数理解析研究所講究録
1066 巻 1998 年 121-132

場の量子論における秩序変数と large deviation

京都大学数理解析研究所
小嶋　泉

1　場の量子論における order parameter と centre

量子力学や相対論的場の量子論で考察の対象となる状態・表現は，通常，純粋状態・既約表現に限定されることが多い：例えば，量子力学では「波動関数」，場の量子論では「縮退」のない真空状態と既約な真空表現。もちろん，統計力学・有限温度の場の理論の場合には，問題の性格からして混合状態・可約表現の扱いが不可避だが，そこでも温度平衡状態に課される「安定性」の要請ゆえに，殆どの議論は熱力学的「純粋相」としての ergodic KMS states に集中する。このような状況設定のメリットは，cluster property の成立（即ち，空間的遠方での長距離相関の消失）によって，物理量の漸近的振舞に関する理論的考察に便利な種々の技法がもたらされるところにある。ここに共通する一般的数学的特徴は，表現された物理量の代数が *factor*, すなわち，trivial な centre を持つような（von Neumann）代数になることであり，こういう状態・表現は一般に factor state・factor 表現と呼ばれる。

ところが一方，centre の triviality のため，物理系の外から加えられる「外場」や巨視的物理量としての「秩序変数」（= order parameter），特にそのゆらぎにかかわる重要な問題は，理論的考察の外に置かれることになる。そして，そうした概念が本質的に絡む問題を扱う時には，しばしば首尾一貫性のない場当たり的な議論に終始する例が見られるのである。場合によると，cluster property の成立を場の量子論に課すべき「公理」とみなす立場（たとえば，Weinberg の最近の「教科書」）もあるが，量子論の一般的な枠組そのものに cluster property を破る状況の扱いを禁ずる内在的理由があるわけではない。むしろ，異なった熱力学的相の共存や相境界での界面効果，相転移等，複数の factor 表現が関与する問題の一般的考察に non-factor の状態・表現の考察が不可欠であることは言を俟たない。それだけではなく，ミクロとマクロの相互関連・相互移行，巨視的量子効果のようなミクロ・マクロの相互浸透に関わる議論を統一的な見方に立って扱おうとすれば，non-factor 表現での centre の存在はきわめて本質的なものとなる。

ここで，non-trivial な centre を持つ表現に関わる理論展開がこれまでなされてこなかったなどと主張するつもりは毛頭ない。例えば，Doplicher-Haag-Roberts [1] 並びに Doplicher-Roberts [2] によって展開された superselection theory では，（第 1 種）ゲージ不変な観測可能量が作る代数 $\mathfrak{A}$（およびその時空的局所構造）とその真空表現についてのデータだけから出発して，ゲージ可変な「荷電」状態を $\mathfrak{A}$ の非同値表現 = superselection sectors として，また，直接観測にはかからないゲージ可変な場の量としての field algebra $\mathfrak{F}$ および内部対称性の変換群としての（第 1 種）ゲージ群 G をも，すべてそれから構成することによって，Bose-Fermi 統計性（及び

低次元時空での braid 統計性）と内部対称性の深い由来を明らかにした。そこでの超選択則とは（$\mathfrak{A}$ に関する）non-factor 表現の存在にほかならない。また，町田・並木による観測問題の定式化 [3] では，観測過程における decoherence の理論的導出を目的として，連続的超選択則が導入される。

しかし，現実の物理的状況における巨視的物理量としての order parameter が，強磁性体の磁化において典型的に見られるように，多くの場合**対称性の自発的破れに伴う**ものであるのに対して，前者の superselection theory はこれまでのところ自発的破れのない対称性に限定されている。また，後者の観測問題での superselction rule (= nontrivial centre) は，直接観測にはかからない測定装置の *irrelevant* な自由度に関するものである。それに対してここでの関心は，現実の観測にかかるような巨視的可視的物理量とミクロの量子論的世界との対応関係を，対称性の自発的破れ並びに「ゆらぎ」を軸として考えることにある。この目的のために，(熱力学的)「相」の概念と order parameter,（表現された）物理量の代数の centre 等にかかわる一般的な数学的構造を，まず必要最小限の範囲で整理しておこう。

2 純粋相・混合相と order parameter, centre について

真空 $T=0°K$ については，スペクトル条件に基づく一般的定理により，真空の [一意性]，それが [pure state] であること，あるいは，対応する GNS 表現の [既約性]，及び，[cluster property] の成立は，すべて同値であり，与えられた真空表現が既約でなければ，いつでもそれを複数の既約な真空表現の直和［i.e., 真空縮退］の形に一意的に分解することができる。このゆえに真空状況での量子論的本質の「大部分」は，理論の基礎単位としての既約な真空表現に含まれていると見て大過なく，それが，通常の議論での既約表現への限定を正当化した。ただしそういう見方では，理論のもたらす結果の「解釈」に際して不可欠なミクロ・マクロ相互関係のうち，マクロ部分に関わる概念・認識を暗黙の了解事項として理論的に明示せず，[macroscopic visible results = c-numbers] という標語だけで，各人の直観に委ねる結果となる。

有限温度 $T \neq 0°K$ の場合には，熱平衡状態としての KMS 状態はすべて混合状態で，その GNS 表現は可約だから，これ以上分解できない熱平衡状態の「単位」となる熱力学的「純粋相」を定義しようとすると，純粋状態／混合状態，既約表現／可約表現，という視点は役に立たない。そこで，物理量の代数 $\mathfrak{F}$ 上の状態全体のつくる凸集合 $E_{\mathfrak{F}}$ の中で逆温度 β におけるすべての KMS 状態の集合 K_β を考えると，これは凸閉集合であるだけでなく，“simplex”，即ち，K_β の任意の元に対して K_β の中での端点分解が一意的に決まるという非常に良い性質を持つことが知られている [4]。それに基づき，(温度 $1/k_B\beta$ での）熱力学的純粋相が K_β の端点として定義される [4]。

