数理解析研究所講究録
1064巻 1998年 25-40

カルダノの確率研究について

安藤　洋美(Hiromi Andoh)

桃山学院大学 経済学部

（1）

ジロラモ•カルダノ（Girolamo Cardano;1501.9.26－1576.9.20)は3次方程式の解の公式を巡って、タルタニアによる解を剽窃したと誤解され、悪徳者扱いされている。しかし、『大技術（Artis Magnae,sive de Regulis Algebricis)』の第一章には、3次方程式の解法の経過を正直に述べており、解の公式を独り占めしたわけではない。1980年カルダノの自伝『我が人生の書（De propria vita liber)』が2組の訳者によって相次いで翻訳出版された。1500年以降にカルダノは生まれているから、中世の人ではなく、ルネサンスの息吹を体得した。ルネサンスはあらゆる面で人間の可能性が追求され、善悪の両方で今では考えられない驚くべき極端な表現がなされた時代である。カルダノの自伝は、ヨーロッパでは同時代の彫金家であり殺人請負人でもあった チェリーニ（Benvenuto Cellini;1500－1571）の自伝と並び称されるものである。チェリーニの自伝が数奇なロマンスをちりばめた小説風のものであるのに反して、カルダノの自伝はいかにも自然科学者らしく、客観的で分析的で、生涯を語るのに各項目別に、あたかも診断書のように人生の決算書としての性格をもたせたものである。項目の中には「守護霊」というような神秘的なものも含まれているが、これは中世からそれ程日が経っていないから、仕方がない。しかし「自分に不足するもの」とか「年令による変化」といった類いの項目もあり、また「私に関する著名人たちの証言」も採録して、ともすれば自伝が成功物語りや自慢話に堕するのを防ぐ意味で、公正を期している。そして彼は内科医•数学者•評論家•発明家•賭博者•占星術者など多方面にわたって才能をふるった人、

過剰の平衡（balance of excess）

を保った人として、後世の人々は彼を典型的なルネサンス人とみなしたことは確かなように思われる。

（2）

カルダノ自伝によると、賭事について彼は2巻の本を書いたとのべている。しかし、『カルダノ全集』第一巻に『偶然ゲーム（サイコロ遊び）について(De Ludo Aleae)』が採録されているだけである。これは世界で発見されている確率論の最初の成書であったが、1663年に『カルダノ全集』が出版されるまで世間で読まれる

ことはなかったが、書かれた内容からみて16世紀の書物であることは明らかである。この本を検討するとカルダノは極めて現代的な確率概念と、具体的な問題をもっていたことが分かる。

16世紀から1654年まで、今日確率論の起源の問題とされるのは

賭事で60点勝負のゲームがある。1回のゲームで勝つと10点獲得する。ある事情で勝負が完了しないで、一人のプレイヤーが50点，他のプレイヤーが30点取ったところでゲームを中止すると、賭金1デュカはどう分配するか？

という パチョーリ の問題(1494年)である。この問題は『算術•幾何•比および比例大全』に出ている。ゲームは少なくとも6回、最大限11回行われる。パチョーリは5/11：3/11＝5：3 とした。

タルタニア は1556年に出版した『一般数量論』のなかで、分配は2人の得点差を考慮すること；S点勝負のゲームでプレイヤーがそれぞれp,q点を取った時にゲームをやめると、分配は

$$1+(p-q)/S : 1-(p-q)/S = S+p-q : S-p+q$$

と、タルタニアは考えた。しかし、いずれにしても分配は訴訟の対象となるだろうから、裁判に負けない理屈を考えるべきで、数学の問題ではないと述べている。

ピサの牧師 ホレスタニ (Lorentz Forestani)は『算術,幾何の実際』(1603年)という本の中で、パチョーリの配分の残りの半分が両方に分配すべきであるとした。パチョーリの配分の残りは

$$1-\frac{p}{2S-1}-\frac{q}{2S-1}=\frac{2S-1-p-q}{(2S-1)}$$

となる。この半分をそれぞれは自分の得点による配分に加えてそれで配分は

$$\frac{2S-1-p-q}{2(2S-1)}+\frac{p}{2S-1} : \frac{2S-1-p-q}{2(2S-1)}+\frac{q}{2S-1}$$

$$=2S-1+p-q : 2S-1-p+q$$

であるとした。これはタルタニアの配分法のSを2S－1に代えたものである。

このような配分の考え方に対して、全く別の考え方を提起したのがカルダノである。彼は『実用算術書(Libri Practica Arithmeticae)』(1539年)の68章「ルカ兄の誤りについて」[これは『カルダノ全集』第4巻,214頁に出ている]で、分配規則が(S, p, q)に従属するのではなく、$a=S-p$, $b=S-q$に従属することに気づいた。p点取った人は、もしもそのままゲームを続行するとすれば決着がつくまで、1,2,•••,b回ゲームをする可能性がある。1ゲームごとに1クラウン賭けるとすれば、彼は$1+2+3+\cdots+b=b(b+1)/2$ クラウンを賭ける可能性がある。同様に他のプレイヤーは$1+2+3+\cdots+a=a(a+1)/2$ クラウンを賭ける可能性

