数理解析研究所講究録
1065 巻 1998 年 44-50

写像の SCHWARZ 微分と単葉性

和田 昌昭 (MASAAKI WADA)

奈良女子大学理学部情報科学科

はじめに.

昨年「Analysis of Discrete Groups II」において，ユークリッド空間の局所微分同相写像に対して Schwarz 微分を定義し，それが Möbius 変換に対して消えることを示した．また，その逆を予想として述べておいた ([W]).

その後，奈良女子大学理学部数学科の小林治氏との共同研究で，この Schwarz 微分を一般の Riemann 多様体にまで拡張し，上の予想も含めた形で Möbius 変換との関係を明らかにした．また，その応用として，C^3 級のはめこみに対する Nehari タイプの単射性定理が得られたので発表する．

1. 曲線の Schwarz 微分.

Riemann 多様体 (M, g) 上の曲線 $x : I \to M$ に対して

$$
\begin{aligned}
s^3x &= \nabla_{\dot{x}}\nabla_{\dot{x}}\dot{x} - \frac{3}{2}(\nabla_{\dot{x}}\dot{x})\dot{x}^{-1}(\nabla_{\dot{x}}\dot{x}) - \frac{R_g}{2n(n-1)}\dot{x}^3 \\
s^2x &= (s^3x)\dot{x}^{-1} \\
&= (\nabla_{\dot{x}}\nabla_{\dot{x}}\dot{x})\dot{x}^{-1} - \frac{3}{2}(\nabla_{\dot{x}}\dot{x})\dot{x}^{-1}(\nabla_{\dot{x}}\dot{x})\dot{x}^{-1} - \frac{R_g}{2n(n-1)}\dot{x}^2
\end{aligned}
$$

と定義する．ただし，∇ と R_g はそれぞれ g に関するリーマン接続とスカラー曲率を表し，積は g に関する Clifford 積によるものとする．Clifford 積について詳しくは[W]を参照してもらうことにして，ここでは接空間 T_xM の Clifford 代数 $Cl(T_xM)$ と外積代数 $\bigwedge T_xM$ との間にベクトル空間としての自然な同型対応があり，その同型対応のもとで $u, v \in T_xM$ に対して，

$$
\begin{aligned}
uv &= u \wedge v - g(u, v) \\
v^{-1} &= -\frac{1}{g(v, v)}v \\
uv^{-1}u &= 2\frac{g(u, v)}{g(v, v)}u - \frac{g(u, u)}{g(v, v)}v
\end{aligned}
$$

となっていることを指摘しておく．したがって，各 $t \in I$ に対して

$$
s^3x(t) \in \bigwedge^1 T_{x(t)}M = T_{x(t)}M, \qquad s^2x(t) \in \bigwedge^0 T_{x(t)}M \oplus \bigwedge^2 T_{x(t)}M
$$

奈良女子大学理学部の小林治氏との共同研究

1997.12.15 "Analysis and Geometry of Hyperbolic Spaces"

となっている．s^2x の 0-成分，2-成分をそれぞれ $s^2x^{(0)}$，$s^2x^{(2)}$ で表す．

曲線論的な意味を見るために，$\sigma=|\dot{x}|$，$\xi=\dot{x}/\sigma$ とおいて s^2x を書き直せば，

$$s^2x = 2\sigma^2\left(\frac{\ddot{\xi}\sigma}{\sigma}-\frac{1}{2}\left(\frac{\dot{\xi}\sigma}{\sigma}\right)^2+\frac{1}{4}\left(\kappa^2+\frac{R_g}{n(n-1)}\right)\right)-\sigma^2(\nabla_\xi\nabla_\xi\xi\wedge\xi)$$

