\alpha)(y-\beta)(z-\gamma) \\ &= (x-\alpha)(x-(\alpha+\beta))(y-(\beta+\gamma)) \\ &= (x-\alpha)(x-(\alpha+\beta))(x-(\alpha+\beta+\gamma)) \end{aligned} \tag{8}$$

となり，α, $\alpha+\beta$, $\alpha+\beta+\gamma$ が解となる．このように，組み立て除法を繰り返すのは，方程式の解を分離するための操作である．

関は方程式

$$6+11x+6x^2+x^3=0 \tag{9}$$

を実例として，

開出商	実盡	-1	-1	-2	-2	-3	-3
	方盡	-1	-2	-1	1	2	1
	廉盡	-1	1	2	-2	-1	1

と 6 種類の開出商数法の計算結果を示している．ここで，実盡，方盡，廉盡とはそれぞれ，実級定商 α，方級定商 β，廉級定商 γ のことであり，このいずれの組み合わせにおいても，α, $\alpha+\beta$, $\alpha+\beta+\gamma$ を作れば，全体として，解 -1, -2, -3 が得られる．

建部はここで商として未知量 x を用いて，この開出商数の法を実行する．たとえば，関数

$$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d \tag{10}$$

の場合，

x	a	b	c	d
		ax	ax^2+bx	ax^3+bx^2+cx
	a	$ax+b$	ax^2+bx+c	$ax^3+bx^2+cx+d\ (=f(x))$
		ax	$2ax^2$	
	a	$2ax+b$	$3ax^2+2bx+c\ (=f'(x))$	

となる．

このようにして得られた $f'(x)$ の係数に順に現れる数値列 3, 2, 1 が授時暦に関する問題の数値計算的解法において得られた経験則と合致することから，建部は組み立て除法の第 2 段目の剰余 (すなわち導関数) を用いればよいことに気づいた．すなわち，この部分の零点を求めれば，題意を満たす x が求まることを知ったのである．

ここで，建部の用語について述べておく．建部は $f'(x)$ に特に名称を与えていない．関の用語では，第一変式に組み立て除法を実行したときの剰余が 0 となるとき，「方が開盡する」というが，建部においては，「方ヲ開盡ス」という用語が，$f'(x)=0$ となることを示す用語

である．したがって『綴術算経』本文における「実級ノ極テ多キ者ハ方級ヲ開盡スヲ以テ限トス」[15]という部分が，(実に置かれるべき) 体積が最大になるのは導関数が 0 となるときであることを示している．なお，建部は $f'(x)$ に名称は与えていないが，$f'(x)$ の 1 次以上の項 (本問の場合 $3ax^2+2bx$) を「方級の極限」と呼んでいる．

さて，商として未知量そのものを用いて，開出商数の法を実行した点に建部による大きな革新があると同時に，その結果を数値計算に基づく経験則と比較観察するところに建部の数学の本質がある．建部においては，数値計算は数学的操作の根拠ともなる重要な要素であった．数学的操作の正当性が，理論的にではなく，数値計算とその観察を通じての帰納的推論に基づく経験則に求められたという点は特筆にあたいする．

数学的操作の正当化が理論的なものでなかったという点は，たとえば，導関数の零点が極大，極小，変極点のいずれを与えるかについて，建部が何も言及していないことからもわかる．さらに言えば，建部は極値が最大値，最小値を与えるかどうかについても言及していない．本問に対する建部の記述において，$f'(x)$ の零点が極大値，最大値を与えると暗黙の内に断定している点はわれわれを困惑させるのに十分である．もちろんこの零点が極大値，最大値を与えることは，実際にその前後の x の値に対して体積を計算してみれば，蓋然性は高まる．建部はあるいはそのような計算をしたのかも知れない．しかしいずれにせよ，建部がこの点に関して理論的な試みをしなかったことは確かである．建部が本問のような極値を求める問題に関して「数学的経験」を蓄積したという証拠はないが，仮にそのような経験を蓄積したとしても，極値の分類に関して理論的なアプローチを取ったとは限らない．むしろ，あくまでも数学的経験を経験則としてまとめた可能性の方が高いのである．

3　方程式の解法

建部による 2 次方程式の解法そのものは，極値問題とは直接の関係はないが，その方法には興味深いものがある．建部が述べている計算は，(1) 式の導関数

$$V'(x) = 56 + 2x - 3x^2 \tag{11}$$

の零点を求める計算である．この計算は算木の運用によって実行されるが，今それを要約すると，表 1 のようになる．　この結果 $4.666\cdots$ が得られる．ここで，小数以下の 0.6, 0.06, 0.006 は これらをそれぞれ 0.7, 0.07, 0.007 とすると，剰余が負となるから，解を左から近似する場合，$4.666\cdots$ は最良の近似であるが，以下すべての桁が 6 かどうかはわからない．そこで，$4.666\cdots \approx \dfrac{14}{3}$ であることに注目して，$t = 3x$ とおく．このとき $V'(x) = 0$ は $56 + \dfrac{2}{3}t - \dfrac{1}{3}t^2 = 0$ となる．この分母を払うと

$$3 \cdot 56 + 2t - t^2 = 0 \tag{12}$$

となる．このことを建部は，「こうして得られた闊[16]は，小数以下尽きないので，原式の定数項は 3 倍し，一次の係数は原式のまま，三次の係数は 3 で除して，これを解いて，14 を得る．