性がある。それで賭金の配分は

$b(b+1):a(a+1)=(S-q)(S-q+1):(S-p)(S-p+1)$

とすべきだというのである。しかしカルダノの推理は随分曖昧で、分かりにくいものである。

1558年に ペヴェローネ (Giovanni F. Peverone;1509－1559)は『算術•幾何要論(Due Brevi e Facile Trattati, il Primo d'Arithmetica, l'Altro di Geometria)』のなかで、カルダノと同じことを述べている。

この時代の人はいずれも問題を一般化して考えず、特殊な例から帰納的に結論を出している。したがって

パチョーリは5：3, タルタニアは2：1, ホレスタニは13:9と答を出した。一方カルダノらは6：1と出した。パスカルたちが1654年に到達した正しい答は7：1である。

またタルタニアが反例としてあげた6点勝負で、一人が1回だけ勝ったときにゲームを中止するとすれば、賭金の配分はパチョーリは1：0, タルタニアは7：5, ホレスタニは6：5になる。一方カルダノの方法によれば7：5となり、タルタニアの答とたまたま一致する。正しい答は319：193≒1.6：1だから、カルダノが比較的近い値に達していることが分かる。

（3）

しかしカルダノは上述の **点の問題** から確率論を発展させようとはしなかった。彼は点の問題が提起している抽象的なゲームではなく、具体的なゲームをもって新しい科学を作ろうとした。それはかなりの時間をかけて、何回も修正されて、作り上げられたものと思われる。そして多数の原稿が書かれたが、結局現存するのは一冊だけである。『偶然ゲームのついて』は生前出版される事なく、1663年出版の全集の第一巻の中に収録された。数学に関するものが第四巻にまとめられているので、この本が数学史の中で久しく取り上げられなかったのは、そのためである。この本は全部で32章からなる。そのうち

9, 11, 12, 13, 14, 15, 31, 32の８つの章が **サイコロ•ゲーム** ,

16, 18, 19の３つの章が **カード•ゲーム** ,

残りの章は **賭博の道徳的•哲学的•社会学的考察**

に割かれている。

（4）

サイコロ•ゲームに関しては、カルダノは2通りの原理を使っている。一つはオアが **平均結果についての推理** と呼ぶ原理;つまり試行回数をn, ある結果の出る確率をpとすると、当該結果はn回中np回出るという原理である。他の一つは標本

空間の要素を数え上げるという原理である。これらの原理を使って解こうとした問題は次のものである。

第９章「１個のサイコロ投げについて」では

１個のサイコロを投げて、少なくとも１回１の目の出る確率を 1/2にしたい。何回投げたらよいか。

第11章「２個のサイコロ投げについて」では

２個のサイコロを投げて、少なくとも１回１のゾロ目（1,1)が出る確率を1/2にしたい。サイコロを何回投げればよいか。また少なくとも１回，１と２の目が出る場合は、サイコロを何回投げればよいか。

第12章「３個のサイコロ投げについて」では

３個のサイコロを投げて、少なくとも１回（1,1,1)の目が出る確率を1/2にしたい。サイコロを何回投げればよいか。また少なくとも１回１の目と２のゾロ目が出る場合、サイコロを何回投げればよいか。さらに少なくとも１回３個とも異なる目が出る場合は、サイコロを何回投げたらよいか。

という問題である。これらを解くにあたり、

第11章では、2個のサイコロ投げで、ゾロ目は6通り、異なる目は30通り、併せて36通りの目の出方があること；

第12章では、3個のサイコロ投げで、同じ目は6通り；2個が同じで残る1個が異なる目の出方は3×30＝90通り；3個とも異なる目の出方は6×20＝120通り；併せて216通りの目の出方があること；

は正しく求められている。カルダノは標本空間の大きさ＝cをcircuitus(circuit),その半分をaequaritas(equality)と呼んでいる。従って

1個のサイコロでは c＝ 6,

2個のサイコロでは c＝ 36,

3個のサイコロでは c＝216,

となる。ここまではカルダノは正しいが、上記の問題を解くのに、第9章では

「６回投げれば各々の目が一度は現れる筈である。だから、ある所与の目が３回の投げのなかで出現する可能性は半々である」

と述べ、平均結果の推理で$np=1/2$, $p=1/6$ ならば、$n=3$ となることを述べている。第11章では1のゾロ目が少なくとも1回出るには$np=1/2$, $p=1/36$だから、$n=18$であること；「18回の投げで1のゾロ目が出現するかしないかは可能性として偶然起こる」とカルダノは述べる。(1,2)の目には$np=1/2$, $p=2/36$, よって$n=9$となること；「1と2の目に対しては9回投げるとaequaritasになること」を述べている。第12章では少なくとも1回(1,1,1)の目が出るには$n=108$と求めている。正しい答

はそれぞれ

$$1-(5/6)^n=1/2,$$
$$1-(35/36)^n=1/2, \qquad 1-(17/18)^n=1/2$$
$$1-(215/216)^n=1/2,$$

を解いて、$n=4,\ 25,\ 13,\ 150$を得る。カルダノの名付けたaequaritasは標本空間の大きさの半分であるが、同時に少なくとも1回所与の目が出る確率がそうでない確率と相等しくなる投げの回数と誤認したものに等しくなったので、この数をaequaritasと名付けたのであろうか。カルダノの本を読みにくくしている原因は、少なくとも という論理的な言葉が全く使われていないこと、さらにaequari-asのように circuitus/2 の意味や、 等しいこと の意味や、 1/2 の意味に多用されていることである。

