数理解析研究所講究録
1065 巻 1998 年 124-135

3 次元軌道体の基本群の分解を実現する球面的軌道面

竹内 義 浩 (Yoshihiro Takeuchi)
横山 美佐子 (Misako Yokoyama)

Department of Mathematics, Aichi University of Education
Department of Mathematics, Faculty of Science, Shizuoka University

Abstract. 3 次元軌道体の基本群が、向き付け可能な球面的軌道面の基本群と同型な群により融合自由積分解されているとき、この分解を実現するような球面的軌道面を求める問題を扱う。途中までに得られた結果を利用して、結び目が合成であることの十分条件を求める。

Contents

1. Introduction

本稿は、[T-Y 4*] の話に、若干の修正・付加を施した報告と解説である。証明や定理の仮定に関することなどの詳しい内容については、[T-Y 4] を参照されたい。

ここに出てくる oribifold は全て good と仮定する。また、特に断らない限り、orientable とする。X が orbifold のとき、その orbifold としての基本群を $\pi_1(X)$, X の底空間 $|X|$ の通常の基本群を $\pi_1(|X|)$ と書く。群の自由積や融合積は、断らない限り、非自明であるとする。

主結果は、次の通りである。

<u>主定理</u>. M は、*good, compact, connected, orientable 3-orbifold* で、

(a) *∂-irreducible;*
(b) *non-separating spherical 2-orbifold* を含まない；
(c) M を素分解したときの各成分の π_1 が、無限群

Typeset by $\mathcal{A}_{\mathcal{M}}\mathcal{S}$-TEX

であるようなものとする。このような M に対して、 $\pi_1(M)$ の融合積分解

$$\pi_1(M) = G_1 *_K G_2$$

で、次を満たすものが与えられたとする。

(1) K は、ある *orientable spherical 2-orbifold* S の π_1 に同型。
(2) $\pi_1(M)$ は、K の真部分群と同型な群 H では融合積分解されない。
(3) さらに K が有限巡回群の場合は、 K と同型な群を辺群とし、非自明な頂点群のみからなる $\pi_1(M)$ のどんな樹木積分解においても、同一になるような辺群が *2* つ以上は存在しない。

このとき、上の分解を実現するような *spherical 2-suborbifold* S が存在する。 □

<u>注意</u>. 主定理の条件 (c) で M とあるのを $\mathcal{P}(M)$ としても、結果は成り立つ。 $\mathcal{P}(M)$ は、M の Poincaré associate で、定義は 6 節にある。その他の用語については、2 節で復習している。 □

主定理の証明の為に、与えられた基本群の分解に沿って、orbifold composition X を構成し、orbifold M から X への写像を作る。Orbifold composition は、いくつかの orbifolds を写像で貼り合わせたもので、正確な定義は 4 節にある。

これらの手法を link orbifold に対して適用することにより、結び目が合成であることの十分条件が得られる。(必要性の方は、知られている。)

ここで、以下の内容を要約する。2 節では、用語のいくつかを復習する。3 節では、基本群と境界に関する条件により、3-orbifold が区間積になるという定理を述べる。4 節では、[T-Y 3] の orbifold composition の定義を、ここでの問題用に少し修正したものを述べる。5 節では、orbifold から orbifold composition への map に関することを準備する。この節の事柄は、ほぼ [T-Y 3] の対応する内容をそのまま書き直したものである。逆に言えば、この節で述べた map の拡張性についての補題が成り立つように orbifold composition の定義を決めたとも言える。6 節では主定理を、終節では、絡み目についての応用を述べる。

尚、本稿では、基本群の分解に現れる融合部分群が、<u>spherical</u> 2-orbifold の π_1 に同型な場合を扱ったが、<u>nonspherical</u> の場合については、[T-Y 3] で考察している。

2. Preliminaries

この節では、用語などについて少し復習する（詳しくは、[Th], [Ta], [T-Y 1], [T-Y 3] を参照)。本稿を通じ、orbifold は全て good（すなわち manifold による covering がある）とし、また、特に断らない限り、orientable とする。群の自由積や融合積は、断らない限り非自明であるとする。

Orbifold M が *locally orientable* であるとは、 M の任意の点における local transformation group の各元が orientation preserving に作用するときを言う。 M が *orientable*

であるとは、 M の (global) transformation group の各元が orientation preserving に作用するときを言う。特に、 M が 3-orbifold の場合には、 M が locally orientable ならば、底空間 $|M|$ は 3-manifold になり、さらに、その $|M|$ が orientable ならば、 M は orientable orbifold になる。