となる．ここで，κ は曲線 x の測地曲率である．これを Frenet-Serret 方程式

$$\nabla_\xi\nabla_\xi\xi=-\kappa^2\xi+(\nabla_\xi\xi)\nu+\tau$$

(ただし，ν は単位主法線ベクトル，τ は捩率ベクトル) と見比べれば，次がわかる．

命題 1.1. $s^2x^{(2)}(t)=0 \iff \dot{\kappa}(t)=0,\ \tau=0.$

従って，方程式 $s^2x=0$ の解曲線は測地円であって，$s^2x^{(0)}(t)=0$ をみたすようにうまくパラメータをとったもの，ということができる．方程式 $s^2x=0$ をみたす曲線を Möbius 円と呼ぶことにする．M 内の一点で 1 階微分および 2 階微分のベクトルを指定したとき，Möbius 円が一意的に定まることに注意する．ユークリッド空間では，Möbius 円は Möbius 変換による等速直線の像に一致する．

あとで曲線の Schwarz 微分を写像の単射性に応用する際に重要なのは，次の定理である．

定理 1.2. ユークリッド空間の曲線 $x: I\to\mathbf{R}^n$ が $s^2x^{(0)}(t)\le 0$ をみたせば，x は単射である．

後で示す s^2x の Möbius 変換不変性と，立体射影 $\mathbf{R}^n\to S^n$ が Möbius 変換であることを用いると，定理 1.2 中の $\mathbf{R}^n$ を S^n で置き換えてもよいことがわかる．

証明．各 $t\in I$ に対し，点 $x(t)$ において曲線 x を 2 階まで近似する Möbius 円 m をとると，

$$m(\infty)=m(-\infty)=x(t)-2\dot{x}(t)\ddot{x}(t)^{-1}\dot{x}(t)$$

となっている．$x(t)$ で曲線 x に直交し $m(\infty)$ を通る (唯一の) 超球面を $S(t)$ とし，$\mathbf{R}^n-S(t)$ の 2 つの連結成分のうち，十分小さな $\epsilon>0$ について $x(t+\epsilon)$ を含む側を $B(t)$ とする．$B(t)$ が t について集合の包含関係の意味で単調減少となることを示す．

$S(t)$ の中心を $C(t)$，半径を $r(t)$ とする．$t_1<t_2$ に対して

$$|C(t_2)-C(t_1)|\le|r(t_2)-r(t_1)| \implies B(t_1)\supset B(t_2)$$

となることが容易にわかる．$r(t)$ と $C(t)$ がそれぞれ

$$r(t)=\frac{|\dot{x}(t)|^3}{\langle\dot{x}(t),\ddot{x}(t)\rangle}$$
$$C(t)=x(t)-r(t)\frac{\dot{x}(t)}{|\dot{x}(t)|}$$

と書けることを用いて，$|\dot{C}(t)|^2-\dot{r}(t)^2$ を計算すれば，

$$s^2x^{(0)}(t)=\frac{|\dot{C}(t)|^2-\dot{r}(t)^2}{2r(t)^2}$$

となることがわかるので，$s^2x^{(0)}(t)\le 0$ ならば，$B(t)$ は t について単調減少である．とくに，x は単射である．

2. 写像の Schwarz 微分と Möbius 変換.

M および N を Riemann 多様体として，(C^3 級の) はめこみ

$$f : M \longrightarrow N$$

を考える．M 上の非特異曲線 x に対して s^3x が定義されているが，x の f による像 $y = f \circ x$ は N の非特異曲線だから s^3y も定義されている．そこで

$$\begin{aligned} S^3f &= s^3y - f_*(s^3x) \\ S^2f &= (S^3f)\dot{y}^{-1} \\ &= s^2y - f_*(s^3x)f_*(\dot{x})^{-1} \end{aligned}$$

と定義する．S^2f を f の Schwarz 微分と呼ぶ．あとで，この S^2f が古典的な Schwarz 微分の拡張になっていることを示す．

$S^3f(t)$ と $S^2f(t)$ は曲線 x を用いて定義されているが，これらは容易にわかるように，$x(t)$ での x の 1 階微分 $X = \dot{x}$ および 2 階微分 $Y = \nabla_{\dot{x}}\dot{x}$ のみによって定まるので，必要に応じてそれぞれ $S^3f(X,Y)$，$S^2f(X,Y)$ と書くことにする．

Schwarz 微分 S^2f と Möbius 変換の関係を調べるために，しばらく $\dim M = \dim N$ とし，局所微分同相写像 $f : M \to N$ について考えることにしよう．