これらの問題は1654年パスカルがシュヴァリエ・ド・メレの依頼を受けて取り組んだ問題でもあった。カルダノがド・メレの問題を論じていたという指摘は、オア(Ore)やハルト(Hald)もしていない。シャイニン(O.B.Sheynin)はカルダノが大数法則

$$\lim_{n\to\infty} \Pr\{|\mu/n-p|<\varepsilon\}=1$$

を朧げながら理解していたと指摘していること、それに対しオアは、それは言い過ぎで、平均結果についての推理と呼び、これを使用した結論はすべて間違っていると述べている。しかし第11章で、カルダノは

「少なくとも1個のサイコロが1の目を出す投げの数は、36通りのうち11通りあり、aequaritasの半分よりやや大きい。そして2個のサイコロを2回投げて、毎回少なくとも1個1の目が出る方法の数は、aequaritasの1/6より大きく、1/4より小さい」

と述べている。この部分はaequaritasを1/2と解釈すると

$$\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}>\left(\frac{11}{36}\right)^2>\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}$$

を意味するのか、それともcircuitus$=36\times36$, その半分をaequaritasとすると

$$\frac{1}{4}\times\frac{36\times36}{2}>11\times11>\frac{1}{6}\times\frac{36\times36}{2}$$

を意味するのか、不明であるが、いずれにしても結果は正しい。

このように正しい推理をしている部分は組合せの計算を必要とする部分である。第11章で、カルダノは

「この知識は推測に基づく近似値に過ぎない。そして計算は細部にわたっては確かでない。しかも多くの場合、事態は推測したものから、かなりずれることがある」

と述べて、自分でも間違いを十分認識していた。

この章ではさらに

「２個のサイコロを３回投げるとき、毎回１の目が少なくとも１個出る確率」

や

「２個のサイコロを３回投げ、そのうち少なくとも２回、１の目が少なくとも１個出る確率」

を求めようとしたが、カルダノは失敗している。

（５）

『偶然ゲームについて』の第13章は「２個または３個のサイコロ投げに対する６点までと、６点以上の数の構成について」と題されている。得点（Sortis)と称するゲームは出た目の和により競うゲームである。

２個のサイコロ投げの場合、

得点	場合の数
2,　12	1
3,　11	2
4,　10	3
5,　9	4
6,　8	5
7	6

計 36

３個のサイコロ投げの場合、

得点	場合の数
3,　18	1
4,　17	3
5,　16	6
6,　15	10
7,　14	15
8,　13	21
9,　12	25
10,　11	27

計 108＝aequaritas

と正しく場合の数が列挙されている[一部に誤植があるが]。３個のサイコロの場合、有名なのは ガリレイ が『サイコロ・ゲームについての考察(Considerazione sopra il Giuco dei Dudi)』で、9の目と10の目の出る組合せはともに６通りなのに、経験によれば9の目より10の目の方がよく出るのはなぜかと、トスカナ大公から尋ねられたことに答えている論文がある。これはいつ書かれたか不明だが、ガリレイがフィレンツェに移ってからのことと思われるので、1610年以降である。その点で、カルダノの方がはるかに古い。

次にカルダノは フリチルルス（fritillus)というゲームの得点と場合の数を示している。

得点	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
場合の数	108	111	115	125	126	133	33	36	37	36	38	26

このゲームがいかなるゲームか全く不明である。フリチルルスについてカルダノ

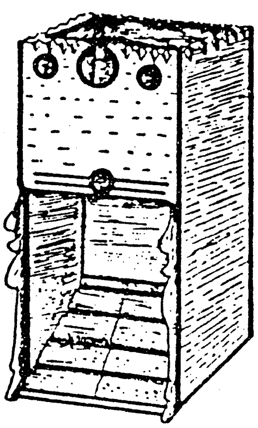
は第7章「吊るされたフリチルルスといかさまサイコロ」と第30章「古代の偶然ゲームについて」で説明している。第30章では

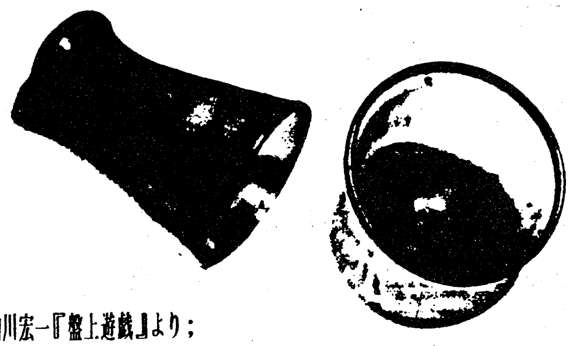
「古代人はtesseraと称する偶然ゲームをやった••••tesseraを他国の人は立方体(cubus)とも呼び、6面をもち、数と頭数の点が刻まれていた。ローマ時代には、サトウルナーリアの期間を除くと、それは禁止された。マルティアリスによると、奴隷たちは造営官を恐れる事なく、フリチルルスを振った。というのは彼らはすぐ手近の池が凍結するのを見たからである。••••tesseraの不正な投げを防止するため、彼らはorcaというものを考案した••••それは小魚をむさぼり食うシャチのように、tesseraをむさぼり食うように思われた••••ホラチィウスはorcaをキリシャ語でプルゴス(π υ ρ γ ο s)と呼び、プルゴスの中にタリ[羊の踝の骨;骨髀]を入れよと言っている••••フリチルルスはプルゴスではなく、ゲーム盤のことである••••tesseraのゲームは3個を超えることはなく、一方taliは4個をもって演じられる。」