すると，KMS 状態 ω_β が**純粋相**であることは，対応する GNS 表現が “factor”，即ち，$\mathfrak{M} \equiv \pi_\beta(\mathfrak{F})''$ の centre $\mathfrak{Z} \equiv \mathfrak{M} \cap \mathfrak{M}'$ が trivial ($\mathfrak{Z} = \mathbb{C}1_{\mathfrak{H}_\beta}$) という条件と同値になる [4]。そして，$K_\beta$ の中から純粋相を２つとると，それらは一致するか *disjoint* かの何れかに限られる [4]。disjoint とは，単なる「非同値」よりもっと強く，２つの状態に対応する GNS 表現からそれぞれの任意の部分表現を１つずつとると，常にそれらが unitary 非同値になる，ということである。もう一

つ重要な事実は，(局所可換性，あるいは，それを少し一般化して，空間並進に関する asymptotic abeliannes [see [4]] の仮定の下に) factor state は常に空間並進に関して cluster property を持つことである：すなわち，物理量 $A \in \mathfrak{F}$ の $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ による空間並進を $A(\boldsymbol{x})$ と書くと ω が純粋相の時，

$$|\omega(A(\boldsymbol{x})B) - \omega(A(\boldsymbol{x}))\omega(B)| \underset{|\boldsymbol{x}|\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

熱力学的純粋相の持つこれらの望ましい性質は，実はそれが KMS 条件を満たす熱平衡状態であることに由来するのではなく，(局所可換性あるいは asymptotic abelianness の仮定の下に) factor state であることからの帰結である。そこで言葉を流用して，KMS 状態以外の場合にも，factor state を一般的に「純粋相」pure phase とよぶ。有限自由度の量子系に限定して考えるなら，任意の factor 表現は 1 つの既約表現を任意個数だけ直和したものとして書き表わすことが可能である。しかし，無限自由度系では，そうした表わし方に一義的な意味づけは不可能で，factor 表現自体を，それ以上分解しても意味のないひとまとまりの単位として扱う方がよい。

純粋相でない場合が「混合相」mixed phase で，これには非自明な centre $\mathfrak{Z}$ が対応する。定義より $\mathfrak{Z}$ は可換代数だから，その全ての元を一斉に「同時対角化」することができて，その固有値の全体 $Spec(\mathfrak{Z})$ は compact Hausdorff 空間をなし，$\mathfrak{Z}$ は $Spec(\mathfrak{Z})$ 上の関数環と同型になる（Gel'fand の定理 [4])。

上述のように，任意の真空状態は cluster 性を満たす純粋状態としての真空，すなわち，縮退なしの真空にまで一意的な分解が常に可能であるが，真空でない一般の状態については，純粋状態にまで一意分解できるとは限らない。しかし，任意の状態を cluster property を満たす純粋相=factor state にまで一意的に分解することは常に可能で，これは centre $\mathfrak{Z}$ の「同時対角化」に対応して，「中心分解」と呼ばれる。

「相」と centre の間にはもっと深い関係がある：2 つの「純粋相」の異同は centre の元のみを用いて判別することが常に可能である。即ち，ω_1 と ω_2 を 2 つの異なる純粋相とすれば，(この 2 つの GNS 表現の直和表現の) centre の中に，この 2 つの状態で異なる値をとるような元が必ず存在する [5]：$\exists C \in \mathfrak{Z}$ s.t. $\omega_1(C) \neq \omega_2(C)$。この意味で $Spec(\mathfrak{Z})$ の個々の点は，考えている混合相に含まれる純粋相を 1 つ 1 つ区別する *order parameter* の実現値であり，この上の関数として与えられた centre の元 $C \in \mathfrak{Z}$ とは，つまり巨視的物理量としての order parameter そのものに他ならない。そして，この巨視的物理量 C には，それに収束するミクロ量子系の物理量の或る近似列 $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$，$A_n \in \mathfrak{F}$ が付随する。(D.Buchholz 氏の用語法に従って) このような近似列のことを，仮に *central sequence* と呼んでおこう。

こうして，純粋相とは order parameter が特定の値に定まり，cluster property を満たす状態，混合相とは $Spec(\mathfrak{Z})$ 上を order parameter の値が統計的に揺らぎ，遠距離相関が残って cluster property が破れた状況として，簡潔に理解される。次節で詳しく見るように，異なる order parameter の値に対応する純粋相は相互に disjoint で，系の物理量を用いてこれらの状態を相互に結びつけることはできないから，物理量の代数は block diagonal な形に表現される。そうすると，異なる直和成分間で状態ベクトルの superposition をとっても，直交性により密度行列で書いた混合状態に帰着してしまうことになり，これは「超選択則」の成立にほかならない。

3 Centre の数学的起源

そこで，centre の由来について，もう少し詳しく考えてみよう。まず，抽象的数学的なレベルでは，それは disjoint な表現の存在ということ自体に起因する。物理量のつくる代数 $\mathfrak{F}$ を C^*-代数とすると，そのあらゆる表現を含む普遍表現 π_u とそれに対応する普遍包絡 von Neumann 代数 $\mathfrak{F}''$ という概念がある（例えば，[6] 参照）：

$$\pi_u = \bigoplus_{\omega \in E_{\mathfrak{F}}} \pi_\omega \quad \text{defined on } \mathfrak{H}_u \equiv \bigoplus_{\omega \in E_{\mathfrak{F}}} \mathfrak{H}_\omega,$$
$$\mathfrak{F}'' \equiv \pi_u(\mathfrak{F})'' \simeq \mathfrak{F}^{**}.$$