[15]22 丁ウ 5.
[16]広さ，ここでは $x = 4.666\cdots$ のこと．

4.	−3	2.	56.	$-3x^2+2x+56$
		−12.	−40.	
	−3	−10.	16.	$=(x-4)(-3x-10)+16$
		−12.		
0.6	−3	−22.	16.	$=(x-4)\{(x-4)(-3)-22\}+16$
				$=-3\alpha^2-22\alpha+16$, ただし $x-4=\alpha$
		−1.8	14.28	
	−3	−23.8	1.72	$=(\alpha-0.6)(-3\alpha-23.8)+1.72$
		−1.8		
0.06	−3	−25.6	1.72	$=(\alpha-0.6)\{-3(\alpha-0.6)-25.6\}+1.72$
				$=-3\beta^2-25.6\beta+1.72$, ただし $\alpha-0.6=\beta$
		−0.18	−1.5468	
	−3	−25.78	0.1732	$=(\beta-0.06)(-3\beta-25.78)+0.1732$
		−0.18		
0.006	−3	−25.96	0.1732	$=(\beta-0.06)\{-3(\beta-0.06)-25.96\}+0.1732$
				$=-3\gamma^2-25.96\gamma+0.1732$, ただし $\beta-0.06=\gamma$
		−0.018	−0.155868	
	−3	−25.978	0.017332	$=(\gamma-0.006)(-3\gamma-25.978)+0.017332$
		−0.018		
	−3	−25.996	0.017332	$=(\gamma-0.006)\{-3(\gamma-0.06)-25.996\}+0.017332$
				$=-3\delta^2-25.996\delta+0.017332$, ただし $\gamma-0.006=\delta$

表 1: 開平計算の要約 (その 1)

これを 3 で約して 4 尺 3 分の 2 を得る」と述べている[17]. ここでの係数の比較は (11) 式と (12) 式を比較すれば明らかである.

さて, これを改めて算木を用いて解くと $t=14$ となる. この部分の開平計算は表 2 に要約しておく. この結果から, $x=\frac{14}{3}=4\frac{2}{3}$ ($=4.666\cdots$) が得られる. こうして, 建部は最初に得られた $x=4.666\cdots$ において 6 が続くであろうという仮説を確認することができたのである.

ここで注目すべきことは, 二次方程式を解の公式によって解くのではなく, いったん近似値を求めておいて, その結果を見て未知数を適当に変換し, 改めてそれを解きなおしていることである.

4　『綴術算経』第六章探直堡求極積術の翻刻, 現代語訳と注釈

本節では,『綴術算経』第六章探直堡求極積術の翻刻を行い, 併せて現代語訳および注釈を付す. 翻刻においては以下の凡例に従う.

[17] 23 丁ウ 3.

10	-1	2	168	$-t^2+2t+168$
		-10	-80	
	-1	-8	88	$=(t-10)(-1t-88)+88$
		-10		
4	-1	-18	88	$=-\alpha^2-18\alpha+88$, ただし $t-10=\alpha$
		-4	-88	
	-1	-22	0	$=(\alpha-4)(-\alpha-22)+0$

表 2: 開平計算の要約 (その 2)

1. 旧字体は新字体に改めた.
2. 本字が通用していない場合は略字に改めた.
3. 本文中の丸括弧内は原文の割注を示す.
4. 本文中のかぎ括弧内は原文の訓読を示す.
5. ㇷ は事に, ㇳ はシテに改めた.

本文(22 丁オ 5)

探ル下直(チョク)堡求ル二極積ヲ一術ヲ上　第六

読み下し

直堡(ホ)ノ極積ヲ求ル術ヲ探ル　第六

訳

直方体の体積の極値を求める術を探る　第六章

注釈

第六章の表題である. 堡の字義は堤(つつみ), 土手. 直堡とは直方体のこと. 極は極値の極. 極積は直方体の体積の極大値のことであるが, 本章では最大値のことを指す.

本文(22 丁オ 6)

仮如有二直堡一長闊ノ差七尺闊高ノ和八尺欲レ使(シメント)二積ヲシテ至テ多カラ一問二長闊高及極積各幾何一○答曰闊四尺 (三分尺ノ之二) ○長一十一尺 (三分尺ノ之二) ○高三尺 (三分尺ノ之一) ○積一百八十一尺 (二十七分尺ノ之一十三)

読み下し

仮ニ直堡アリ, 長闊ノ差七尺, 闊高ノ和八尺. 積ヲシテ至テ多カラシメント欲ス. 長闊高及ビ極積各幾何ヲ問ウ. ○答テ曰ク, 闊四尺三分尺ノ二, ○長一十一尺三分尺ノ二, ○高三尺三分尺ノ一, ○積一百八十一尺二十七分尺ノ一十三.

訳

仮に直方体があって, 長辺と闊辺の差が 7 尺, 闊辺と高さの和が 8 尺である. その体積を最大にしたい. 長辺, 闊辺, 高さ, および最大の体積はそれぞれいくらかを問う. 答に言う. 闊辺 4 尺 3 分の 2, 長辺 11 尺 3 分の 2, 高さ 3 尺 3 分の 1, 体積 181 尺 27 分の 13.

注釈

闊の字義はひろい. 23 丁ウ 5 の割注に闊サとある. 狭がその対語であるが, ここでは長さと広さを対比して長闊と用いられている. 意識上は幅である. 以下, 辺の字はこれを略す.

本文(22 丁オ 10)

数ニ拠テ探ル事ヲ不レ為(セ)立元ノ法ヲ以テ直(タヽチ)ニ理ニ拠テ探ル者

訳

数値によって探索することはせずに, 立元の法をもって, 直ちに理によって探るものである.