と説明している。第7章では

「真ん中に丸い賭博用テーブルをおこう。それが相手の方に傾いていたら、フリチルルスも相手の方に傾くだろう。そうなれば自分に不利である」

と述べている。フリチルルスとはこれらの記述から





左，増川宏一『盤上遊戯』より；
右，ライデン自然歴史博物館

のような賭博道具をさすもので、ゲームの名称ではないらしい。しかし第13章ではゲームの名称として登場する。トドハンターはこのゲームの内容を把握できなかった。オアはフリチルルスを３人ゲームと解釈したが、これは少し無理がある。３個のサイコロを投げ終わったプレイヤーは出た目の結果により、次の規則のいずれかを選択して得点とする。

(1) 3個のサイコロの目の和は投げた者の得点になる。

(2a)2個のサイコロが同じ目(doublet)を出し、残りが別の目であるとき、例えば(3,3,4)のとき3＋4＝7は投げた者の得点とする。

(2b)2個のサイコロが同じ目を出し、残りが6であるとき、例えば(4,4,6)のとき

4＋4＝8は投げた者の得点になる。

（3）3個のサイコロの投げの結果、ある目が少なくとも1つ出れば、その目を得点とする。（この場合、少なくとも1つ特定の目が出る可能性は $6^3-5^3=91$通りだが、カルダノは平均結果についての推理で$n\times 1/216=1/2$より、$n=108$とした。）

（例1）12点の場合、（1）より25通り。（2b）より（6,6,6）の1通り。計26通り。

（例2）9点の場合、（1）より25通り。（2a）より（5,4,4），（5,5,4），（6,6,3），（6,3,3）各々3通り。それで25＋4×3＝37通り。

（例3）7点の場合、（1）より15通り。（2a）より（4,4,3），（5,2,2），（6,1,1），（4,4,3），（5,5,2）各々3通り。それで15＋6×3＝33通り。

（例4）6点の場合、（1）より10通り。（2a）より（5,1,1），（5,5,1），（4,2,2），（4,4,2）各々3通り。（2b）より（6,3,3）3通り。（3）より108通りとして、10＋4×3＋108＝133。

（例5）3点の場合、（1）より1通り。（2a）より（2,2,1），（2,1,1）各々3通り。（3）より108通りとして、1＋2×3＋108＝115。

（例6）2点の場合、（2b）の規則で（6,1,1）1通り。（3）より108、つまり1×3＋108 111。

しかしこのような複雑な規則のゲームで、素早く判断できたのだろうかという疑問は残る。

（6）

第14章は「組合せられた得点について」と題する。ここでは2個と3個のサイコロ投げで

「少なくとも1個1の目の出る場合の数；1の目が出ず、少なくとも1個2の目が出る場合の数；1と2の目が出ず、少なくとも1個3の目が出る場合の数；等々」

が正しく求められている。彼はこれらを

11		91	
9	20	61	30
7	27	37	24
5	32	19	18
3	35	7	12
1	36	1	6
		216	

と表示している。ここでカルダノは、あるゲームにおいて同等に可能な場合の数をt、そのうち好都合な場合の数をrとすると、好都合な見込み（勝ち目，odds）は

$r/(t-r)$であることを出している。ただ **見込み(勝ち目)** という言葉は後世の人の造語で、カルダノ自身は使っていない。もしも$p=r/t$とおくならば、勝ち目は$p/(1-p)$で表現される。カルダノは

「1つの1の目に対して好都合な場合の数は全circuitusの半分に等しくなく、比にして91:125; 大体18 : 25である。これは3 : 4より小さい」

と言っている。今なら

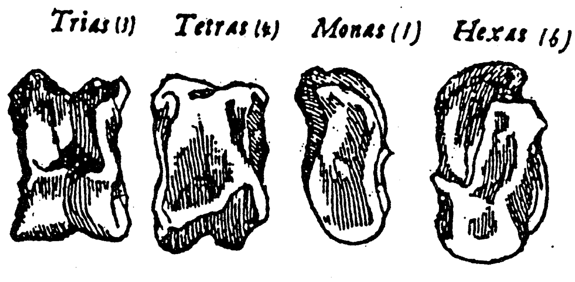
「3個のサイコロ投げで少なくとも1個1の目の出る勝ち目は91/125である」

とするところだろう。さらにこのゲームを2回続けて、2回とも少なくとも1個が1の目を出す勝ち目は$91^2 : 216^2-91^2=8281 : 38371$; 3回続けて、3回とも少なくとも1個が1の目を出す勝ち目は $91^3 : 216^3-91^3=753571 : 9324125$とすべきところ、彼は91 : 125から$91^2 : 125^2=8281:15625$; $91^3 : 125^3=753571 : 1953125$としてしまった。彼は勝ち目を$p^n/(1-p^n)$としないで、$p^n/(1-p)^n$としてしまった。

カルダノの確率概念は、定義も術語も与えていないが、勝ち目であった。

(7)