命題 2.1. 局所微分同相写像 $f : M \to N$ について，次がなりたつ．

(1) $S^2f = 0 \Longleftrightarrow f$ が *Möbius* 円を *Möbius* 円に写す．

(2) $S^2f^{(2)} = 0 \Longleftrightarrow f$ が測地円を測地円に写す．

証明. (1) は定義より明らか．x, y をそれぞれ M, N の曲線で，$y = f \circ x$ をみたすものとするとき，

$$\begin{aligned} -|\dot{y}|^2\, S^2f^{(2)} &= S^3f \wedge \dot{y} \\ &= s^3y \wedge \dot{y} - f_*(s^3x) \wedge f_*(\dot{x}) \\ &= -|\dot{y}|^2\,(s^2y)^{(2)} + |\dot{x}|^2\, f_*^{\wedge}(s^2x^{(2)}) \end{aligned}$$

となっていることから，(2) がわかる．

さて，局所微分同相で命題 2.1 の条件(1) をみたすものを Möbius 変換，条件(2) をみたすものを共円変換と呼ぶことにしよう．すると明らかに，Möbius 変換は共円変換ということになるが，実は $\dim M = \dim N \geq 2$ のとき逆がなりたつ．これは (特に 2 次元の) ユークリッド空間の変換については，よく知られた結果であるが，一般の Riemann 多様体の場合には，微分幾何の専門家の間でも，あまり知られていないようである．

定理 2.2. $\dim M = \dim N \geq 2$ のとき，局所微分同相写像 $f : M \to N$ に対して

$$S^2f = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad S^2f^{(2)} = 0.$$

歴史的には，まず矢野 [Y] が共形な共円変換は Möbius 変換になることを示し，その後 Vogel [V] が共円変換は必ず共形になることを示した．Osgood-Stowe [OS] は少し異なる観点から矢野の結果を証明しているが，Vogel の結果は参照していない．いずれにせよ，結果的には 2 次元以上で共円変換と Möbius 変換は区別する必要がない．

この定理の証明は，かなり大掛かりな計算が必要なので省略する．[KW] に詳しく書いているので，そちらを参照してほしい．ただ，ユークリッド空間の変換 $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$

の場合について少し述べておくことにしよう．この場合上で定義した S^3f，S^2f は，定式化が少し異なるが，[W] で定義したものと一致する．$X=\dot{x}$，$Y=\ddot{x}$ とおいて，$S^2f^{(2)}(X,Y)$ の Y に関する 2 次項を計算すると

$$-\frac{3}{\langle f_*(X), f_*(X)\rangle}\left(\frac{\langle f_*(X), f_*(Y)\rangle}{\langle f_*(X), f_*(X)\rangle}-\frac{\langle X,Y\rangle}{\langle X,X\rangle}\right)X\wedge Y$$

となる．f が共円変換ならば，これが任意の X,Y に対して 0 になるので，共形になることがわかる．$n\geq 3$ の場合，共形変換は Liouville の定理により Möbius 変換である．$n=2$ の場合には共形変換を正則関数と考えて $\mathrm{Im}\,S_f(z)=0$ と思ってもよいし，もっと幾何学的にやってもよいが，やはり共円変換は Möbius 変換になる．ユークリッド空間の場合には，これらはもちろん，いわゆる Möbius 変換のことである．したがって，[W] での予想はなりたつ．

定理 2.2 の証明中，次の命題も示されるが，証明はやはり省略する．

命題 2.3. 局所微分同相写像 $f: M\to N$ が共形ならば，$S^3f(X,Y)$，$S^2f(X,Y)$ の値は Y にはよらない．

最後に，S^2f が古典的な Schwarz 微分の一般化になっていることを見ておこう．そのために，複素数体 $\mathbf{C}$ を $\mathbf{R}^2$ の Clifford 代数 Cl_2 の部分代数 $Cl_2^{(ev)}=\mathbf{R}\oplus\mathbf{R}\mathbf{i}_1\mathbf{i}_2$ と，対応 $\mathbf{i}\leftrightarrow\mathbf{i}_1\mathbf{i}_2$ によって同一視する．ただし $\mathbf{i}_1,\mathbf{i}_2$ は $\mathbf{R}^2$ の標準基底である．正則関数 $f:\mathbf{C}\to\mathbf{C}$ を Riemann 多様体のはめこみと考えて S^2f を計算するために，$\mathbf{C}$ を $\mathbf{R}^2$ と同一視する必要があるが，それは $\mathbf{i}_1$ による右乗法によって与えられる:

$$R_{\mathbf{i}_1}:\mathbf{C}=Cl_2^{(ev)}\longrightarrow\mathbf{R}^2=Cl_2^{(1)}.$$

このとき，

$$S^2f=S_f(z)\,\dot{z}^2\in\mathbf{C}=Cl_2^{(ev)}, \tag{2-1}$$

となる．ここで $S_f(z)$ は正則関数 f の古典的な Schwarz 微分

$$S_f(z)=\frac{f'''(z)}{f'(z)}-\frac{3}{2}\left(\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)^2$$

である．実際，z,w が $w(t)=f(z(t))$ をみたす $\mathbf{C}$ の曲線とすると，

$$\begin{aligned}\dot{w}\,\mathbf{i}_1&=f'(z)\,\dot{z}\,\mathbf{i}_1,\\ \ddot{w}\,\mathbf{i}_1&=f''(z)\,\dot{z}^2\,\mathbf{i}_1+f'(z)\,\ddot{z}\,\mathbf{i}_1,\\ \dddot{w}\,\mathbf{i}_1&=f'''(z)\,\dot{z}^3\,\mathbf{i}_1+3f''(z)\,\ddot{z}\,\dot{z}\,\mathbf{i}_1+f'(z)\,\dddot{z}\,\mathbf{i}_1,\end{aligned}$$

となり，簡単な計算で

$$s^3w=(f'''(z)-\frac{3}{2}f''(z)^2f'(z)^{-1})\,\dot{z}^3\,\mathbf{i}_1+f'(z)\,s^3z$$

が得られるので (2-1) がわかる．

3. 単射性定理.

命題 2.3 は，一般のはめこみ $f: M\to N$ に対しては成り立たない．しかし，f が共形的はめこみのとき，$S^2f^{(0)}(X,Y)$ は Y にはよらないことがわかるので，$S^2f^{(0)}(X)$ と書くことにする．主定理を述べよう．

定理 3.1. (M, g) を *Riemann* 多様体，C を実数として，M の任意の 2 点に対して，それらを通る(開)測地円で，測地曲率 κ と長さ l が

$$C \leq \frac{2\pi^2}{l^2} - \frac{1}{2}\kappa^2 \tag{3-1}$$

をみたすものがあると仮定する．このとき，共形的はめこみ

$$f : M \longrightarrow \mathbf{R}^n \ (\text{または } S^n)$$

が M の各点で任意の接ベクトル $X \neq 0$ に対して

$$\frac{S^2 f^{(0)}(X)}{g(X, X)} \leq C - \frac{R_g}{2n(n-1)} \tag{3-2}$$

をみたせば，f は単射である．

この定理の証明には次の補題を用いる．

補題 3.2. 長さ l 以下の測地円はパラメータを取り替えることにより，

$$\frac{s^2 x}{g(\dot{x}, \dot{x})} = \frac{1}{2}\left(\kappa^2 + \frac{R_g}{n(n-1)}\right) - \frac{2\pi^2}{l^2}$$

をみたすようにできる．ただし κ は x の測地曲率である．

証明. 弧長パラメータ s を測地円上で $-l/2 < s < 1/2$ となるようにとっておき，パラメータを $t = \tan \frac{\pi s}{l}$ に取り替えればよい．