注釈

立元の法とは, 天元の一 (未知量) を立てて, 一元高次方程式を得る方法のこと. 建部は, 朱世傑選の『算学啓蒙』でそれを学び,『算学啓蒙諺解大成』(1690 年) を著した. 建部は『綴術算経』第二章探立元法において, 立元の法を「索数ノ術ヲ得ルノ神法タリ」(8 丁オ 9) と述べている.

本文(22 丁ウ 2)

立二天元ノ一ヲ一為レ闊ト 0 1 加テレ差ヲ為レ長ト $\boxed{1\ 差\quad 1}$ 亦以テレ闊ヲ減シテレ和ヲ為レ高 $\boxed{1\ 和\quad -1}$ 長闊高相乗シテ為レ積

実	方	廉	隅
○	1 差和	1 和 −1 差	−1

訳

未知量 (x) を用意して闊とする. $(x=)\ 0+1\cdot x$. 差 (a) を加えて長 (y) とする. $1\cdot a+1\cdot x$ $(=y)$. また闊で和 (b) を減じて高さ (z) とする. $1\cdot b-1\cdot x\ (=z)$. 長闊高を乗じて体積 (V) とする. $(yxz=)\ 0+1\cdot abx+(1\cdot b-1\cdot a)x^2-1\cdot x^3\ (=V)$.

注釈

闊 (辺) を x, 長 (辺) を y, 高さを z, 直方体の体積を V とする. 問題は,

$$y-x=7(=a), \quad x+z=8(=b) \tag{13}$$

のとき,

$$V=xyz=x(a+x)(b-x)=0+abx+(b-a)x^2-x^3 \tag{14}$$

の最大値を求めることである. 本文はこの体積 V の計算をしたもの.

本文(22 丁ウ 5)

是(コレ)ヲ以テ元式トシテ其(ソノ)術意ヲ探(サグル)ニ若題中(モシダイチウ)ニ積数ヲ伝(イフ)トキハ積数ヲ以テ元式ト相消シテ積数即(スナハチ)実級ニ止(トヽマ)レリ其(ソノ)実級ノ極(キハメ)テ多(ヲホ)キ者ハ方級(ハウキフ)ヲ開尽(ヒラキツク)スヲ以テ限(ケン)トスルユヘ立(タツ)ル所ノ闊ヲ即商(スナハチシヤウ)トシテ元式ヲ用テ開出商数(シヤウスウ)ノ法ニ依テ方級ノ極限(キョクケン)ヲ求ルヲ以テ相消(セウ)スルノ度(ノリ)ヲ得ルナリ

訳

これを元式として, 題意を考えてみるに, もし問題中に体積の数値が与えられていれば, 体積を元式と等しいとおいて, その体積は定数項に置かれる. 定数項の値の最大値は, 1 次の項

を開き尽すのを以って限度とするから, 未知量として立てた闘を商として, 元式を用いて開出商数の方法により, 1 次の項の極限を求めることで, 等しいと置く式を得る.

注釈

開出商数の方法とは, いわゆる組み立て除法を用いた方程式の解法であり, 関孝和の『開方翻変之法』にある. 計算原理は次の通り.

一般に, n 次の多項式

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n \tag{15}$$

を $x - a$ で割ったときの商を

$$f_1(x) = b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + \cdots + b_{n-2}x + b_{n-1} \tag{16}$$

剰余を b_n とする. すなわち

$$f(x) = (x-a)f_1(x) + b_n. \tag{17}$$

ここで, この右辺を展開すると,

$$\begin{aligned} & (x-a)(b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + \cdots + b_{n-2}x + b_{n-1}) + b_n \\ = \; & b_0x^n + (b_1 - b_0a)x^{n-1} + (b_2 - b_1a)x^{n-2} + \cdots + (b_{n-1} - b_{n-2}a)x + (b_n - b_{n-1}a) \end{aligned} \tag{18}$$

となるから,

$$a_0 = b_0,\ a_1 = b_1 - b_0a,\ a_2 = b_2 - b_1a,\ \cdots,\ a_{n-1} = b_{n-1} - b_{n-2}a,\ a_n = b_n - b_{n-1}a. \tag{19}$$

よって,

$$b_0 = a_0,\ b_1 = a_1 + b_0a,\ b_2 = a_2 + b_1a,\ \cdots,\ b_{n-1} = a_{n-1} + b_{n-2}a,\ b_n = a_n + b_{n-1}a. \tag{20}$$

このように, $a_0,\ a_1,\ \cdots,\ a_n$ と a から $b_0,\ b_1,\ \cdots,\ b_{n-1},\ b_n$ を求める計算過程は, 次のように書かれる.

$$\begin{array}{c|cccccc} a & a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ & & b_0a & b_1a & \cdots & b_{n-2}a & b_{n-1}a \\ \hline & b_0 = a_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_{n-1} & b_n \end{array}$$

$b_n = 0$ となるように a を決めれば, a は $f(x) = 0$ の解である.

以下, 同様の計算を商に対して逐次実行するのであるが, ここでは 3 次方程式

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \tag{21}$$

を例として, 関による用語も付しながらその過程を示す. まず, 適当な商 α を立てて, 組み立て除法を 3 回繰り返す.

$$
\begin{array}{c|llll}
\alpha & a & b & c & d \\
 & & a\alpha & a\alpha^2+b\alpha & a\alpha^3+b\alpha^2+c\alpha \\
\hline
 & a & a\alpha+b & a\alpha^2+b\alpha+c & a\alpha^3+b\alpha^2+c\alpha+d\ (=r) \\
 & & a\alpha & 2a\alpha^2 & \\
\hline
 & a & 2a\alpha+b & 3a\alpha^2+2b\alpha+c\ (=q) & \\
 & & a\alpha & & \\
\hline
 & a & 3a\alpha+b\ (=p) & &
\end{array}
$$

ここで, $r=0$ となるとき「実が開盡する」という. このとき, α は方程式の解である.『開方算式』ではこの α を実級定商と呼ぶ.