このとき，任意の状態 $\omega \in E_{\mathfrak{F}}$ に対して，$\mathfrak{H}_u$ の単位ベクトル Ω が存在し，ω を $\mathfrak{F}''$ 上に normal state として拡張した状態 $\tilde{\omega}$ が，関係 $\tilde{\omega}(A) = \langle \Omega \,|\, A\Omega \rangle$ によって一意に定まる。この対応関係 $\omega \to \tilde{\omega}$ により，$E_{\mathfrak{F}}$ は $\mathfrak{F}''$ の normal state の全体と，$\mathfrak{F}$ の dual $\mathfrak{F}^*$ は $\mathfrak{F}''$ の predual $\mathfrak{F}''_*$ と，それぞれ同一視される。[“normal state” とは von Neumann 代数の σ-weak topology について連続な状態のことで，分かり易く言うと density operator で書ける状態である。“predual” とは，σ-weak topology で連続な linear functional の全体。] そして，$\mathfrak{F}$ の（非退化な）表現 $(\pi, \mathfrak{H})$ が任意に与えられると，$\mathfrak{F}$ 上で定義された π を $\mathfrak{F}''$ 上に拡張するような $\mathfrak{F}''$ から$\pi(\mathfrak{F})''$ の上への normal な 準同型 π'' が一意的に存在する。

一般に，C^*-代数 $\mathfrak{F}$ の表現 Hilbert 空間やそこに働く von Neumann 代数 $\pi(\mathfrak{F})''$，その可換な部分代数である centre 等の概念は，考察する state あるいは表現を指定してはじめて定まった意味を持つが，包絡代数 $\mathfrak{F}''$ と普遍表現 $(\pi_u, \mathfrak{H}_u)$ を考えれば，任意の状況で現れる表現空間とそこで定義された von Neumann 代数やその centre を各々，定まった Hilbert 空間 $\mathfrak{H}_u$ の部分空間，$\mathfrak{H}_u$ に働く包絡代数 $\mathfrak{F}''$ の部分代数，またこの $\mathfrak{F}''$ の centre として，取り扱うことができて都合がよい。そして状態，表現の分類で，この包絡代数 $\mathfrak{F}''$ の centre に属する projections が，以下のように本質的な役割を果たす。

前節で，無限自由度量子系では勝手な表現を既約表現にまで一意分解できるとは限らず，一般に意味があるのは factor 表現への分解までで，その factor 表現の「内部」に同じ（既約）表現が何回出現するかを区別しても意味がないことを指摘した。同じ一つの既約表現から成る表現でも多重度が違えば unitary 同値には成り得ないから，今の文脈で表現を分類するのに unitary 同値か否かだけを考えたのでは不十分で，多重度の違いを吸収した分類が必要である。次の命題に示されるように，ちょうどふさわしい分類基準は *quasi-equivalence* の概念によって与えられる。

Proposition[6, 4]：C^*-代数 $\mathfrak{F}$ の表現 π_1, π_2 について，以下の条件はすべて同値。

(i) π_1 のどんな（non-trivial な）部分表現も π_2 と disjoint ではなく，π_2 のどんな（non-trivial な）部分表現も π_1 と disjoint ではない，

(ii) 任意の $A \in \mathfrak{F}$ について $\pi_2(A) = \Phi(\pi_1(A))$ が成り立つような von Neumann 代数の同型写像 $\Phi : \pi_1(\mathfrak{F})'' \to \pi_2(\mathfrak{F})''$ が存在する，

(iii) 或る基数 n_1, n_2 が存在して π_1 の多重表現 $n_1\pi_1$ と π_2 の多重表現 $n_1\pi_2$ が unitary 同値に

なる,

(iv) $\mathfrak{F}$ の表現 $(\pi, \mathfrak{H})$ と $\mathfrak{H}$ 上の density operator ρ によって $\omega(A) = \mathrm{Tr}(\rho\pi(A))$ の形に表される $\mathfrak{F}$ の状態 ω を π-normal であると言い，π-normal な状態の全体 $\mathfrak{f}(\pi)$ を π の *folium* と呼ぶと，$\mathfrak{f}(\pi_1) = \mathfrak{f}(\pi_2)$,

π_1, π_2 を同一の表現 ρ の部分表現とし，P_1, P_2 を π_1, π_2 に対応する projections $\in \rho(\mathfrak{F})'$ とすると，上記 (i)-(iv) は次の条件とも同値：

(v) P_1, P_2 の central support $c(P_1), c(P_2)$ が一致する。

ただし $\mathfrak{M}$ を von Neumann 代数とするとき，projection $P(\in \mathfrak{M}'$ or $\mathfrak{M})$ の central support $c(P)$ とは，$FP = P$ を満たすような projection $F \in \mathfrak{Z} = \mathfrak{M} \cap \mathfrak{M}'$ のうちで最小のもののことである。上の同値な条件の何れか一つ，したがって，すべてが成り立つ時，２つの表現 π_1, π_2 は *quasi-equivalent* であると言い，$\pi_1 \approx \pi_2$ と記す。表現に対する quasi-equivalence の定義に対応して，状態の quasi-equivalence も定義される：$\mathfrak{F}$ の２つの状態 ω_1, ω_2 は，対応する GNS 表現 $\pi_{\omega_1}, \pi_{\omega_2}$ が quasi-equivalent のとき，quasi-equivalent と言う。($\mathfrak{F}$：可換の場合には，ω_1, ω_2 に対応する確率測度の同値性と等価。)

上の (iii) がちょうど,「多重度を無視しての unitary 同値性」ということに対応する。したがって，π_1, π_2 の何れもが既約表現なら，quasi-equivalence は通常の unitary 同値性に帰着する。