Spherical 2-orbifold は、底空間が S^2 で、特異点がないか（すなわち、S^2 か)、または、2 個か 3 個ある。特異点の index の組は、 n を 2 以上の整数とすると、 (n,n), $(2,2,n)$, $(2,3,3)$, $(2,3,4)$, $(2,3,5)$ のいずれかになっている。3-orbifold の内部にある spherical 2-suborbifold F が *incompressible*（圧縮不能）であるとは、 F が ballic 3-orbifold の境界にはなっていないときをいう。

Discal 2-orbifold は、底空間が 2 次元円板 D^2 で、特異点がないか（すなわち D^2 か)、または、内部に 1 個ある。3-orbifold M 内の properly embedded な（すなわち $\partial B \subset \partial M$ かつ $\mathrm{Int}\ B \subset \mathrm{Int}\ M$ となっているような）discal 2-suborbifold B が、*incompressible* であるというのは、 ∂M 内の discal 2-suborbifold B' と一緒になって（つまり、 $B \cup B'$ が）ballic 3-orbifold の境界となる（しかも、そのとき $B \cap B' = \partial B = \partial B'$ ）などということは決してないときをいう。

3-orbifold M 内の、spherical でも discal でもない properly embedded な 2-suborbifold F が、*incompressible* であるとは、 F の単純閉曲線で、 F では、どんな discal 2-orbifold の境界にもならないが、 M では、ある discal 2-orbifold の境界となるようなもの、そのような単純閉曲線というものは決してないときをいう。

3-orbifold M が *irreducible* であるとは、 M 内の任意の spherical 2-orbifold が、少なくとも 1 つの ballic 3-orbifold の境界になっているときをいう。もし、 M 内のある spherical 2-orbifold が、その両側ともに ballic 3-orbifolds を境界としていたら（ ∂ していたら)、 M は後で出て来る ballic 3-orbifold の *double* ということになる。一般に、境界のある orbifold N とそのコピー N' を持ってきて、 ∂N と $\partial N'$ の（コピーにより誘導された）同一視により M が得られたとき、 M を N の *double* という。

3-orbifold M が *∂-irreducible* であるとは、 M の任意の境界成分が incompressible であるときをいう。

3-orbifold M 内の 2-suborbifold F が incompressible かどうかを言うとき、一般には、「F が 2-sided である（両側を持つ)」ことが要求されている。今、 M, F はどちらも orientable であるから、この要求は自動的に満たされていて、これについては考えなくてもよい。

連結な 3-orbifold M を 2-suborbifold F で切った結果は、連結である場合と連結でない場合が考えられる。 M を F で切っても連結なままであるとき、 F は *non-separting*（非分離的）であるといい、 M を F で切ったら連結でなくなるとき（このとき、連結成分は 2 個になる)、 F は *separating* （分離的）であるという。

M を 3-orbifold, A, B を M の suborbifolds, F を M の 2-suborbifold とする。 M

を F で切った結果、A, B が同じ連結成分に入るとき、F は、A, B を分離しない、そうでないとき、F は、A, B を分離するという。前段落で述べた non-separating という性質を F が持っているときには、F が A, B を分離するということは、もちろん起こらない。

3-manifold の場合と同様に、3-orbifold M が compact であるときは、M 内の incompressible 2-suborbifolds についての有限性（平行なものを除いては有限個しかない）が成り立つ。そのような 2-suborbifolds のうちで、特に spherical なものだけについて考え、incompressible spherical 2-suborbifolds がある限り、順に M を切っていく。上の有限性より、この操作は有限回で終わる。最終的に得られた各連結成分の各切り口にその cone であるところの ballic 3-orbifold を貼り付けたものたちを考え、これを M の素分解と呼ぶ。

Orbifold X の universal cover が $p : \tilde{X} \to |X|$ のとき、このことを表わすのに $X = (\tilde{X}, p, |X|)$ と書くことにする。また、X の orbifold としての基本群 $\pi_1(X)$ は $\mathrm{Aut}(\tilde{X}, p)$ と同型である。これらのことは、後の 4 節で出てくる OISIBO's (orbifold identified space identified along ballic orbifolds) や orbifold compositions に対しても同様である。

$X = (\tilde{X}, p, |X|)$, $Y = (\tilde{Y}, q, |Y|)$ を orbifolds とする。*Orbi-map* $f : X \to Y$ とは、連続写像たち $\bar{f} : |X| \to |Y|$ と $\tilde{f} : \tilde{X} \to \tilde{Y}$ の組 $(\bar{f}, \tilde{f})$ で、次を満たすものをいう。