以上, 3 段の組み立て除法は

$$ax^3+bx^2+cx+d=(x-\alpha)(a(x-\alpha)^2+p(x-\alpha)+q) \tag{22}$$

と変形したことに該当する.

ここで, 右辺に含まれる $a(x-\alpha)^2+p(x-\alpha)+q$ を (第一) 変式と呼ぶ. この変式に対して, 上と同様の計算を施す.

$$
\begin{array}{c|lll}
\beta & a & p & q \\
 & & a\beta & a\beta^2+p\beta \\
\hline
 & a & a\beta+p & a\beta^2+p\beta+q\ (=t) \\
 & & a\beta & \\
\hline
 & a & 2a\beta^2+p\ (=s) &
\end{array}
$$

ここで, $t=0$ となるとき「方が開盡する」という. このとき, β は変式を 0 とおいた方程式の解であり,『開方算式』ではこの β を方級定商と呼んでいる. 以上の計算は $x-\alpha=y$ とおくとき,

$$ay^2+py+q=(y-\beta)(a(y-\beta)+r) \tag{23}$$

と変形したことに該当する. ここで $a(y-\beta)+r$ を第二変式と呼ぶ.

第二変式に対しても同様の計算をする.

$$
\begin{array}{c|ll}
\gamma & a & r \\
 & & a\gamma \\
\hline
 & a & a\gamma+r\ (=u)
\end{array}
$$

$u=0$ のとき「廉が開盡する」といい,『開方算式』では γ を廉級定商と呼ぶ. この計算は $y-\beta=z$ とおくとき,

$$az+r=(z-\gamma)a \tag{24}$$

と変形したことに該当する.

以上をまとめると,

$$
\begin{aligned}
ax^3+bx^2+cx+d &= (x-\alpha)(y-\beta)(z-\gamma) \\
&= (x-\alpha)(x-(\alpha+\beta))(y-(\beta+\gamma)) \\
&= (x-\alpha)(x-(\alpha+\beta))(x-(\alpha+\beta+\gamma))
\end{aligned} \tag{25}
$$

となり, $\alpha, \alpha+\beta, \alpha+\beta+\gamma$ が解となる.

関は方程式

$$6+11x+6x^2+x^3=0 \tag{26}$$

を実例として,

開出商	実盡	-1	-1	-2	-2	-3	-3
	方盡	-1	-2	-1	1	2	1
	廉盡	-1	1	2	-2	-1	1

と 6 種類の開出商数法の計算結果を示している. ここで, 実盡, 方盡, 廉盡とはそれぞれ, 実級定商 α, 方級定商 β, 廉級定商 γ のことであり, このいずれの組み合わせにおいても, α, $\alpha+\beta, \alpha+\beta+\gamma$ を作れば, 全体として, 解 $-1, -2, -3$ が得られる.

さて, 本文で言及されている「開出商数の法」とは, 以上のような方程式の解を求める方法であるが, ここでは, その計算を導関数を求めるために用いている.

一般に, n 次の多項式 $f(x)$ に対して,

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-a)f_1(x)+r_1, \quad r_1=f(a) \\ f_1(x) &= (x-a)f_2(x)+r_2, \quad r_2=f_1(a) \\ &\vdots \\ f_{n-1}(x) &= (x-a)f_n(x)+r_n, \quad r_n=f_{n-1}(a) \end{aligned}$$

とするとき,

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \\ &= (x-a)\left\{\frac{f'(a)}{1!}+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^{n-1}\right\}+f(a) \end{aligned} \tag{27}$$

であるから,

$$f_1(x)=\frac{f'(a)}{1!}+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^{n-1}, \quad r_1=f(a) \tag{28}$$

である. また

$$f_1(x)=(x-a)\left\{\frac{f''(a)}{2!}+\frac{f'''(a)}{3!}(x-a)+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^{n-2}\right\}+\frac{f'(a)}{1!} \tag{29}$$

より,

$$f_2(x)=\frac{f''(a)}{2!}+\frac{f'''(a)}{3!}(x-a)+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^{n-2}, \quad r_2=\frac{f'(a)}{1!} \tag{30}$$

である. 以下同様にして,

$$r_{k+1}=\frac{f^{(k)}(a)}{k!} \quad (k=0,1,2,\cdots,n-1) \tag{31}$$

となる.

建部は商として未知量 x を用いて, この開出商数の法を実行する. たとえば, 関数

$$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d \tag{32}$$

の場合,

$$
\begin{array}{c|llll}
x & a & b & c & d \\
 & & ax & ax^2+bx & ax^3+bx^2+cx \\
\hline
 & a & ax+b & ax^2+bx+c & ax^3+bx^2+cx+d\ (=f(x)) \\
 & & ax & 2ax^2 & \\
\hline
 & a & 2ax+b & 3ax^2+2bx+c\ (=f'(x)) &
\end{array}
$$

関の用語では, 第一変式に組み立て除法を実行したときの剰余が 0 となるとき,「方が開盡する」というが, 本文で「方ヲ開盡ス」とは, $f'(x)=0$ となることを言う. したがって「実級ノ極テ多キ者ハ方級ヲ開盡スヲ以テ限トス」とは, (実に置かれるべき) 体積が最大になるのは導関数が 0 となるときであることを言うのである. なお,「方級ノ極限」とは, c に加えられる $3ax^2+2bx$ のことである.

以上の計算は次文で実行される.