表現 $(\pi, \mathfrak{H})$ における vector states の全体を $\mathfrak{V}_\pi := \{ \omega \in E_{\mathfrak{F}} ; \exists \Psi \in \mathfrak{H} \text{ s.t. } \omega(A) = \langle \Psi \,|\, \pi(A)\Psi \rangle \text{ for } \forall A \in \mathfrak{F}\}$ とすれば，２つの表現 π_1, π_2 の unitary 同値性は，条件 $\mathfrak{V}_{\pi_1} = \mathfrak{V}_{\pi_2}$ と同値になる。これに対応して，(iv) は，folium 即ち density operators で書かれる状態の集合の一致を主張する。状態準備に必要な操作として，状態混合，filtration (or purification)，状態摂動等の重要性を考えると，folium はこれらの operations に関して閉じた集合を成しており，quasi-equivalence に基づいた状態の分類・同定を考える方が，unitary 同値性の概念よりも実際的・物理的な状況設定に即した捉え方だと言える [7]。

そして，上の (v) での ρ として普遍表現 π_u を採り，$\mathfrak{H}_u$ の中で表現 π に対応する projection の central support を $c(\pi)$ と書けば，mapping $(\pi, \mathfrak{H}) \mapsto c(\pi)$ によって，$\mathfrak{F}$ の表現の quasi-equivalence class と包絡代数 $\mathfrak{F}''$ の centre に属する non-zero central projection との間に bijective な対応がつくことになる。この見方からは，純粋相＝factor state は対応する central projection の minimality によって特徴づけられることになる。

π が factor 表現のときは，その non-trivial な部分表現はすべて π 自身に quasi-equivalent であり，また π と quasi-equivalent な表現もすべて factor 表現である。そして，任意の factor 表現を２つとると，それらは quasi-equivalent になるか disjoint になるかの何れかであり，対応する状態についても，２つの純粋相は quasi-equivalent か disjoint かの何れかになる。どちらになるかの１つの判定条件として，

Proposition [4]：C^*-代数 $\mathfrak{F}$ の２つの純粋相 ω_1, ω_2 は，状態 $\frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)$ が純粋相になるとき，そのときに限って，quasi-equivalent。

ミクロ＝intra-factorial とマクロ＝inter-factorial との関連は，centre の構造を通して上のよ

ように有機的に結びつけられ，両者の間の深い繋がり，interplay の一端が，ここに垣間見られる。マクロはミクロと無縁な外部に由来するのではなく，ミクロ系の包絡代数の centre として generic に捉えられる一方，次節で見るようにマクロとミクロとの（「外場」を通じての）接触の様相に応じて，特定の部分が relevant な folia として焦点化されるのである。

4 Centre の物理的起源

そこで，どのような物理的状況でどんな形をとって centre が出現するかを知るため，次のような場合分けを考える：

i) External origin：系の外から働く外力・外場によって誘導される centre = externally induced superselection rule,

ii) Internal origin：e.g., 対称性の自発的破れに基づく order parameter の生成等。

ただしこれは，便宜的な分け方であって，i) の場合にも系と外力系をひとまとめに扱えば ii) に帰着し得る。ii) の場合にも，例えば，「自発磁化」の実際的定義は，一旦外部磁場をかけた上でそれをゼロに近づけていった時に「残留磁化」が残るか否かによって判定するように，i) と ii) は相互に入り組んで出現し得る。

4.1 Externally induced superselection rule：スペクトル分解

まず i) の単純な例として，量子力学での測定過程におけるスペクトル分解の問題を考えよう。(Hilbert 空間 $\mathfrak{H}$ の自己共役作用素として表現された）物理量 A のスペクトル分解は，代数的観点から見ると，A のスペクトル集合 $Spec(A)$ 上の関数環 $L^\infty(Spec(A))$ から $\mathfrak{H}$ 上の有界作用素の全体 $B(\mathfrak{H})$ の中への（von Neumann 代数間の）準同型写像を構成することと等価である。実際，A のスペクトル分解 $A = \int_{a\,\in Spec(A)} a\ E_A(da)$ が与えられると，(通常，“functional calculus” と呼び慣わされる）写像

$$\hat{A} : L^\infty(Spec(A)) \ni f \ \mapsto \ \hat{A}(f) = f(A) := \int_{a\in Spec(A)} f(a)\ E_A(da) \in B(\mathfrak{H}) \tag{1}$$

が定まって $\hat{A}(f_1 f_2) = \hat{A}(f_1)\hat{A}(f_2)$ が成り立ち，逆に準同型写像 $\hat{A}$ が与えられれば，スペクトル測度 E_A は

$$E_A : \mathcal{B}(Spec(A)) \ni \Delta \mapsto \ E_A(\Delta) := \hat{A}(\chi_\Delta) = \chi_\Delta(A) \ \in \ \mathrm{Proj}(\mathfrak{H}) \tag{2}$$

によって定まる。ただし，$\mathcal{B}(Spec(A))$ は $Spec(A)$ 上の Borel 集合の全体，χ_Δ は (Borel) 集合 Δ の特性関数，$\mathrm{Proj}(\mathfrak{H})$ は $\mathfrak{H}$ 上の直交射影の全体である。また確率論の文脈では，量子状態 ω に対し，ω での物理量 A の測定における測定値の**確率分布** $p^A(\,\cdot \mid \omega)\ :\ \mathcal{B}(Spec(A)) \ni \Delta \ \mapsto \ p^A(\ \Delta \mid \omega) = \mathrm{Prob}(\ A \in \Delta \mid \omega) := \omega(E_A(\Delta))$ を対応させる写像 $\omega \ \mapsto \ p^A(\,\cdot \mid \omega)$ が，

スペクトル分解と（殆ど）等価である［スペクトル測度から確率分布を定義するのは単純だが，逆は，von Neumann 代数についての双対性 $\mathfrak{M} = (\mathfrak{M}_*)^*$ に基づき正値作用素測度を帰結する］。スペクトル分解という数学的概念の現実的・操作的な意味はこの確率分布で明確になるが，逆に確率分布の代数的取扱いには，準同型写像 $\hat{A}$ で考えるのが便利である。