(i) $\bar{f} \circ p = q \circ \tilde{f}$,

(ii) 各 $\sigma \in \mathrm{Aut}(\tilde{X}, p)$ に対して、ある元 $\tau \in \mathrm{Aut}(\tilde{Y}, q)$ で、$\tilde{f} \circ \sigma = \tau \circ \tilde{f}$ を満たすものが存在する。

(iii) 点 $x \in |X| - \Sigma X$ で、$\bar{f}(x) \in |Y| - \Sigma Y$ となるものが、少なくとも 1 つはある。

多様体間の連続写像の場合と同じように、orbi-map も orbifolds の基本群間の準同型写像を誘導するが、上の (iii) の 点 x, $\bar{f}(x)$ は、その際の基本群の基点となり得るものたちである。ここで述べた orbifolds 間の orbi-map についての概念は、後の 4 節で出てくる OISIBO's や orbifold compositions 間の orbi-map としても、全く同様に定義される。

Orbi-map $f : X \to Y$ が *orbi-embedding* であるとは、$f(X)$ が Y の suborbifold であって、$f : X \to f(X)$ が orbifolds 間の同型写像であるときを言う。

3. Product I-bundles

この節の目標は区間積についての定理で、それは主定理の証明において、ballic 3-orbifold の orbi-map による逆像の連結成分の個数を減らすのに用いられる。

定義. 3-orbifold M が既約 (mod A, B) とは、A と B を分離しないような spherical 2-orbifold は、必ず、ある ballic 3-orbifold の境界となるときをいう。 □

補題. *M を good, connected, orientable 3-orbifold であって、境界成分として、少なくとも 2 つの spherical 2-orbifold A, B で、$\#\Sigma A = \#\Sigma B$ ($= 2$ または 3) であるようなも*

のを持つものとする。仮定として、M は、既約 (mod A, B) であるとしておく。任意の点 $x \in \Sigma A$ を取り、固定する。σ_x を x の回りのメリディアン・ループとする。$i : A \to M$, $j : B \to M$ を包含写像とし、適当な *path* が定める i_*, j_* に対して、$i_*[\sigma_x] \in j_*\pi_1(B)$ であるならば、x と ΣB を結ぶような *singular locus* ℓ で、*3* 分岐点がないものが存在する。□

(証明の方針) まず、M 内の spherical 2-orbifold で incompressible なものは、すべて A か B に parallel である場合について示し、その後、一般の場合について示す。(詳しくは [T-Y 4] を参照)

定理 (区間積). M を *good, connected, orientable 3-orbifold* であって、境界成分として、少なくとも *2* つの *spherical 2-orbifold* A, B で、$\#\Sigma A = \#\Sigma B$ ($=0,2$ または 3) であるようなものを持つものとする。仮定として、M は、既約 (mod A, B) であるとしておく。$i : A \to M$, $j : B \to M$ を包含写像とし、適当な *path* が定める i_*, j_* に対して、$i_*\pi_1(A) = j_*\pi_1(B)$ であるならば、M は $A \times I$ に *orbifold* として同型である。□

(証明の方針) $\#\Sigma A = \#\Sigma B = 0$ のときは、A と B を結ぶ適当な path を使って、その他の場合は、上の補題により得られる singular locus ℓ (1 本だけ、または 3 本すべて) を使って示す。(詳しくは [T-Y 4] を参照)

4. Orbifold compositions of spherical type

定義 (OISIBO). I, J を加算集合、X_i $(i \in I)$ を n-orbifolds, B_j $(j \in J)$ を ballic n-orbifolds とする。$f_j^\varepsilon : B_j \to X_{i(j,\varepsilon)}$ を orbi-embedding で、$f_j^\varepsilon(B_j) \subset \mathrm{Int}\, X_{i(j,\varepsilon)}$ かつ $f_j^\varepsilon(B_j)$ たちは、互いに交わらないとする。但し、$j \in J$, $i(j,\varepsilon) \in I$, $\varepsilon = 0,1$ である。このとき、$X = (X_i, B_j, f_j^\varepsilon)_{i \in I, j \in J, \varepsilon=0,1}$ を *orbifold identified space identified along ballic orbifolds* (OISIBO) と呼ぶ。写像 $f_j^0 \circ (f_j^1)^{-1}$ (及び、その逆写像) を X の貼り付け写像と呼ぶ。各 X_i, B_j をそれぞれ、X の *particle, identifying ballic orbifold* と呼ぶ。次に $\coprod_{i \in I, j \in J}(|X_i| \cup |B_j|)$ における同値関係 $\sim$ を下で生成されるものとして定義する。

$$y \sim \overline{f}_j^\varepsilon(y), \quad \varepsilon = 0,1, \quad y \in |B_j|, \quad j \in J.$$