本文(23 丁オ 2)

以テレ闊ヲ即チ為レ商ト 0 1 置二元隅級(負一ヲ)一乗シテレ商ヲ加二元廉級一為下開ク二廉級ヲ一変ノ数上ト(得レ負) $\boxed{\begin{array}{ll} 1\cdot\text{和} & -1 \\ -1\cdot\text{差} & \end{array}}$ 又乗シテレ商ヲ為下応ヘキレ開ク二方級ヲ一遍ノ数上ト(負) $\boxed{\begin{array}{ll} \bigcirc\ 1\cdot\text{和} & -1 \\ -1\cdot\text{差} & \end{array}}$ 亦置二元隅級ヲ一乗シテレ商ヲ加下開ク二廉級ヲ一変ノ数ニ上為下開ク二廉級ヲ二変ノ数上ト(負) $\boxed{\begin{array}{ll} 1\cdot\text{和} & -2 \\ -1\cdot\text{差} & \end{array}}$ 又乗シテレ商ヲ為下応ヘキレ開ク二方級ヲ二遍ノ数上ト(負) $\boxed{\begin{array}{ll} \bigcirc\ 1\cdot\text{和} & -2 \\ -1\cdot\text{差} & \end{array}}$ 加下応レ開ク二方級ヲ一遍ノ数ニ上為二方級ノ極限一ト(負数) $\boxed{\begin{array}{ll} \bigcirc\ 2\cdot\text{和} & -3 \\ -2\cdot\text{差} & \end{array}}$ 寄レ左ニ置二元方級一(正数) 与レ寄レ左ニ相消シテ(開出商ノ法ハ実級ニ至ル迄マデミナ皆同加異減ヲ用ユ故ニ是相消スルモ亦同加異減ヲ用テ相併スル之也) 得ルレ度

実	方	廉
1 差和	2 和 −2 差	−3

訳

闊を商とする. $(x=)\ 0+1\cdot x$. 元式の 3 次の係数 (-1) を置いて, 商を乗じて, 2 次の係数 $(b-a)$ に加えて,「2 次の係数を開くための一変の数」とする (負項とする) $(1\cdot b-1\cdot a)x-1\cdot x$. 又, 商 (x) を乗じて「1 次の係数を開くべき一遍の数」とする (負項). $0+(1\cdot b-1\cdot a)x-1\cdot x^2$. 亦, 元式の 3 次の係数 (-1) を置いて, 商 (x) を乗じて「2 次の係数を開く一変の数」に加えて,「2 次の係数を開く二変の数」とする (負項). $(1\cdot b-1\cdot a)-2\cdot x$. 又, 商 (x) を乗じて,「1 次の係数を開くべき二遍の数」とする (負項). $0+(1\cdot b-1\cdot a)x-2\cdot x^2$.「1 次の係数を開くべき一遍の数」に加えて, 1 次の係数の極限とする (負項). $(2\cdot b-2\cdot a)x-3\cdot x^2$. 左辺に寄せる. 元式の 1 次の係数 ($ab$, 正項) を置き, 左辺に寄せた式と相等しいとして式を得る. (開出商の法は, 実級に至るまで皆同符号の項は加え, 異符号の項は減じた. したがってここで相等しいとするのも, 同符号の項は加え, 異符号の項は減じて, 項をまとめる.) $1\cdot ab+(2\cdot b-2\cdot a)x-3\cdot x^2$.

注釈

$V(x)=-x^3+(b-a)x^2+abx$ に対して, 開出商の法の計算を 2 段まで実行し, $V'(x)$ を求める計算である. まとめて書けば次のようになる.

商	隅	廉	方	実
x	-1	$b-a$		
		$-x$	$(b-a)x-x^2$ (方級ヲ開クベキ一遍ノ数)	
	-1	$(b-a)-x$ (廉級ヲ開ク一変ノ数)		
		$-x$	$(b-a)x-2x^2$ (方級ヲ開クベキ二遍ノ数)	
	-1	$(b-a)-2x$ (廉級ヲ開ク二変ノ数)	$2(b-a)x-3x^2$ (方級ノ極限)	

以上の計算では, $V'(x)$ の計算に不要な実級部分の計算は省かれている. また, 方級部分は

$$\begin{array}{r} ab \\ (b-a)x-x^2 \\ \hline ab+(b-a)x-x^2 \\ (b-a)x-2x^2 \\ \hline ab+2(b-a)x-3x^2 \end{array}$$

という計算であるが, 本文はここから元式の ab を加える計算を省いたものである. これは, ab を正数, $2(b-a)x-3x^2$ を負数として, 等式 $-\{2(b-a)x-3x^2\}=ab$ を作り, $ab+2(b-a)x-3x^2=0$ を得るための常法である. 本文中に「負数」とあるのは, その項が負符号の項として, 等式の左辺の計算にかかわるものであることを示す. ここで負符号そのものは念頭にあるもので, 式の中には記述しないのである. たとえば, p, q が負数であるという場合, それは, p, q をまとめて $-(p+q)$ を左辺に置くことを意味するが, 本文に記述するときにはこの負符号自身を式中には書かない訳である. 一方,「正数」とあるのは, 正符号の項として右辺に置くことを意味する. たとえば今の場合, まとめられた「負数」$-(p+q)$ が左辺に置かれ, これを「正数」r によって相等しいとすることによって, $-(p+q)=r$, すなわち $r+(p+q)=0$ が得られる. 初めから, 負符号を付して左辺とすることを念頭に置いて計算過程を記述するので, この部分の記述はわかりにくいが, このような計算過程の記述形式は, 関, 建部に典型的なものである.