スペクトル分解を物理的に実現する状況を考えるため，測定される物理量 $A \in \mathfrak{F}$ と couple する外場を J としよう。外場は普通，完全に定まった「c-数」と見なされるが，仔細に見れば決して「定まった」ものではあり得ない。そこで，J を或る古典的物理量の代数 $C(M_J)$ の元として可変的な量と見ることにすれば，対象系＋測定装置の合成系は代数 $\mathfrak{F} \otimes C(M_J)$ によって記述される。A と外場 J との coupling は，通常 "Hamiltonian" に相互作用項 $-J \cdot A$ を付加する形で理解される。$J = 0$ における対象系の時間発展の automorphism を α_t とすれば，付加項の効果は $U(t_1, t_2) := T\exp(i\int_{t_1}^{t_2} dt\ J(t) \cdot \alpha_t(A))$ を用いて扱うことができる。実際，標準的な場の量子論での物理量の計算の大部分は，$J(t) \to J(x)$, $\alpha_t(A) \to \hat{\varphi}(x)$ として得られる $U[J] := T\exp(i\int d^4x\ J(x) \cdot \hat{\varphi}(x))$ の真空期待値 $\omega_0(U[J]) = \langle \Omega \,|\, T\exp(i\int d^4x\ J(x) \cdot \hat{\varphi}(x))\Omega \rangle =: \exp(iW[J])$（および，その Legendre 変換）に関わるものであり，$W[J]$ は連結 Green 関数の生成汎関数である。異なる時刻での $\alpha_t(A)$ は一般に相互に非可換で，その詳しい議論には場の理論における order parameter と同様の扱いが必要である。しかし議論の筋道だけを見るため，しばしば採用される単純化の仮定に従って α_t の影響および J の時間依存性を無視すると，われわれの関心は

$$U_t := e^{itJ \cdot A} = \int_{a \in Spec(A)} e^{itJ \cdot a}\ E_A(da) \tag{3}$$

の扱いに帰着する。このときスペクトル測度 E_A は (3) 式を逆 Fourier 変換することによって得られる：

$$L^\infty(Spec(A)) \ni f \ \mapsto\ f(A) = \hat{A}(f) = \int_{M_J} dJ\ \check{f}(J)\ e^{iJ \cdot A}, \tag{4}$$

ただし，$\check{f}(J) := \int_{Spec(A)} da/(2\pi)^d\ e^{-iJ \cdot a} f(a)$ $[d := \dim(Spec(A))]$。現実の状況で無限の精度は実現不可能かつ不必要ゆえ，確率分布の漸近的振舞の方が重要で，Fourier 変換は鞍点法による近似で Legendre 変換に置き換えるのがより適切かも知れない。何れにせよこの変換を通じて，外場古典系は変数 J からその「共役量」A に切り替わる。スペクトル分解という目的を実現するよう装置が「然るべく」作動するとき［i.e., Fourier 変換 or Legendre 変換を物理的に implement する機構の詳細を問わなければ］，スペクトル分解装置をくぐらせることによって，対象系＋装置の記述変数は $\mathfrak{F} \otimes C(M_J)$ から $\mathfrak{F} \otimes \{A\}'' =: \mathfrak{F}_A$ に Fourier (or Legendre) 変換されるはずである。$\{A\}'' \simeq L^\infty(Spec(A))$ は作用素 A から生成される可換な von Neumann 代数で，$\mathfrak{Z} := 1 \otimes \{A\}''$ は代数 $\mathfrak{F}_A$ に centre として含まれる。Externally induced superselection rule と呼んだのは，この centre $\mathfrak{Z}$ の中心分解［$= A$ のスペクトル分解］によって得られる超選択則のことで，測定にかからない自由度についての超選択則を論ずる [3] と違って，これは測定される物理量 A のスペクトルにちょうど対応したものである。「測定過程」自体は，ここから更に各 sector を centre のスペクトルの異なる値に応じて，**空間的に異なる場所**［i.e., 測定器の示針の位置の違い］に分離するという操作が付加されて完結するが，その問題は論じな

い。ここでは，Davies-Lewis [8] による "instrument" の概念を考えよう。物理量 A の測定に対応する instrument $\mathcal{E}$ とは，$Spec(A)$ から A の表現 Hilbert 空間 $\mathfrak{H}$ への operation-valued measure : $\mathcal{B}(Spec(A)) \ni \Delta \mapsto \mathcal{E}(\Delta) \in \mathcal{L}(B(\mathfrak{H})_*, B(\mathfrak{H})_*)$ であり，状態 ω における A の測定値が集合 $\Delta(\in \mathcal{B}(Spec(A)))$ に属する確率を $\mathrm{Prob}(A \in \Delta \mid \omega) = \mathcal{E}(\Delta \mid \omega)(\mathbf{1}) = \omega(E_A(\Delta)) = p^A(\Delta \mid \omega)$ という形で与え，正値性および規格化条件を満たすもののことである。そして，確率測度 $p^A(\,\cdot \mid \omega)$ に関する測度 $\Delta \mapsto \mathcal{E}(\Delta \mid \omega)$ の絶対連続性から従うその Radon-Nikodym 微分 $\mathcal{E}(da \mid \omega)/p^A(da \mid \omega) =: \omega_a$ は，(第1種測定で) A のスペクトル a が得られたときの「事後状態」を与える（小澤正直 [9]）：

$$\mathcal{E}(\Delta \mid \omega)(B) = \int_\Delta \omega_a(B)\ p^A(da \mid \omega). \tag{5}$$

双対性により $\mathcal{E}$ は，正値写像 $\mathfrak{I}: \mathfrak{F}_A \to \mathfrak{F}$ と関係

$$\mathcal{E}(\Delta \mid \omega)(B) = \omega\Big(\mathfrak{I}(B \otimes \chi_\Delta(A))\Big) \tag{6}$$