等化空間 $\coprod_{i \in I, j \in J}(|X_i| \cup |B_j|)/\sim$ を X の底空間と呼び、$|X|$ と書く。また、等化空間 $\{(\cup_{i \in I}\Sigma X_i) \cup (\cup_{j \in J}\Sigma(B_j))\}/\sim$ を X の特異集合と呼び、ΣX と書く。□

定義 (covering). $X = (X_k, B_\ell, f_\ell^\varepsilon)_{k \in K, \ell \in L, \varepsilon=0,1}$ と $X' = (X_i', B_j', {f'}_j^\varepsilon)_{i \in I, j \in J, \varepsilon=0,1}$ を OISIBO's とする。X' が X の *covering* であるというのは、写像の集合 $\{\varphi_i, \psi_j\}_{i \in I, j \in J}$ で、次を満たすものがあるときをいう。

(1) 各 φ_i は X_i' から X_{k_i} への (orbifolds 間の) covering map である ($k_i \in K$)。また各 ψ_j は B_j' から B_{ℓ_j} への (orbifolds 間の) covering map である ($\ell_j \in L$)。

(2) 各 $j \in J$ と $\varepsilon = 0,1$ に対して、 $\varphi_{i(j,\varepsilon)} \circ f'^{\varepsilon}_j = f^{\varepsilon}_{\ell_j} \circ \psi_j$ が成り立つ。

(3) 連続写像 $p : |X'| \to |X|$ で、 $\{\varphi_i, \psi_j\}_{i \in I, j \in J}$ から自然に誘導されるものは全射であり、 $|X'| - p^{-1}(\Sigma X)$ から $|X| - \Sigma X$ への通常の covering map を誘導する。

上の写像 p を X' から X への *covering map* という。 □

<u>定義 **(orbifold composition)**</u>. I, J を可算集合、X_i $(i \in I)$ を n-OISIBO's, Y_j $(j \in J)$ を ballic n-orbifolds とする。$f^{\varepsilon}_j : Y_j \times \varepsilon \to X_{i(j,\varepsilon)}$ を orbi-maps で、 $(f^{\varepsilon}_j)_*$ が単射準同型であるものとする（ $j \in J$, $i(j,\varepsilon) \in I$, $\varepsilon = 0,1$ ）。このとき、 $X = (X_i, Y_j \times [0,1], f^{\varepsilon}_j)_{i \in I, j \in J, \varepsilon = 0,1}$ を *n-dimensional orbifold composition* (*of spherical type*) と言う。写像 f^{ε}_j を X の *attaching maps* と言う。各 X_i, $Y_j \times [0,1]$ を X の *component* と言う。$\coprod_{i \in I, j \in J}(|X_i| \cup (|Y_j| \times [0,1]))$ における同値関係 $\sim$ を次で生成されるものとして定義する。

$$(y, \varepsilon) \sim \overline{f}^{\varepsilon}_j(y), \quad \varepsilon = 0,1, \quad y \in |Y_j|, \quad j \in J.$$

等化空間 $\coprod_{i \in I, j \in J}(|X_i| \cup |Y_j| \times [0,1])/\sim$ を X の<u>底空間</u>と言い、$|X|$ と書く。また、等化空間 $\{(\cup_{i \in I} \Sigma X_i) \cup (\cup_{j \in J} \Sigma(Y_j \times [0,1]))\}/\sim$ を X の<u>特異集合</u>と言い、ΣX と書く。 □

5. Orbi-maps

<u>定義 ($O_i(X)$)</u>. X を orbifold composition とする。次のように、写像の集合を 3 つ定義する。

$$O_1(X) = \{f : \partial D \to X \mid D \text{ は discal 2-orbifold で、} f \text{ は orbi-map}\},$$

$$O_2(X) = \{f : S \to X \mid S \text{ は spherical 2-orbifold で、} f \text{ は orbi-map}\},$$

$$O_3(X) = \{f : \mathcal{D}B \to X \mid \mathcal{D}B \text{ は ballic 3-orbifold } B \text{ の double,} \\ f \text{ は orbi-map}\}.$$

写像 $f : \partial D \to X \in O_1(X)$ が<u>自明</u>であるというのは、orbi-map $g : D \to X$ で、$g|\partial D = f$ となるようなものが存在するときを言い、 $O_1(X)$ が<u>自明</u>であるというのは、$O_1(X)$ の任意の元が自明であるときを言う。写像 $f : S \to X \in O_2(X)$ が<u>自明</u>であるというのは、orbi-map $g : c * S \to X$ で、 $g|S = f$ となるようのものが存在するときを言う。但し $c * S$ は S 上の cone である。 $O_2(X)$ が<u>自明</u>であるというのは、 $O_2(X)$ の任意の元が自明であるときを言う。 $O_3(X)$ についても同様に定める。