『偶然ゲームについて』の第15章「このことについてなされる誤りについて」で、カルダノは前章の自分の勝ち目の計算が間違いであることにうすうす気づいている。またこの章と、第31章の「タリ・ゲームについて」において、アストラガルス (astragalus)を用いるゲームを説明している。アストラガルスは4個を同時に投げる。図のようにアストラガルスは4つの面しか出ない。そして1回の投げ



で $4^4=256$通りの面の出方があり、種類は35通りあるが、そのことについてカルダノは正しく求めている。ただ彼はどの面も等確率で出ると仮定しているが、実際はほぼ 0.4, 0.4, 0.1, 0.1 の割合で面が出るから、彼はこのゲームを実際に行ったことがないと思われる。

(8)

『偶然ゲームについて』の第16章は「カード・ゲームについて」と題されている。この章は第18章「プリメロにおける慣習的な約束」,第19章「プリメロにおける得点もしくは多様さについて」とともに、カード・ゲームの中でも現在のポーカーの原型

とされる プリメロ (primero)について説明している。

「もしカード・ゲームのすべてを話そうとすれば、多分果てしなく話が続くだろう。しかしこのゲームは、計画を立ててやるのと、そうでないのと２種類ある••••サイコロ•ゲームは開けっぴろげであるのに、カード•ゲームはカードを伏せておくわけだから、いわば待ち伏せ式である。」[16章]

この説明で、計画を立ててやるというのは、種々の詭計を使って人を煙りに巻くゲームのことである。そうでないのは普通の偶然ゲームである。カードは４スート（フランス人、スペイン人、ドイツ人、イタリア人）各々13枚、各スートは１から10までの数カードとジャック，キング，クイーンの絵札からなり、計52枚が１パックである。 プリメロ というゲームは8，9，10のカードが除かれ、それ以外のカードの得点は

カード	1	2	3	4	5	6	7	絵札
得点	16	12	13	14	15	18	21	各10 点

のようになる。もしも3枚のカードの数を加えて5になると、そのとき同じスートのこれらのカードすべては70点とされる。bit(切札を決めるため競うこと)には、numerous, primero, supremus, chorus がある。いろいろな手(戦術)の起こる場合の数を列挙する。

	手	最低得点	最大得点	場合の数	計算方法
	同じスート2枚	20		54000	${}_4C_3\cdot{}_{10}C_2\cdot{}_{10}C_1{}^2\times 3$
numerus	同じスート3枚		54	14280	${}_4C_2\cdot{}_{10}C_3\cdot{}_{10}C_1\times 2-120$
	two pair			12150	${}_4C_2\cdot{}_{10}C_2{}^2$
primero	異なるスート4枚	40	81	9990	10^4-(chorusの数)
supremus	同じスートの7,6,1		55	120	4×30
fluxus	同じスートの4枚	42	70	840	$4\times{}_{10}C_4$
chorus	同じ数字のカード		84	10	
			計	91390	${}_{10}C_4$

カルダノは上の表の場合の数を求めているわけではない。求めようとしたらしいが複雑すぎて無理だったようである。後述するように、簡単な組合せの数は知っていたが、カードの場合は経験で結果を出している。プリメロの遊び方は17,18,19章に断片的に載っており、それらをまとめると次のようになる:

ゲーム開始前、各プレイヤーは賭金を供託し、４枚のカードを胴元から受け取る。誰もが自分の気に入ったカードが来なければ、1～2回カードを分配し直す。その後で誰かが自分にとり非常に有利だと思った段階で“vada(ゆくぞ!)”と宣言し、bid(競い値)を公開する。他のプレイヤーは自分の希望に従ってcallする(他

のプレイヤーが賭けたのと同じ賭金を出してプレーに残ること)か、dropする(手札が悪くて、これ以上賭けるのを諦めプレーを下りる;賭金は戻らない)か、raise(前のプレイヤーの賭金をさらに競い上げる)する。しかし、もし誰もraiseする者がなければ、"vada"を掛けた後、最後の人まで1回だけ2枚のカードを交換できる。それからrest(清算)の段階に入る[19章]。最終段階で、primeroもしくはfluxusを手札にもったプレイヤーは、手の型を宣告する義務を負わされている[18章]。だから相手側は当方のチャンスにある程度気づいている。他方、より低い得点をもつプレイヤーたちは、show-down(持ち札全部を見せること)により、ゲームが決着する以前に、1枚ないし2枚のカードを捨てたり、引いたりする権利がある。ゲームのこの段階で、しばしば行われる習慣はfare a salvare(救済)協定の提案である。2人のプレイヤーの1人は高い得点、他の1人は低い得点を手札にもつとき、後1回の引き方いかんでは、うまく相手をやっつけるチャンスがなくもない。そこで2人の相手のそれぞれのチャンスに対応する比率で、積み立てられた賭金を分配する協定がfare a salvareである[16章]。

16章の終わりの方で、カルダノは慣習的な救済方法を紹介し、賭金分け前の規則を批判的に吟味している。

(例)最高点の切札をもつ人が比較的低い得点、例えば45点の3枚fluxusをもち;最低点の切札をもつ人が高い得点の2枚fluxus、例えば 5と7のカードで36点をもっているとする。この場合、後者は2枚のカードを引き、それらのうち1枚が手元のfluxusと同じスートの札なら、後者の勝ちとなる。このとき賭金を平等に分配すれば、2枚のfluxusをもつ人に有利であると、カルダノは説く。例えば切札がハートとすると、取り損なった2枚のハートは1山のカードの中にあるから、残り36枚のカードの中に8枚のハートが残っているとしたら、2枚引いて1枚もハートが出ない確率は$q=28\cdot 27/36\cdot 35 \fallingdotseq 0.6$。従って勝つ確率は大体 0.4となり、カルダノの言い分が裏付けられる。