を通して等価になる。状態 ω において物理量 A の測定値 a を得る確率が $p^A(da \mid \omega)$ だから，式 (5) は，A の測定値が Δ に入ることがわかった状況での系の状態が $\mathcal{E}(\Delta \mid \omega)$ と書ける，ということを意味する。すると，A が離散固有値のみ持つとき，A の スペクトル分解を $A = \sum_i a_i E_i$ として，

$$\mathfrak{I}(B \otimes \chi_\Delta(A)) = \sum_{a_i \in \Delta} E_i B E_i \tag{7}$$

とすれば，式 (6) が再現される。"half measure" [10] と同様の扱いが spectral projection に対して可能なら，一般の場合の式 (7) は

$$\mathfrak{I}:\ \mathfrak{F}_A \ni B \otimes f(A) \ \mapsto \int f(a)\ E_A(da)^{1/2} B E_A(da)^{1/2} \in \mathfrak{F}, \tag{8}$$

とでも書きたいところ。写像 $\mathfrak{I}$ 自体が式 (6) によって存在するのは確かだが，どういう表記が可能か，非才ゆえ判断に苦しむ。御教示乞う！ $\mathfrak{I}^*(\omega) := \omega \circ \mathfrak{I}\ \in E_{\mathfrak{F}_A}$ と書けば，

$$[\mathfrak{I}^*(\omega)](B \otimes \chi_\Delta(A)) = \int_\Delta \omega(E_A(da)^{1/2} B E_A(da)^{1/2}). \tag{9}$$

この式の重要な内容は，(B を一般的に保ったときの) 右辺がミクロの量子状態 $\omega \in E_{\mathfrak{F}}$ の量子論的非可換性に由来した「量子ゆらぎ」を本質的に表すのに対し，それを $B = \mathbf{1}$ とおいて centre $\mathfrak{Z} = \mathbf{1} \otimes \{A\}''$ へ投影することによって得られた状態 $\Delta \mapsto [\mathfrak{I}^*(\omega)](\mathbf{1} \otimes \chi_\Delta) = \mathrm{Prob}(A \in \Delta \mid \omega)$ は，可換系としての centre $\mathfrak{Z}$ 上の古典確率的・統計的ゆらぎを表すという点である。この意味で，(9) 式は (sector 内での)「量子ゆらぎ」と (sectors 上にわたる)「統計的ゆらぎ」を橋渡しし，Born の統計公式 $[\psi(x) \to |\psi(x)|^2 dx = \mathrm{Prob}(\hat{x} = x \sim x + dx \mid \psi)]$ を一般化してより広い文脈で捉え直す可能性を示唆する重要な式である。また，Accardi [11] に従って，instrument (9) を "transition expectation" と見れば，反復測定における測定結果の時系列を Markov chain として捉えることができる。これは large deviation theory の level-3 の視点から量子論を見直すときに重要な視点を与える。

4.2 Internally induced superselection rule : 対称性の自発的破れ (SSB)

次に，ii) Internal origin，の典型例となる対称性の自発的破れとそれに伴って出現する order parameter に基づく centre =超選択則の場合を考えよう。

初めに述べた「相」の観点から，物理系の対称性とその破れのパターンを整理すると，次のような分類が得られる（Buchholz-Ojima [12]）：

i) 破れていない対称性を持つ純粋相 (unbroken symmetry),
ii) 純粋相で破れた対称性が適当な混合相を取ると回復する場合 (SSB),
iii) "spontaneous collapse" =どのような混合相を取っても回復しない対称性。

iii) は従来知られていなかったもので，supersymmetry がその例を与えることは [12] でわかったが，それ以外の例は未だ見つかっていない。ただし，対称性「回復」の意味を,「不変状態の存在」と採るか「unitary 表現の存在」(= "quasi-invariance": See [13]) と採るかに応じて，有限温度での Lorentz symmetry が iii) に入るか ii) に入るかが変わり得る [14, 15]。その意味で，Lorentz symmetry を含めた non-compact group の下での自発的破れは ii) と iii) の中間カテゴリーとして別立てが適当かもしれない。他方，有限温度での Lorentz symmetry の破れ，あるいは，Lorentz boost による温度平衡の破れ [16], (特殊および一般) 相対論と熱力学の相互関係等の問題は，非平衡状態の一般的理論的定式化の課題とも密接に関連したそれ自体で重要なテーマである。

i) については，最初に述べたように，long-range force と局所ゲージ不変性が絡まない理論の真空状況では，Doplicher-Haag-Roberts, Doplicher-Roberts，また，有限温度の場合には Araki-Haag-Kastler-Takesaki [17]（および辰馬 [18] による局所コンパクト非可換群への一般化）による一般論が既にある。ここで論じるのは，自発的破れの問題としては一番 familiar な ii) のコンパクト群の場合である。