$O_i(X)$ が自明であったら、 X の任意の covering $\tilde{X}$ について、 $O_i(\tilde{X})$ もまた自明となることを注意しておく。 □

<u>補題 **(orbi-map の拡張性)**</u>. $X = (X^{\varepsilon}, Y \times [0,1], f^{\varepsilon})_{\varepsilon = 0,1}$ を *orbifold composition* であって、各 X^{ε} の各 *particle* が *orientable, irreducible 3-orbifold* であり、Y が *orientable ballic 3-orbifold* であるようなものとする。もし、各 X^{ε} の各 *particle* の *universal covering* が *non-compact* ならば、 $O_i(X)$ は自明である（ $i = 1,2,3$ ）。 □

<u>命題 (orbi-map の構成)</u>. M を *3-orbifold*, X を *orbifold composition*, $\varphi : \pi_1(M) \to \pi_1(X)$ を基本群間の準同型写像とする。このとき、もし、$O_i(X)$, $i = 1, 2$ が自明であるならば、*orbi-map* $f : M \to X$ で $f_* = \varphi$ となるようなものが存在する。 □

<u>定理 (Transversality)</u>. M を *good, compact, connected, orientable 3-orbifold* とし、X を *3-orbifold composition* で $O_i(X)$*'s*, $i = 2, 3$ が自明なものとする。仮定として、ある *edge orbifold* で、その *core* が *ballic 3-orbifold* F であって、$O_i(X - F)$, $i = 2, 3$ が自明であるようなものがあるとする。このとき、任意の *orbi-map* $f : M \to X$に対して、以下を満たすような *orbi-map* $g : M \to X$ が存在する。

(1) g は f に *orbi-homotopic* である。
(2) $g^{-1}(F)$ の各成分は、*compact, properly embedded, 2-sided, incompressible* な M の *2-suborbifold* である。
(3) X における $F = F \times 0$ の *product neighborhood* $F \times [-1, 1]$ と、M における $g^{-1}(F) = g^{-1}(F) \times 0$ の *product neighborhood* $g^{-1}(F) \times [-1, 1]$ で、適切に選んだものたちに対して、$\bar{g}$ は、各点 $x \in |g^{-1}(F)|$ に対して、各 *fiber* $x \times |[-1, 1]|$ を *fiber* $\bar{g}(x) \times |[-1, 1]|$ に同相に写す。但し、$\bar{g} : |M| \to |X|$ は g の *underlying map* である（すなわち $g = (\bar{g}, \tilde{g})$)。 □

<u>定義</u>. Orbifold composition X に対して、$\delta(X)$ を次の (1) または (2) のような orbifold Y から成るものとする。

(1) Y は、X のある OISIBO のある particle の境界の 1 成分である。
(2) Y は、ある closed half-edge の core であるような ballic orbifold である。 □

<u>定理 (Retraction)</u>. M は *orientable 3-orbifold* で、ある *closed 2-orbifold* F 上の *I-bundle* に *orbifold* として同型とする。X は、*3-orbifold composition* で、$O_i(X)$*'s*, $i = 2, 3$ が自明であるとする。$f : (M, \partial M) \to (X, \delta X)$ は *orbi-map* で、$f|\partial M$ が *orbi-embedding* でなく、さらに、∂M の各成分 B に対して、δX のある成分 C で $f(B) \subset C$ となるものがあるとする。

もし、ある点 $x \in |F| - \Sigma F$ で、$f|(\varphi^{-1}(x))$ が C の *path* に *orbi-homotopic rel.* $\{x\} \times \partial I$ であるならば、*orbi-homotopy* $f_t : M \to X$ で $f_0 = f, f_1(M) \subset \delta X$ かつ $f_t|\partial M = f|\partial M$ となるものが存在する（但し $\varphi : M \to F$ は *fibration*)。 □

6. Main Theorem

<u>補題 (binding tie)</u>. M を *good, connected, orientable 3-orbifold* であって、境界成分として少なくとも *2* つの同型な *spherical 2-orbifolds* F_0, F_1 を持つものとする。x_0, x_1 をそれぞれ、F_0, F_1 の基点とし、e を x_0 上の定値な道、α を、x_0 と x_1 を結ぶ、*singular set* を通らない道とする。これら e, α により定まる基本群の準同型写像を、それ