彼はいろいろな救済の例を挙げているが、それらは大体正しい。

(9)

カルダノは組合せの数について、ある程度の研究はした。最初の発表は1539年の『実用算術書』の第51章「各種の不完全なものについて」の中にある。n個の物から一度に2個以上取った組合せの数を見つけることが述べられている。つまり

$${}_nC_2+{}_nC_3+\cdots\cdots+{}_nC_n=2^n-n-1$$

というものである。カルダノは、左辺は幾何級数 $1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}$の和から個数nを引けばよいと述べ、$n=7,11,22$のときの数値を与えている。しかし証明は与えていない。この規則は1544年 シュティフェル (M.Stifel)は『算術全書』の

中で、初めの4つの素数2, 3, 5, 7から2つ以上とって作る合成数は $2^4-4-1=11$個あると述べ、それらを列挙している。

1550年カルダノは『微細なことについて (De subtilitate)』(全21巻;『カルダノ全集』第三巻)の第10巻に、漸化式

$$ {}_nC_r = \frac{n-r+1}{r}\,{}_nC_{r-1} $$

と、

$$ {}_nC_r = {}_nC_{n-r} $$

を使って、20種類の薬物から何種類かとって、薬を作る方法の数を計算している。すなわち、${}_{20}C_2=190$, ${}_{20}C_3=(18/3){}_{20}C_2=1140$, ${}_{20}C_4=(17/4){}_{20}C_3=4845$, ${}_{20}C_5=(16/5){}_{20}C_4=15504$, ${}_{20}C_6=(15/6){}_{20}C_5=38760$, ${}_{20}C_7=(14/7){}_{20}C_6=77520$, ${}_{20}C_8=(13/8){}_{20}C_7=125970$, ${}_{20}C_9=(12/9){}_{20}C_8=165970$, ${}_{20}C_{10}=184756$, と計算している。そして${}_{20}C_1$から${}_{20}C_{20}$まで全部加えた値は $2^{20}-1=1048576-1$になることも示している。勿論、彼は記号${}_nC_k$を使っていない。

1570年バーゼルで出版された『比例についての新しい書(Opus novum de proportionibus)』(『カルダノ全集』第4巻に収録)の中の命題137は「数列の数値計算の明

Propoſitio centeſima trigeſima ſeptima.

Rationem numerorum ex progreſſione declarare, Com. Primæ ſuæ Arith.

Michaël Stifelius rationem pulcherrimam tradidit ad inuentionem numerorum, qui vocantur multiplicandi, & componitur hoc modo. Ex prima componitur 1. & 2. faciunt 3. 1. 2. 3. faciunt 6. 1. 2, 3. 4. faciunt 10. & ita prima tabula conſtituit ſecundam recta ſerie numerorum iunctis

1	2	3	4	5	6	7	8
1							
2							
3	3						
4	6						
5	10	10					
6	15	20					
7	21	35	35				
8	28	56	70				
9	36	84	126	126			
10	45	120	210	252			
11	55	165	330	462	462		
12	66	220	495	792	924		
13	78	286	715	1297	1716	1716	
14	91	264	1001	2002	3003	3432	
15	105	455	1365	3003	5005	6435	6435
16	120	560	1820	4368	8008	11440	12870
17	136	680	2380	6188	12376	19448	24310

『比例について』529頁

示」と題し、数列の和

$$ 1+2+3+\cdots+n = n(n+1)/2 $$

と、組合せの数の生成規則

$${}_nC_k + {}_nC_{k+1} = {}_{n+1}C_{k+1}$$

を説明している。一般公式は与えず、いくつかの数値例から帰納する方法を採用しているのは、彼の論説の特徴である。

また、命題170には算術三角形が説明されている。そして

$${}_nC_1 + {}_nC_2 + {}_nC_3 + \cdots\cdots + {}_nC_n = 2^n - 1$$

が成り立つことを、$n=10, 11$の場合に対して説明している。

このような組合せの数の説明から、カルダノは

$${}_mC_i \times {}_nC_k$$

などの形式の計算は取り扱っていないので、カード・ゲームの問題に関してこれらの知識を利用し損ねたように思われる。

Propoſitio 170. 557

Sint gratia exempli decem homines, & patet quod poſſent eſſe ſinguli, & hoc decem modis, quia ſunt decem, vt Petrus & Ioannes: item, poſſunt eſſe omnes ſimul, & hoc vno modo tantum, & poſſunt eſſe duo, & hoc poteſt variari quadraginta quinque modis: & poſſunt eſſe octo, & manifeſtum eſt, quod totidem modis variantur, ſcilicet quadraginta quinque, nam cum erunt octo, duo qui relinquuntur, variari poſſunt 45. modis, ergo & illi octo ad vnguem totidem modis. Et ſimiliter tres quot modis variantur tot modis ſeptem, & quot modis quatuor tot ſex: quinque autem quia ſunt dimidium decem, pluribus modis variantur. Et ideò pro ordine huius detrahes vnum, vt ſint vndecem viri dones decem, ſi decem pones nouem, & colliges naturalem ſeriem numerorum, vt infrà vides vno ſemper termino deficientes: & ex priore ordine, vbi videbis ſemper etiam duplicari numeros vt 3. 6. inde ſub 6. 10. & 20. à latere, & ſub 20. 35. & à latere 70.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	
3	6	10	15	21	28	36	45	55		
4	10	20	35	56	84	120	165			
5	15	35	70	126	210	330				
6	21	56	126	252	462					
7	28	84	210	462						
8	36	120	330							
9	45	165								
10	55									
11										