定理 *3.1* の証明. M の任意の異なる 2 点 p, q に対して $f(p) \neq f(q)$ となることを示せばよい．p, q を通る測地円で，(3-1) をみたすものをとる．補題3.3 により，パラメータをうまくとれば

$$\begin{aligned}\frac{s^2 x}{g(\dot{x}, \dot{x})} &= \frac{1}{2}\left(\kappa^2 + \frac{R_g}{n(n-1)}\right) - \frac{2\pi^2}{l^2} \\ &\leq \frac{R_g}{2n(n-1)} - C \end{aligned} \tag{3-3}$$

とできる．

一方 $f : M \to \mathbf{R}^n$ を共形的はめこみとし，$y = f \circ x$ とおく．このとき，$s^2 x \in \mathbf{R}$ だから $s^3 x = (s^2 x)\dot{x}$，よって $f_*(s^3 x) = (s^2 x) f_*(\dot{x})$ となっていることに注意すれば，

$$\begin{aligned} s^2 y &= S^2 f(\dot{x}, \nabla_{\dot{x}} \dot{x}) + f_*(s^3 x)\, f_*(\dot{x})^{-1} \\ &= S^2 f(\dot{x}, \nabla_{\dot{x}} \dot{x}) + s^2 x. \end{aligned}$$

従って，(3-2)，(3-3) および $S^2 f$ が 2 階微分 $\nabla_{\dot{x}} \dot{x}$ によらないことより，

$$\begin{aligned} \frac{(s^2 y)^{(0)}}{g(\dot{x}, \dot{x})} &\leq \frac{S^2 f^{(0)}(\dot{x})}{g(\dot{x}, \dot{x})} + \frac{s^2 x}{g(\dot{x}, \dot{x})} \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

となり，定理 1.2 より $y = f \circ x$ は単射であるから，とくに $f(p) \neq f(q)$ となる．

さて，定理 3.1 を正則関数に適用して，どういう結果が得られるか見てみよう．正則関数の単葉性に関しては須川 [S] に詳しい解説がある．

まず，単位円板 D^2 上の正則関数 $f : D^2 \to \mathbf{C}$ を考えよう．D^2 上のユークリッド計量 $ds = |dz|$，双曲計量 $ds = \frac{2|dz|}{1-|z|^2}$，球面計量 $ds = \frac{2|dz|}{1+|z|^2}$ に対して，それぞれ $\frac{R_g}{2} = 0, -1, +1$ となっている．これらは互いに Möbius 同値な計量だから，どれを用いても $S^2 f = S_f(z)$ となることに注意して定理 3.1 を適用すれば，次が得られる．

系 3.3. 単位円板 D^2 上の正則関数 $f : D^2 \to \mathbf{C}$ は，次のいずれかをみたせば単葉である．

(1) $|S_f(z)| \leq \frac{\pi^2}{2}$ *for* $z \in D^2$,
(2) $|S_f(z)| \leq \frac{2}{(1-|z|^2)^2}$ *for* $z \in D^2$,
(3) $|S_f(z)| \leq \frac{6}{(1+|z|^2)^2}$ *for* $z \in D^2$.

条件(1)と(2)が Nehari [N] の単葉性の十分条件である．Osgood-Stowe [OS] もこの系の n 次元版を証明している．

定理 3.1 の別の応用としては，例えば次のようなものが得られる．

系 3.4. 単位円周 $C = \{\, z \in \mathbf{C} \mid |z| = 1 \,\}$ の近傍で定義された正則関数 f が

$$|S_f(z)| < \frac{3}{2} \quad \textit{for} \quad z \in C$$

をみたせば C 上で単射，従って C のある近傍で単葉である．

関数 $f(z) = z^2$ は C 上で $|S_f(z)| = 3/2$ をみたすので，上の条件中の定数 3/2 は最良である．

もう少しがんばって計算すればアニュラスもできる．

系 3.5. $r > 1$ に対して，アニュラス $A_r = \{\, z \in \mathbf{C} \mid 1 < |z| < r \,\}$ 上で定義された正則関数 $f : A_r \to \mathbf{C}$ が

$$|S_f(z)| \leq \frac{2}{(1+r^2)^2}\left(\frac{\pi^2}{4(\arctan\frac{1}{r})^2} - 1\right) \quad \textit{for} \quad z \in A_r$$