本文(23 丁ウ 1)

是題数ヲ以テ求(モトム)ヘシト雖(イヘトモ)本術ヲ為(ナサ)ン事ヲ欲シテ題辞ノ号ヲ書(シル)シテ其書式(ソノクワクシヨク)ヲ求ル也

訳

これは問題中の数値を用いて求めるべきものであるが, 本術を述べようと思うので, 問題文中の言葉を書いてその式を求める.

注釈

問題文中の数値 7, 8 を用いて書くと, 計算過程が不明になり, 術文が書けないので, 7, 8 のかわりに差と積という語を用いるというのである.

本文(23 丁ウ 3)

解題本術 置レ和ヲ以テレ差ヲ乗シテレ之ニ為レ実ト(正) 亦置レ和ヲ減二去シテ差一ヲ余倍シテレ之為レ方ト(正) 以テレ三為レ廉ト(負) 開平方ニ除レ之ヲ得レ闊ヲ加レ差ヲ得ルレ長ヲ以テレ闊減シテレ和ヲ得レ高ヲ長闊高各相乗シテ得レ積ヲ也

(所ノ㆑得ル闊サ尺下帯ル㆓不盡㆒故以テ㆓原式㆒実ハ三因シ方ハ依リ㆑旧ニ廉ハ三約シテ開平方ニ除㆑之得㆓一十四尺ヲ㆒三約シテ得㆓四尺三分尺ノ之二ヲ㆒)

読み下し

$\boxed{\text{解題本術}}$ 和ヲ置キ, 差ヲ以ッテ之ニ乗ジテ, 実ト為ス. 亦, 和ヲ置キ, 差ヲ減去シテ, 余リ之ヲ倍シテ, 方ト為ス. 三ヲ以ッテ廉ト為ス. 開平方ニ之ヲ除シテ, 闊ヲ得ル. 差ヲ加エテ, 長ヲ得ル. 闊ヲ以ッテ和ヲ減ジテ高ヲ得ル. 長闊高各相乗ジテ積ヲ得ル. (得ル所ノ闊サ尺, 下ニ不盡ヲ帯ビル故, 原式ヲ以ッテ実ハ三因シ, 方ハ旧ニ依リ, 廉ハ三約シテ, 開平方ニ之ヲ除シ, 一十四尺ヲ得ル. 三約シテ四尺三分ノ二ヲ得ル.)

訳

$\boxed{\text{問題を解くための本術}}$ 和を置いて, 差をこれに乗じて定数項 (正) とする. 亦, 和を置き, 差を減じて余りを二倍して一次の係数 (正) とする. 三を以って二次の係数とする (負). 開平方にこれを除して闊を得る. 差を加えて長を得る. 闊を以って和を減じて高を得る. 長闊高の三つを乗じて体積を得る. (こうして得られた闊は, 小数以下尽きないので, 原式の定数項は 3 倍し, 一次の係数は原式のまま, 三次の係数は 3 で除して, これを解いて, 14 を得る. これを 3 で約して 4 尺 3 分の 2 を得る.)

注釈

本文は, まず $V'(x) = ab + 2(b-a)x - 3x^2$ の各係数を述べたもの. ここで, $a = 7, b = 8$ であるから, 実際は

$$V'(x) = 56 + 2x - 3x^2 \tag{33}$$

である. $V'(x) = 0$ の解を α とすると, これが求める闊さであるから, 長さは $y = \alpha + 7$, 高さは $z = 8 - \alpha$, 体積は $V = \alpha(\alpha + 7)(8 - \alpha)$ となる.

さて, $V'(x) = 0$ を解くと, $x = 4.666\cdots$ となる. この計算は算木の運用によって実行されるが, 今それを要約すると, 表 3 (16 ページ) のようになる. ここで, 小数以下の 0.6, 0.06, 0.006 は これらをそれぞれ 0.7, 0.07, 0.007 とすると, 剰余が負となるから, 解を左から近似する場合, $4.666\cdots$ は最良の近似であるが, 以下すべての桁が 6 かどうかはわからない. そこで, $4.666\cdots \approx \dfrac{14}{3}$ であることに注目して, $t = 3x$ とおく. このとき $V'(x) = 0$ は $56 + \dfrac{2}{3}t - \dfrac{1}{3}t^2 = 0$ となる. この分母を払うと

$$3 \cdot 56 + 2t - t^2 = 0 \tag{34}$$

となるが, これを元の方程式 (33) と比べると, 定数項 3 倍, 一次の係数はそのまま, 2 次の係数は 3 で割っていることがわかる. これを改めて算木を用いて解くと $t = 14$ となる. この部分の開平計算は表 4 (17 ページ) に要約しておく. この結果から, $x = \dfrac{14}{3} = 4\dfrac{2}{3}$ ($= 4.666\cdots$) が得られる.

本文最後の割注は以上のことを述べたものである.

ここで注目すべきことは, 二次方程式を解の公式によって解くのではなく, いったん近似値を求めておいて, その結果を見て未知数を適当に変換し, 改めてそれを解きなおしていることである.