それぞれ $\iota_e : \pi_1(F_0, x_0) \to \pi_1(M, x_0)$, $\iota_\alpha : \pi_1(F_1, x_1) \to \pi_1(M, x_0)$ とする。さらに、$\pi_1(M)$ は、$\pi_1(F_0)$ の真部分群に同型な群 G では、融合積分解ができないとする。この時、もし $\iota_e\pi_1(F_0, x_0) = \iota_\alpha\pi_1(F_1, x_1)$ が成り立つならば、M を既約 (mod F_0, F_1) 化した N の中に、x_0 と x_1 を結ぶ、*singular set* を通らない道 β で $\iota_e\pi_1(F_0, x_0) = \iota_\beta\pi_1(F_1, x_1)$ を満たすものが存在する。但し、ι_β は β により定まる基本群の準同型写像 $\pi_1(F_1, x_1) \to \pi_1(M, x_0)$ である。 □

<u>定義 (Poincaré associate)</u>. M を good, compact, orientable 3-orbifold とする。∂M の成分に spherical なものがあったら、その cone となる ballic 3-orbifold を貼り付ける。さらに、Int M 内の separating な spherical 2-suborbifold F_i で、F_i が ∂ する一方の N_i が、$\pi_1(N_i) \cong \pi_1(F_i)$ であるが、$N_i \neq$ (F_i の cone) であるようなものがあるとき、N_i を F_i の cone B_i で取り替え、その結果を M_i と書く。そのような F_i が存在する限りこの操作を行なうのだが、M が compact より、有限回の操作で終わる。この列を

$$M \to M_1 \to M_2 \to \cdots \to M_k$$

とするとき、最終段階 M_k を $\mathcal{P}(M)$ と書いて、M の *Poincaré associate* と呼ぶ。明らかに、$\pi_1(M) \cong \pi_1(\mathcal{P}(M))$ が成り立つ。 □

ここまでの準備により、次が示せる。

<u>主定理</u>. M は、*good, compact, connected, orientable, 3-orbifold* で、

(a) *∂-irreducible;*

(b) *non-separating spherical 2-orbifold* を含まない；

(c) $\mathcal{P}(M)$ を素分解したときの各成分の π_1 が、無限群

であるようなものとする。このような M に対して、$\pi_1(M)$ の融合積分解

$$\pi_1(M) = G_1 *_K G_2$$

で、次を満たすものが与えられたとする。

(1) K は、ある *orientable spherical 2-orbifold* S の π_1 に同型。

(2) $\pi_1(M)$ は、K の真部分群と同型な群 H では融合積分解されない。

(3) さらに、K が有限巡回群の場合は、K と同型な群を辺群とし、非自明な頂点群のみからなる $\pi_1(M)$ のどんな樹木積分解においても、同一になるような辺群が *2* つ以上は存在しない。

このとき、上の分解を実現するような *spherical 2-suborbifold* S が存在する。 □

<u>証明概略</u>.

<u>*Step* 1.</u>

M から $\mathcal{P}(M)$ を作り、それを改めて M と置く。M の基本群の基点を、y_0とする。($y_0 \in |M| - \Sigma M$)

<u>*Step* 2.</u>

基本群の分解に沿った orbifold composition $X = X_1 \cup_{B\times I} X_2$, $\pi_1(X_1) \cong G_1$, $\pi_1(X_2) \cong G_2$, $\pi_1(B) \cong K$ を作る。Core B 内に X の基本群の基点 x_0 を取る。

<u>*Step* 3.</u>

基本群間の同型写像 $\varphi : \pi_1(M, y_0) \to \pi_1(X, x_0)$ を誘導する orbi-map $f : M \to X$ を作る。

<u>*Step* 4.</u>

Core B の f による引き戻しの各連結成分は、定理 (Transversality) より、compact, properly embedded, 2-sided, incompressible な 2-orbifold にできる。これらを $S_1, \ldots, S_k$ と置く。

<u>*Step* 5.</u>

$f|S_i : S_i \to B$ を orbi-map になるようにしておく。(つまり、基点がなかったら、基点を作るのだが、これは、[Ta, 5.4] より、できる。) さらに、必要ならば map を修正することにより、各 S_i に対し、$y_i \in |S_i| - \Sigma S_i$ であって、$f(y_i) = x_0$ となるものが取れる。

<u>*Step* 6.</u>

f_* は、同型より、全射。ゆえに、各 y_i と y_0 を結ぶ $|M| - \Sigma M$ 内の path ℓ_i で、$[f \circ \ell_i] = 1 \in \pi_1(X)$ となるものが取れる。S_i の基点を y_i とし、path ℓ_i が誘導する準同型写像を、$\eta_{i*} : \pi_1(S_i, y_i) \to \pi_1(M, y_0)$ とする。B の基点を x_0 とし、定値な道が誘導する準同型写像を $\lambda_* : \pi_1(B, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$ とする。Path ℓ_i の取り方により、任意の i について、下の図式は、可換。