をみたせば単葉である．

定理 3.1 では，はめこみの共形性を仮定したが，2 点を測地円ではなく測地線で結ぶかわりに，はめこみの共形性を仮定しないバージョンもある:

定理 3.6. (M, g) を *Riemann* 多様体とし，M の任意の 2 点に対して，それらを通る測地線があると仮定する．このとき，はめこみ

$$f : M \longrightarrow \mathbf{R}^n \ (\text{または } S^n)$$

が M の各点で任意の接ベクトル $X \neq 0$ に対して

$$S^2 f^{(0)}(X, 0) \leq -\frac{R_g}{2n(n-1)}\, g(X, X)$$

をみたせば，f は単射である．

証明は，定理 3.1 の証明とほとんど同じなので省略する．

さて，正則とは限らない一般の複素関数 f: $\mathbf{C} \to \mathbf{C}$ の場合を考えよう．定理 3.6 を Poincaré 円板上の複素関数に適用すれば，Nehari の定理の非正則関数バージョンが得られる:

系 3.7. 単位円板 D^2 上の (C^3級) 非特異複素関数 $f: D^2 \to \mathbf{C}$ は，すべての $z \in D^2$ と $X \in \mathbf{C}$ $(X \neq 0)$ に対して，

$$\mathrm{Re}\, S^2 f(X,0) \leq \frac{2}{(1-|z|^2)^2}|X|^2$$

を満たせば，単射である．

同一視 $\mathbf{C} = Cl_2^{(ev)}$ のもとで，Schwarz 微分 $S^2 f(X,0)$ を書き下せば，次のようになる．

$$S^2 f(X,0) = \frac{\mathrm{Num}}{\mathrm{Den}}.$$

ただし，

$$\begin{aligned}
\mathrm{Num} = {} & (f_{zzz}f_z - \frac{3}{2}f_{zz}^2)X^4 \\
& + (f_{zzz}f_{\bar z} + 3f_{zz\bar z}f_z - 6f_{zz}f_{z\bar z})X^3\bar X \\
& + (3f_{zz\bar z}f_{\bar z} + 3f_{z\bar z\bar z}f_z - 3f_{zz}f_{\bar z\bar z} - 6f_{z\bar z}^2)X^2\bar X^2 \\
& + (3f_{z\bar z\bar z}f_{\bar z} + f_{\bar z\bar z\bar z}f_z - 6f_{z\bar z}f_{\bar z\bar z})X\bar X^3 \\
& + (f_{\bar z\bar z\bar z}f_{\bar z} - \frac{3}{2}f_{\bar z\bar z}^2)\bar X^4, \\
\mathrm{Den} = {} & f_z^2X^2 + 2f_zf_{\bar z}X\bar X + f_{\bar z}^2\bar X^2.
\end{aligned}$$

f が正則関数の場合には，通常の Schwarz 微分になっていることが読み取れる．

REFERENCES

[KW] Kobayashi, O. and Wada, M., *Circular Geometry and the Schwarzian*, preprint.

[N] Nehari, Z., *The Schwarzian derivative and schlicht functions*, Bull. Amer. Math. Soc. **55** (1949), 545–551.

[OS] Osgood, B and Stowe, D., *The Schwarzian derivative and conformal mapping of Riemannian manifolds*, Duke Math. J. **67** (1992), 57–99.

[S] 須川 敏幸, 正則関数の単葉性条件と擬等角拡張性, Topics in Complex Analysis (1995).

[V] Vogel, W. O., *Kreistreue Transformationen in Riemannschen Räumen*, Arch. Math. **21** (1970), 641–645.

[Y] Yano, K., *Concircular Geometry I. Concircular Transformations*, Proc. Imp. Acad. Japan **16** (1940), 195–200.

[W] Wada, M., *A generalization of the Schwarzian via Clifford numbers*, preprint (日本語訳:Clifford 数による Schwarz 微分の一般化, 数理研講究録「Analysis of Discrete Groups II」).

〒630 奈良市北魚屋西町 奈良女子大学理学部情報科学科

E-mail address: wada@ics.nara-wu.ac.jp