コンパクト群 G が (field algebra) $\mathfrak{F}$ 上に自己同型群として働いているとしよう：$G \ni g \mapsto \tau_g \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{F})$。$A \in \mathfrak{F}$ を止める毎に $g \mapsto \tau_g(A)$ は ($\mathfrak{F}$ のノルム位相で) 連続であるとしておく。そのとき，$\mathfrak{F}$ の 純粋相 $\omega_0 \in E_{\mathfrak{F}}$ が G の作用の下で不変でない，$\exists g \in G$ s.t. $\omega_0 \circ \tau_g \neq \omega_0$，とすると，$\omega_0$ も $\omega_0 \circ \tau_g$ も共に純粋相だから，第3節に述べた結果より，2つは disjoint か quasi-equivalent の何れか。後者の場合，両者の folium は一致し，G の作用は1つの folium のなかで閉じるので，ω_0 と同じ folium 内に不変状態がとれて，i) の unbroken symmetry に帰着する。そこで考えるべきは，$\omega_0 \overset{\shortmid}{\circ} (\omega_0 \circ \tau_g)$ の場合であり，この disjointness が自発的破れの本質である。そうすると第2節に引用した結果により，centre に属し ω_0, $(\omega_0 \circ \tau_g)$ を識別する order parameter C と それに収束する物理量の central sequence $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $A_n \in \mathfrak{F}$ が存在する。コンパクト群 G には (規格化された) Haar measure μ があるので，これを使って状態 $\omega := \int_G \mu(dg)\ (\omega_0 \circ \tau_g)$ を作ると，Haar measure の不変性から ω は明らかに G-不変：$\omega \circ \tau_g = \omega$ for $\forall g \in G$。よってその GNS 表現 $(\mathfrak{H}_\omega, \pi_\omega, \Omega_\omega)$ には，G の unitary 表現 $g \mapsto U_\omega(g)$ が存在して，$\pi_\omega(\tau_g(A)) = U_\omega(g)\pi_\omega(A)U_\omega(g)^*$, $U_\omega(g)\Omega_\omega = \Omega_\omega$。この状態 ω は上に見たように混合相で，non-trivial な centre $\mathfrak{Z}_\omega := \pi_\omega(\mathfrak{F})'' \cap \pi_\omega(\mathfrak{F})'$ を持つ。$\mathfrak{Z}_\omega$ がどんな構造を持つかを調べよう。

まず $g \mapsto \tau_g$ の強連続性の仮定から，$g \mapsto U_\omega(g)$ は強連続ゆえ，τ_g を von Neumann 代数 $\pi_\omega(\mathfrak{F})''$ 上の連続な自己同型群 $\tilde{\tau}_G$ に拡張でき，それによって，G は centre $\mathfrak{Z}_\omega$ 上にも連続な自己同型群として作用する。初めの状態 ω_0 は純粋相として minimal な central projection $c(\pi_{\omega_0})$ を持つ「最小単位」の状態だが，G による変換の下での不変性回復にはそれを拡げる必要があり，ω が導入された。G-不変性回復に必要な最小単位の状態は，G-不変状態の中での extremality により，G-ergodic state として特徴付けられる。これについて，次の論理的関係がある。

Theorem[4]: $\mathfrak{F}$ の G-不変状態 ω に対する次の3条件につき，(1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) が成立つ:

(1) $\mathfrak{H}_\omega$ の $U_\omega(G)$-不変部分空間は1次元;
(2) *G-ergodicity*: $(\pi_\omega(\mathfrak{F})')^G = U_\omega(G)' \cap \pi_\omega(\mathfrak{F})' = \mathbb{C}1$;
(3) *central ergodicity*: ${\mathfrak{Z}_\omega}^G = U_\omega(G)' \cap \mathfrak{Z}'_\omega = \mathbb{C}1$.

Remark: $Spec(\mathfrak{Z}_\omega)$ が G-transitive (i.e., $\exists H$: G の閉部分群で $Spec(\mathfrak{Z}_\omega) \simeq G/H$ を満たすものが存在) ならば，central ergodicity: ${\mathfrak{Z}_\omega}^G = \mathbb{C}1$ が成り立つ。

Proposition : G : コンパクトなら，G についての central ergodicity から，$Spec(\mathfrak{Z}_\omega)$ の G-transitivity が従う: $Spec(\mathfrak{Z}_\omega) \simeq G/H$。したがって，コンパクト群 G に対して，centre の G-transitivity，$Spec(\mathfrak{Z}_\omega) = G/H$ と central ergodicity とは同値であり，このとき $\mathfrak{Z}_\omega \simeq L^\infty(G/H)$。
(証明略)

この結果により，GNS 表現 $(\mathfrak{H}_\omega, \pi_\omega, \Omega_\omega)$ を G/H 上で中心分解することができて

$$\mathfrak{H}_\omega \simeq \int_{G/H}^{\oplus} \hat{\mu}(d\xi)^{1/2}\, \mathfrak{H}_\xi, \quad \Omega_\omega \simeq \int_{G/H}^{\oplus} \hat{\mu}(d\xi)^{1/2}\, \Omega_\xi \tag{10}$$

$$\pi_\omega(\mathfrak{F})'' \simeq \int_{G/H}^{\oplus} \hat{\mu}(d\xi)\, \pi_\xi(\mathfrak{F})'' \tag{11}$$

となる。ただし，$\hat{\mu}$ は G の Haar 測度 μ から射影 $p : G \to G/H$ により G/H 上に誘導された商測度で，$Spec(\mathfrak{Z}_\omega) = G/H$ 上の確率測度を与える。$\xi \in G/H$ に対して $(\mathfrak{H}_\xi, \pi_\xi, \Omega_\xi)$ は状態 $\omega_\xi := \omega_0 \circ \tau_g$ (ただし $g \in \xi$) に対する GNS 表現である。$\psi_1, \psi_2 \in \int_{G/H}^{\oplus} \hat{\mu}(d\xi)^{1/2}\, \mathfrak{H}_\xi$ に対する内積は，$\langle \psi_1 \,|\, \psi_2 \rangle := \int_{G/H} \langle \psi_1(\xi) \,|\, \psi_2(\xi) \rangle_{\mathfrak{H}_\xi}$ で与えられる。そこで，$A \in \pi_\omega(\mathfrak{F})''$ は homogeneous bundle $G \xrightarrow{p} G/H$ に随伴する algebra bundle over G/H with standard fibre $\pi_{\omega_0}(\mathfrak{F})''$ の cross section と，従ってまた，$\pi_{\omega_0}(\mathfrak{F})''$ に値をとる G 上の equivariant function $\hat{A}$ とも同一視されることになる：ただし，$\hat{A}(gh) = \tau_{h^{-1}}(\hat{A}(g))$ for $g \in G$, $h \in H$。