η_{i*} は単射である。$f_* = \varphi$ は同型より、単射。ゆえに、$f_* \circ \eta_{i*} = \lambda_* \circ (f|S_i)_*$ は、単射。よって、$(f|S_i)_*$ は、単射。$(f|S_i)_*(\pi_1(S_i, y_i)) \subset K = \pi_1(B, x_0)$ だから、$\pi_1(S_i, y_i)$ は、K の ある部分群に同型である。

$$
\begin{tikzcd}
\pi_1(M, y_0) \arrow[r, "f_*"] & \pi_1(X, x_0) \\
\pi_1(S_i, y_i) \arrow[u, "\eta_{i*}"] \arrow[r, "(f|S_i)_*"'] & \pi_1(B, x_0) \arrow[u, "\lambda_*"']
\end{tikzcd}
\tag{6.1}
$$

<u>*Step* 7.</u>

各 S_i について、もし、discal 2-orbifold だったら、spherical 2-orbifold になるよう map を修正しておく。(M が ∂-irreducible より、できる。)

<u>*Step* 8.</u>

各 S_i は、incompressible spherical 2-orbifold で、仮定より、separating. また、K の最小性より、$\pi_1(S_i, y_i) \cong K$.

Step 9.

$f^{-1}(B)$ の成分が、2 つ以上あったと仮定する。すると、以下のように、成分の個数を減らす修正がある。

(1) Step 6 の ℓ_t を切ったり、修正したりして、ある i と、ある j について、S_i と S_j を結ぶ binding tie が取れる。これを含む成分を M' とする。
(2) K が単位群 1 ならば、多様体の場合 [St] と同様の修正をすることにより、$f^{-1}(B)$ の成分を 1 つ減らせる。以下、この step では、 $K \neq 1$ とする。
(3) M を S_i と S_j のみで切ったときの M' 以外の成分を M_1, M_2 と置く。 $k=1$ または 2 について、 $\pi_1(M_k) \cong K$ ならば、仮定より、 M_k は、ballic 3-orbifold だから、 S_i, S_j が共に incompressible であることに反する。よって、 $\pi_1(M_i) \not\cong K$ である。
(4) M' を既約化 (mod ∂) したものを N とすると、 補題 (binding tie) より、N に binding tie が取れる。
(5) ι_1 を定値な道が誘導する $\pi_1(S_i, y_i)$ から $\pi_1(N, y_i)$ への準同型写像、ι_2 を binding tie が誘導する $\pi_1(S_j, y_j)$ から $\pi_1(N, y_j)$ への準同型写像とすると、$\iota_1\pi_1(S_i, y_i) = \iota_2\pi_1(S_j, y_j)$ となる。よって、定理（区間積）より、 $N = S_i \times I$ が成り立つ。
(6) 定理の条件 (2), (3) より、 $M' = N$ となる。よって、 M' は区間積である。
(7) 定理 (Retraction) より、 $M' \subset f^{-1}(B)$ にできる。よって、 $f^{-1}(B)$ の成分を 2 個減らせる。

これを有限回繰り返して、成分が 2 つ以上なら減らしていける。0 個になると矛盾。よって、1 個。

Step 10.

上で得られた唯一つの成分 S_i を S と置き、これにより M を M_1 と M_2 に分ける。すると、

$$\pi_1(M, y_i) = \pi_1(M_1, y_i) *_{\pi_1(S_i, y_i)} \pi_1(M_2, y_i)$$

なる分解を作ることができる。さて、 f_* は、$\pi_1(M, y_0)$ から、$\pi_1(X, x_0)$ への同型であり、 $f_*\pi_1(S_i, y_i) = \pi_1(B, x_0)$ かつ、 $f_*\pi_1(M_k, y_i) \subset \pi_1(X_k, x_0)$, $k = 1, 2$ が成り立っていることが、以上の考察より分かる。よって、命題 [Bro, Prop 2.5] より、 $f_*\pi_1(M_k, y_i) = \pi_1(X_k, x_0)$, $k = 1, 2$ が成り立つ。

従って、 S が、分解を実現するものであることが分かる。後は、$\mathcal{P}(M)$ から、初めの M を復元すればよい。埋めた各 ballic 3-orbifold D の境界 ∂D が、 S と交わらなければ、 D を、もとの fake ballic 3-orbifold に戻せばよい。なぜならば、その操作をしても、 S による、$\pi_1(M)$ の分解の仕方が、保たれるからである。