ſeruit ſemper vltimo relinquendo monadem, & ſecundus penultimo, & tertius antepenultimo, & ita de aliis, nam ſi ſecundus variatur 55. modis, & penultimus variabitur 55. modis. Et ſi tertius variatur 165. modis, antepenultimus variatur 165. modis. Et ita de aliis.

Hæc autem ratio ſatisfacit multum, & eſt neceſſaria temperiebus corporis humani. Vt in ſecundo, De dentibus. Et etiam vt quælibet diſciplina quàm breuiſſimè tradi poſſit, vt gratia exempli, medicina tota in vna pagina, dico medicina non ſolum Græcorum, ſed etiam Arabum & Latinorum, & etiam longè plus: nam ſi tradatur vigintiquatuor regulis ſimplicibus, & ex illis fiant coniugationes 16777215. manifeſtum eſt quod erunt regulæ omnes hæ multo plures, quàm contineantur in omnibus libris Græcorum, & Arabum, & Latinorum, qui extant. Et tamen perſpicuum eſt, vigintiquatuor regulas vna pagina commodiſſimè cótineri Et hoc aliâs docui, quanquàm credam me erraſſe in ſupputatione, nam locum inuenire non potui. Vnum eſt id certum, quòd hæc ratio quàm nunc explicabo, eſt vera & demonſtratiua, & facillima.

Cum enim ſuperior ſit vera & demonſtratiua, non eſt tamen facilis, & præcipuè in magnis numeris. Et ideò inueni hanc, quæ (vt dixi) facillima eſt: adde numero propoſito monadem, inde conflari inuenias nume-

11	
55	
165	
330	
462	
462	
330	
165	
55	Cor. 11
11	
1	
2047	
10	
45	
120	
210	
252	
210	
120	
45	
10	
1	
1023	

『比例について』557頁

とでも言うべき道徳的•哲学的•社会学的考察である。

第１章「ゲームの種類について」は、体力を使うゲーム（円盤投げ、レスリング）、頭を使うゲーム（チェス）、偶運によるゲーム（サイコロ•ゲーム，アストラガルス，カード•ゲーム）、偶運と技量を使うゲーム（フリチルルス）とゲームの分類をしている。しかし第24章「カード•ゲームとサイコロ•ゲームの違いについて」には、「カードでプレーしている間は、自分の現在の持ち札と相手の持ち札について判断することを要する。現状について推測することは叡知に長けた用心深い人間の役目である」と述べ、偶運以外に知恵も出さねばならないと説教している。カード•ゲームは創造美と多様さをもつ **プリメロ** 、面白さをもつ **トラポラ** （trappola)、大きな賭金を掛ける **サンクテュイス** （sanctuis)、決着が着くのに時間のかかる **タロティ** （tarochi)、用心深さと人生の模倣で他のゲームを凌駕する **トリウムフス** （triumphus)など、賢明な人にとりカード•ゲームはサイコロ•ゲームよりやり甲斐があると述べている。

第２章「ゲームをする条件」では、心配事があり心の安らぎを求めたいとき、節度ある金を賭けて賭事をすることはよいと述べている。では「誰と何時ゲームをすべきか」[第3章]について、自分と相応の身分の人で、たまに勝負を自宅か相手の家で、少額の金を賭けてすること；法律家や医者などは賭事をすれば評判を落とす；なぜなら、勝てば博奕打ちと疑われ、負ければ腕が未熟と嘲笑されるから。このことは「ゲームの効用と損失」［第4章]とも関係する。プレーを通して賭け仲間の性格が分かること；忍耐力の有無を試す機会であること；しかし時間と金の浪費であることなど。それで「なぜ賭事はアリストテレスに非難されたか」［第10章]というと、

喜んで百も承知で勝負する人からの儲けは最高，
百も承知だがしぶしぶ勝負する人からの儲けは次善，
百も承知だが嫌がる友人に強制した勝負からの儲けは三番目の善，
何も知らないでしぶしぶ勝負する人からの儲けは詐欺，
何も知らないで喜んで勝負する人からの儲けは略奪

という点で、追剥や強盗と同様、儲けのためには何でもするからである[『ニコマコス倫理学』第4巻，第1章の終わり]。それでも「なぜ私は賭事を論ずるのか」[第５章]というと、

よしんば賭事が一般的に悪であるとしても、ゲームをする人間はたくさんいるのだから、それは必要悪と見なすべきである。それは医者から見た不治の病のようなもの。哲学者が悪徳を論ずる習慣をもつように、医者が不治の病を論ずるのは当然だ