4.	−3	2.	56.	$-3x^2+2x+56$
		−12.	−40.	
	−3	−10.	16.	$=(x-4)(-3x-10)+16$
		−12.		
0.6	−3	−22.	16.	$=(x-4)\{(x-4)(-3)-22\}+16$
				$=-3\alpha^2-22\alpha+16$, ただし $x-4=\alpha$
		−1.8	14.28	
	−3	−23.8	1.72	$=(\alpha-0.6)(-3\alpha-23.8)+1.72$
		−1.8		
0.06	−3	−25.6	1.72	$=(\alpha-0.6)\{-3(\alpha-0.6)-25.6\}+1.72$
				$=-3\beta^2-25.6\beta+1.72$, ただし $\alpha-0.6=\beta$
		−0.18	−1.5468	
	−3	−25.78	0.1732	$=(\beta-0.06)(-3\beta-25.78)+0.1732$
		−0.18		
0.006	−3	−25.96	0.1732	$=(\beta-0.06)\{-3(\beta-0.06)-25.96\}+0.1732$
				$=-3\gamma^2-25.96\gamma+0.1732$, ただし $\beta-0.06=\gamma$
		−0.018	−0.155868	
	−3	−25.978	0.017332	$=(\gamma-0.006)(-3\gamma-25.978)+0.017332$
		−0.018		
	−3	−25.996	0.017332	$=(\gamma-0.006)\{-3(\gamma-0.06)-25.996\}+0.017332$
				$=-3\delta^2-25.996\delta+0.017332$, ただし $\gamma-0.006=\delta$

表 3: 開平計算の要約 1

本文(23 丁ウ 7)

右直堡ノ術ハ理ニ拠テ術ヲ探ル者是(モノカク)ノ如ク(コト)也本術ノ儘(マヽ)ニ其理(ソノリ)ヲ索(モト)ムルトキハ伏(カク)レテ顕(アラハル)ル処(トコロナシ)無ト雖(イヘトモ)本是レ立元ノ法ヲ以テ理ヲ察シテ立(タツ)ル所ナルユヘ理ニ拠テ術ヲ探ル者トセリ凡(ヲヨソ)法術ハ数(カス)ニ拠テ立(タツ)ルノミニ非(アラ)ス理ニ拠テ立ル者ト雖(イヘトモ)法術ノ儘(マヽ)ニ其(ソノ)理ヲ索(モトム)ルトキハ伏(カク)レテ顕(アラハ)レサル事アリ如(キ)レ此(ノ)ハ強(シ井)テ其(ソノ)理ヲ察スル事ヲ不(セ)レ為理ヲ法術ニ委(ユタ)子テ唯其(タヽソノ)法術ノ儘(マヽ)ニ従(シタカ)ヒ用ルヲ以テ数(カス)ノ道(ミチ)ニ循(シタカフ)トス

訳

この直方体に関する術は, 理によって術を探るとはこのようである, ということを示すものである. 本術のままでは, その理を探っても隠れて明らかなところはないが, これは立元の法によって, 理を察して立てたものであるから, 理によって術を探ったものとした. およそ法術というのは, 数によって立てるものだけではない. しかし, 理によって立てるものと言っても法術そのままでは, その理を探っても隠れて現れない事がある. このような場合は, 強いてその理を探ることをせず, 理は法術に委ねて, ただその法術それ自身にしたがって, これを用いて, 数の道にしたがうとする.

$$
\begin{array}{r|rrrl}
10 & -1 & 2 & 168 & -t^2+2t+168 \\
 & & -10 & -80 & \\
\cline{2-4}
 & -1 & -8 & 88 & =(t-10)(-1t-88)+88 \\
 & & -10 & & \\
\cline{2-4}
4 & -1 & -18 & 88 & =-\alpha^2-18\alpha+88,\ \text{ただし}\ t-10=\alpha \\
 & & -4 & -88 & \\
\cline{2-4}
 & -1 & -22 & 0 & =(\alpha-4)(-\alpha-22)+0
\end{array}
$$

表 4: 開平計算の要約 2

注釈

本文は数値計算によって術を得たのではなく, 立元の法を用いて術を得たのであるから, 理によって術を探ったと言える. しかし, 前段の本術そのものを読んでも, 術の術たる理は不明である. しかしそのような場合, 強いて理を理解しようとせず, 理は術に内在するものとしておいて, 術そのものを適用し解の数値を計算するものとする.

建部は, 数の世界 (道) と理の世界を区別している. 数の世界とは, 数値計算とその観察を通じて術を構成する世界であり, 問題中に与えられた数値を用いて解答し, 数値解を得る局面もこの世界に属する. 一方, 理の世界とは, そのような数値計算をせずに, 立元の法などにより術を構成する世界である. ここで理の世界とは, われわれのいう「理論体系」とは必ずしも一致するものではない. 本問の場合, いわゆる導関数の零点を計算すればよいとして, 組み立て除法による導関数の計算過程を詳述しているが, その正当性を理論的に確立するというような観点はないのである. 次段に見るように, その正当性は, おそらく数値計算とその観察によって得られたものであり, 経験的なものであった. これで正当性が十分保証されるとした点が建部の数学の大きな特徴であり, 今日のわれわれには理解し難い点でもある.

さて, 術を得るには理によるものと数によるものがあるが, 一旦得られた術からはその区別は不明である. 理によって得られた術だからといって, その痕跡は術に残らないのである. ここで建部は, 「強いて理を理解しようとせず, 理は術に内在するものとしておいて, 術そのものを適用し解の数値を計算するものとする」と言う. すなわち, いったん術が得られたからには, もはやそこから「理を探る」という後退は不要であり, 数値解を得るという次段階へ前進すればよいというのである. 具体的な解を求めるには, 術に実際の数値を代入して計算することが必要であり, 理の理解はこの段階ではもはや不要である. 理はあくまでも術を求める方法論であり, それによって具体的な解が得られる訳ではない. 理はそれ自身が目的ではないのである.

しかしながら, 建部自身も含めて, 術文を読む者が, その術文そのものの正当性を確認しようとするならば, それが数によるべきか理によるべきかはともかく, その関心は, 結果としての数値のみならず, 術文そのものでもあったはずである. このことは一見すると, 本文最後の「強いてその理を探ることをせず, 理は法術に委ねて, ただその法術それ自身にしたがって, これを用いて, 数の道にしたがうとする」という一文に自己撞着している. しかし, ここで建部が言わんとしていることは, 術の正当性を無視せよということはなく, 理によって得られた術に理の痕跡が見えなくとも, それでよいのだ, ということである.