交わっている場合は、交わりの最も内側に注目すれば、 π_1 の分解の仕方を変えない S の取り替えができ、まじわりを減らせる。有限回それを行なって、交わりをなくして

から、上と同様な操作を行なえばよい。∂ を埋めた **ballic 3-orbifolds** についても同様である。 □

7. An application to the compositeness of links

この節では、主定理の証明で用いた手法により結び目が合成であることの十分条件を求める。必要性については知られているので、合わせて必要十分条件となる。

L を S^3 内に埋め込まれた（1 次元の）絡み目とする。2 以上の任意の自然数 n を 1 つ取る。

<u>定理</u>. L を *splittable* でない絡み目とし、その成分を $L_1, L_2, \ldots, L_k$, 各 L_i の勝手なメリディアンを m_i とする。このとき、 L が *composite link*（合成絡み目）であるということの必要十分条件は、

$$\pi_1(S^3 - K)/([m_i]^n, i = 1, 2, \ldots, k) \cong G_1 *_{\mathbb{Z}_n} G_2 \tag{7.1}$$

となることである。 □

<u>注</u>. 主定理が適用できる形ではないので、絡み目の分解として、(7.1) 右辺の群の分解の実現に対応したものが取れるかどうかは分からない。 □

<u>注</u>. L が **splittable** でないという仮定がないときには、(7.1) の条件に、左辺が自由積分解できないというのを付け加えるとよい。 □

<u>証明概略</u>. M を **3-orbifold** で、底空間が S^3 であって、**singular set** が L, その **index** が n であるようなものとする。

L を **composite link** とする。このとき、(7.1) のようになることが知られている。(または、 $\pi_1(M)$ を考えれば分かる。)

逆に、(7.1) が成り立っているとする。 M が主定理の仮定 (c) を満たさないときは、 $\pi_1(M)$ が無限群であることから、 M の素分解の成分数は 2 以上であることが分かる。今、 L は **splittable** でないから、**composite** である。

M が主定理の仮定 (c) を満たすときには、群の分解に沿って、**orbifold composition** X 及び **orbi-map** $F : M \to X$ を作る。主定理の仮定 (3) が言えないので、群の分解を実現する **spherical 2-orbifold** が取れるとは言えないが、とにかく **incompressible spherical 2-orbifold** が 1 個は取れる。 L は **splittable** でないから、**composite** である。 □

<u>系</u>. L を結び目とし、m をその勝手なメリディアンとする。このとき、 L が *composite knot*（合成結び目）であるということの必要十分条件は、

$$\pi_1(S^3 - L)/[m]^n \cong G_1 *_{\mathbb{Z}_n} G_2$$

となることである。 □

REFERENCES

[He] J. Hempel, *3-manifolds*, Ann. of Math. Studies, vol. 86, Princeton Univ. Press, 1976.

[Kn] H. Kneser, *Geschlossene Flachen in dreidimensionalen Mannigfaltigkeiten*, Jahresbericht der Deut. Math. Verein. **38** (1929), 248–260.

[St] J. Stallings, *A topological proof of Gruchko's theorem on free products*, Math. Zeit. **90** (1965), 1–8.

[Ta] Y. Takeuchi, *Waldhausen's classification theorem for finitely uniformizable 3-orbifolds*, Trans. of A.M.S. **328** (1991), 151–200.

[T-Y 1] Y. Takeuchi and M. Yokoyama, *Waldhausen's classification theorem for 3-orbifolds*, preprint.

[T-Y 2] Y. Takeuchi and M. Yokoyama, *PL-least area 2-orbifolds and its applications to 3-orbifolds*, preprint.

[T-Y 3] Y. Takeuchi and M. Yokoyama, *The geometric realization of the decompositions of 3-orbifold fundamental groups*, Top. App. (to appear).

[T-Y 4*] Y. Takeuchi and M. Yokoyama, *3* 次元軌道体の基本群の分解を実現する球面的軌道面, 学会における講演.

[T-Y 4] Y. Takeuchi and M. Yokoyama, *The spherical 2-orbifolds which realize the decompositions of 3-orbifold fundamental groups*, in preparation.

[Th] W. P. Thurston, *The geometry and topology of three-manifolds*, mimeo-graphed notes, Princeton Univ., 1978.

IGAYA, KARIYA 448, JAPAN
E-mail address: `yotake@auecc.aichi-edu.ac.jp`

OHYA, SHIZUOKA 422, JAPAN
E-mail address: `smmyoko@sci.shizuoka.ac.jp`