からである。

この本の中には当時実際にゲームで行われていたイカサマについて、経験したことを数多く述べ、賭博常習者でなければ書けないような記述がある。第17章ではカード•ゲームにおけるイカサマ、第30章ではサイコロ•ゲームにおけるイカサマが述べられている。当時カード•ゲームは政治的色彩に富むゲームであった。というのは、ルネサンスの時代、後世の人々が文化の華々しさに目を奪われるのとは裏腹に、イタリアの政情は混沌を極め、小公国が乱立し、相互に政治的•軍事的駆け引きを行い、それらをさらに法王庁、ドイツ、フランス、スペインが領土的野心をもって狙っていた。プリメロに出てくるカードのスートがFrench, Spanish, Germans, Italiansとなっているのも意味ありげで、プリメロをやることにより人々は王侯貴族の政治的駆け引きの気分を代行して味わった。プリメロを演ずるプレイヤーたちの手が、絶対的永続的な優位さを持たないように、現実の政治情勢もフランス、スペイン、ドイツのどれもがイタリアでの永続的な優位を占めることができず消長を繰り返した。プリメロのプレイヤーを取り巻く見物人はイカサマの張本人であるが、彼らは直接戦闘に関係なく各種の同盟の中で何を企んでいるか分からぬ小国になぞらえることができる。カードに印をつけたり、石鹸を塗ったりする以外に、見物人の策略（鏡でカードを写し出すこと、目配せ、ある種の信号の発信など)など愉快な話が数多く記述されている。

イカサマ•サイコロは言わずもがな、イカサマでないサイコロでも投げ方で思い通りの目が出せることなども説明されている。

第20章「ゲームにおける運について」でカルダノは賭事では運が重要な役割を演ずること、運のつき方は人によって違うし、時間によっても場所によっても違うことを、自分の若い頃の賭博経験を通して語っている。自伝『我が人生の書』の30章では若い頃イカサマのカード•ゲームに引っ掛かったこと、それで立腹して相手に刃傷沙汰を起こしたことも述べている。

第21章「投げるときの臆病さについて」で彼はおずおずサイコロを振ることは不運な目が出る原因にはならないと断言する。運命の女神が反対したから、サイコロの目が不都合に出たのであり、不都合な目の出方をしたから損害を被ったのであり、損害を被ったからおずおずとサイコロを振るのである。従っておずおずとサイコロを振ることは不都合な目の出る原因ではない。

第26章「規則を教える人はうまく勝負するか」については、知ることと実行することは別である；学識ある医者は腕のいい医者かと問うのと同じであるとする。

第27章「技以上の技に関して何かあるだろうか」との問に、出来事には偶然によるものと、そうでないものがある。後者は計画や判断に左右されるが、前者は運

に左右される。運(fortuna)は人間の意図や計画通りになったり、ならなかったりする傾向のことであると、カルダノは定義する。そしてそれは時間の変化に従属する。だからゲームでは「運があるか、あらざるか(futurum est,aut non)」によって結果が左右されると説く。彼が守護霊などというものを持ち出すのも、運を自分に呼び寄せようという試みの一つであろう。

にもかかわらず、彼は第29章「プレイヤーの性格について」で運任せだけでなく、ゲームにはそれ相応の人間の意図や計画が必要と説く。勝負前の気持ちを忘れないこと、途中でカッとならないこと、相手を怒らせないこと、相手を恐れないこと、無意味なことを言わないこと、敵や見物人の行動を冷静に見守ること、などがそれである。

最後に第30章はゲームの歴史に割かれており、歴史的にも重要な情報源である。

(11)

カルダノの『偶然ゲームについて』は確かに賭博百科ではあっても、そこで解こうとした問題は、およそ100年後のパスカル・フェルマーの問題より遥かに豊富なものである。当時の数学の水準を考えれば、正解に達し損ねたとはいえ、十分に評価する価値はあると思われる。

＜参考文献＞

(1)青木靖三・榎本恵美子訳『カルダノ;わが人生の書』(社会思想社,1980年7月30日)

(2)清瀬卓・沢井茂夫訳『カルダーノ自伝』(海鳴社,1980年11月15日)

(3)大空幸子訳『チェリーニ,わが生涯』(新評論;1983年)

(4)C.Sponi編集『カルダノ全集(Hieronymi Cardani Mediolanensis Philosophi ac Medici Celeberrimi Opera Omnia)』全10巻(1663年;リプリント,Johnson,1967年)

(5)O.Ore "Cardano;the Gambling Scholar"(1953年,Princeton Univ.Press)[邦訳,安藤洋美『カルダノの生涯』(1978年,東京図書)];この本の中にS.H.Gouldが英訳した『Liber de Ludo Aleae』が収録されている。

(6)A.Hald "A History of Probability and Statistics and their Application before 1750"(J.Wiley,1990年)

(7)O.B.Sheynin 'On the early history of the law of large numbers'(Biometrika,1968年,459-464頁)

(8)I.Todhunter "A History of the mathematical theory of probability from the time of Pascal to Laplace"(1865年)[邦訳,安藤洋美『確率論史』1975年,現代数学社]

(9)E.Knobloch "Die mathematischen Studien von G.W.Leibnia zur Kombinatorik"(1973年,Franz Steiner Verlag)

(10)A.W.F.Edwards "Pascal's Arithmetical Triangle"(1987年,Charles Griffin)