前節 (9) 式に対応した，量子ゆらぎと統計ゆらぎを結ぶ関係式は $\omega = \int_{G/H} \hat{\mu}(d\xi)\ \omega_\xi = \int_G \mu(dg)\ (\omega_0 \circ \tau_g)$ をその GNS 表現の上に拡張した次の式

$$\langle \Omega_\omega |\ A\Omega_\omega \rangle = \int_{G/H} \hat{\mu}(d\xi) \langle \Omega_\xi \,|\, \pi''_\xi(A) \Omega_\xi \rangle \tag{12}$$

で与えられる。ただし，$A \in \pi_\omega(\mathfrak{F})''$。$A$ として central sequence $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ をとれば，右辺各項に A_n の量子ゆらぎがあらわれ，極限においては centre 上の統計ゆらぎが実現する。

この考察と central sequence の時空依存性を（運動量の漸近展開の形で）用いると，“soft pion theorem” において重要な役割を演ずる「非線型実現」の概念に適切な理論的定式化を与えることができる。更に，等質空間に関係した群の「球表現」や誘導表現とその既約分解に関する Peter-Weyl 定理 [19] を援用することで，自発的に破れた対称性の下での superselection theory を展開する足場が整う。Field algebra $\mathfrak{F}$ の存在を初めに仮定してしまうと，Doplicher 等の理論に比べ一般性を欠くことになるが，自発的破れを排除しない点ではそれより一般的であり，両者の関係は相補的である。将来的にはこの両者を統合した理論を展望したい。

5 Algebraic QFT と large deviation theory：非平衡・相共存と場の量子論 reformulation の課題

このようにして，純粋相での factor 表現における（純粋な）量子系とその量子ゆらぎと factors 間の相互関係と統計的ゆらぎを記述する古典系としての centre を持つ混合相の理論によって，「量子-古典複合系」とでも呼ぶべき統一的な枠組が可能になる。これで漸く，kinematical な枠組は一応整ったが，残念ながら，本題の large deviation theory とそれを用いた場の理論の dynamical aspects の議論に入る前に，時間も紙数も尽きてしまった。ここで論ずべき問題は，上記の相と centre，量子-古典複合系，量子ゆらぎ／統計ゆらぎの相互関係の視点を踏まえ，algebraic QFT で本質的な nuclearity condition, statistical independence, universal localizing map 等の概念に基づいて，large deviation theory を量子論に取り込み，量子・古典ゆらぎの統一的記述に基づいた量子場理論の新たな定式化を行うこと。それを用いて，対称性の自発的破れに伴う gapless spectrum の 1-粒子状態 version である Goldstone theorem，その多粒子 version としての soft pion theorem，赤外発散と soft photon theorem 等，諸々の low energy theorem や，その condensed-state version に関わる超伝導での Cooper pair・Josephson 効果・巨視的量子効果等々を統一的観点から扱うことにより，異なる相の共存，界面効果，相転移，局所温度状態，非平衡定常性の問題を解明し，その中での dynamical entropy の役割と物理的意味を論じること等々である。これらについては他日を期したい。

References

[1] Doplicher, S., Haag, R., Roberts, J.E. : Fields, observables and gauge transformations I & II, *Comm.Math.Phys.* **13**, 1–23 (1969);**15**, 173–200 (1969); Local observables and particle statistics I & II, *Comm.Math.Phys.* **23**, 199–230 (1971); **35**, 49–95 (1974).

[2] Doplicher, S., Roberts, J.E. : Why there is a field algebra with a compact gauge group describing the superselection structure in particle physics, *Comm.Math.Phys.* **131**, 51–107 (1990).

[3] Machida, S., Namiki, M.: *Prog.Theor.Phys.* **63**, 1457, 1833 (1980).

[4] Bratteli, O., Robinson,D.W. : *Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics*, vols. 1 & 2 (1st ed.), Springer-Verlag (1979 & 1981).

[5] Sewell, G.L. : *Quantum Theory of Collective Phenomena*, Oxford University Press (1986).

[6] Dixmier, J.: *C^*-Algebras*, North-Holland (1977).

[7] Buchholz, D.: Foundation and Recent Results in Algebraic Quantum Field Theory, Series Lectures given at RIMS (1996).

[8] Davies,E.B., Lewis,J.T. : An operational approach to quantum probability, *Comm.Math.Phys.* **17**, 239–260 (1970).

[9] Ozawa, M.: Conditional probability and a posteriori states in quantum mechanics, *Publ.RIMS Kyoto Univ.* **21**, No. 2, 279–295 (1985).

[10] Nelson, E.: *Topics in Dynamics, I: Flows*, Princeton University Press (1970).

[11] Accardi, L.: A new class of quantum states: examples and applications, in Lecture Notes in Physics No.378: Proc. of a Workshop "Quantum Aspects of Optical Communications", 138–150, (1991), Springer.

[12] Buchholz, D., Ojima, I.: Spontaneous collapse of supersymmetry, *Nucl.Phys.* **B498**, Nos.1,2, 228–242 (1997).

[13] Pedersen, G.K. : *C^*-Algebras and their Automorphism Groups*, Academic Press (1979).

[14] Ojima, I.: Lorentz invariance vs. temperature in QFT, *Lett.Math.Phys.* **11**, 73–80 (1986).

[15] Ojima, I.: Spontaneous collapse of supersymmetry, in *Proc. of the 2nd Jagna International Workshop on "Mathematical Methods of Quantum Physics"*, 1998 (to appear), Gordon and Breach.

[16] Bros, J., Buchholz, D.: Towards a relativistic KMS condition, *Nucl.Phys.* **B429**, 291 (1994).

[17] Araki, H., Haag, R., Kastler, D., Takesaki, M.: Extension of KMS states and chemical potential, *Comm.Math.Phys.* **53**, 97–134 (1977).

[18] Tatsuuma, N.: An extenstion of AKHT theory to locally compact groups, *Kokyuroku RIMS* **314**, 88 (1977).

[19] Wallach, N.: *Harmonic Analysis on Homogeneous Spaces*, Marcel Dekker (1973).