本文(24 丁オ 6)

曩(サキ)ニ或(アルヒト)授時暦月離遅疾(リチシツ)ノ差ヲ求ルニ立平定ノ三差ヲ用ル者其(ソノ)損益ノ極限ノ数ヲ求ル術ヲ問(トフ)事有(アリ)吾理ヲ察(サツ)スル事ヲ不レ為(セ)即(スナハチ)類数(ルイスウ)ヲ砕(クダキ)テ乍(タチマチ)ニ実一方二廉三ノ数ノ処(ヨリトコロ)ヲ探リ得テ其(ソノ)術ヲ会セリ (其探数畧之) 爾(シカ)シヨリ後(ノチ)又題辞(タイシ)ヲ変(ヘン)シ造(ツクリ)テ此(コノ)直堡極積ヲ問(トフ)ニ至(イタリ)テ其同題(ソノトウタイ)タル事ヲ不レ意(オモハ)即(スナハチ)立元ノ法ニ依テ其(ソノ)理ヲ察シテ忽(タチマチ)ニ其術ヲ探リ得タリ是(コレ)理ニ拠ルト数ニ拠ルト其時(ソノトキ)ニ臨(ノソ)ミ題ニ応シテ意(コヽロ)ニ肯(カヘン)スルヲ以テ用ル者也以テレ是ヲ当(マサニ)ヘシレ知(シル)数ニ拠テ探ル者ト理ニ拠テ探ル者ト各(ヲノヲノ)其事(ソノコト)ヲ異(コト)ニスト雖(イヘトモ)会シ得ル事ハ本是レ同一ナル事ヲ

訳

往時, ある人が, 授時暦の月離遅疾の差を求めるのに, 立差, 平差, 定差の三差を用いているが, その損益の極限を求める術を問うことがあった. 私は理を察することはせず, 数値を細かく計算, 分析して, 直ちに, 定数項に 1, 一次の係数に 2, 二次の係数に 3 が現れることを探り得て, その術を理解した (その数値を探る部分はこれを略す). これより後, 又, 問題文をつくり変えて, この直方体の体積の極値を問うこととなったが, これらが同種の問題であるとは思わなかった. ここでは, 立元の法によってその理を察して, たちまちその術を探り得た. このように, 理に拠るか, 数に拠るかは, 時に臨んで, また問題に応じて, 意に叶うものを用いるものである. このことから, 数に拠って探るものと, 理に拠って探るものとは, それぞれ方法を異にするが, 理解し得る事柄は同一であることを知るべきである.

注釈

曩の同訓は往. 授時暦は王恂や郭守敬らによって編纂された暦で, 元朝の至元 17 年 (1280 年) に完成し, 翌年より使用された. 太陽の盈宿 (太陽の不等運動) や月行遅疾 (月の不等運動) を, 平立定三差術と呼ばれる高次の補完法によって計算した点に大きな特徴がある. 授時暦では, 天体の視運動の不等の大きさを $f(x) = ax + bx^2 + cx^3$, d, a, b, c は定数, x は時刻に該当する変数, で表わした. ここで a を定差, b を平差, c を立差と呼ぶ. x が $1, 2, 3, \cdots$ と増加するに従って, a は $a, 2a, 3a$ と増加し, b は $b, 4b, 9b$ と増加し, c は $c, 8c, 27c$ と増加する. このことより, a, b, c おそれぞれ定差, 平差, 立差と呼んだ. 実際の計算は階差の計算であるから, 差という.

建部が実際に計算した式は,

$$f(x) = -11110000x + 28100x^2 + 325x^3 \tag{35}$$

であった. 詳細な計算過程は不明であるが, 建部は数値計算によって,

$$f'(x) = 1 \cdot (-11110000) + 2 \cdot 28100x + 3 \cdot 325x^2 \tag{36}$$

の零点が $f(x)$ 極値を与えることを知ったのである.

建部は, 数の世界から導出された (数値計算に基づく) 経験則と, 理の世界における方法としての組み立て除法の比較観察を通じて, 組み立て除法の第 2 段目の剰余 (すなわち導関数) を用いればよいことに気づいた. 前文の注釈にも述べたように, このような経験は建部にとっての証明でもあった.

文献

[1] 小川束『関孝和「発微算法」——現代語訳と解説——』(大空社, 1994 年).

[2] ——「円理の萌芽——建部賢弘の円周率計算」(『数理解析研究所講究録』1019, 1997 年), pp.77–97.

[3] ——「建部賢弘の『綴術算経』立元第二について」(『四日市大学環境情報論集』第 2 巻第 2 号, 印刷中).

[4] 三枝博音編纂『日本哲学全書第八巻第二部自然哲学天文・物理学家の自然観』(第一書房, 1936 年)

[5] 銭宝琮編, 川原秀城訳『中国数学史』(みすず書房, 1990 年).

[6] 藤原松三郎『明治前日本数学史新訂版』第二巻, 日本学士院日本科学史刊行会編, 野間科学医学研究資料館, 1979 年 (初版は 1956 年)

[7] 村田全「建部賢弘の数学とその思想」(『数学セミナー』, 日本評論社, 1982 年 8 月号, pp.70–75, 9 月号, pp.69–75, 10 月号, pp.62–67, 11 月号, pp.63–69, 12 月号, pp.60–64, 1983 年 1 月号, pp.76–81).