数理解析研究所講究録
1066巻 1998年 133-144

観測公理と測定器のモデル

近畿大学理工学部　牧 二郎 (Ziro MAKI)

1.序論

第1種測定過程の一般的形式は周知とする。すなわち（観測されるべき）系を$\mathcal{S}$、測定器系を$\mathcal{M}$とする。単純化のため$\mathcal{S}$の物理量$\mathcal{A}$に対応する作用素Aは非縮退・有限個の固有値スペクトルa_i（$i=1,2,\cdots n$）を持つとし、固有値方程式を

$$A|a_i\rangle = a_i|a_i\rangle \tag{1}$$

と記して Schroedinger 描像で議論する。'系' あるいは '状態' とは「単一の系とその状態」を指し、統計集団のそれではない。

物理量$\mathcal{A}$を測定する系$\mathcal{M}$には、$|a_i\rangle$に対応する状態$|i\rangle\!\rangle$のほか、測定開始前の（指針中立座標に対応する）状態$|0\rangle\!\rangle$があるとし、便宜上$|0\rangle\!\rangle$は$|i=0\rangle\!\rangle$であると見なす。

全系$\mathcal{S}+\mathcal{M}$のハミルトン関数を

$$H = H_S + H_M + H_{SM}(t) \qquad (2)$$

によって与え、S と M との相互作用 H_{SM} の下で全系の運動はそれぞれの Hilbert 空間 $\mathcal{H}^S$、$\mathcal{H}^M$ のテンソル積空間 $\mathcal{H}^S \otimes \mathcal{H}^M$ の中で扱われる。$H_{SM}(t)$ には explicit な時間依存性を許しておく。（この意味については後述。）

以下の考察にあたり、量子力学的観測の関するよく知られた公準を掲げておく：

（M_1）系の任意の物理量を測定すれば、必ず、対応する作用素の固有値のどれかただ１つが得られる。

（M_2）１つの系で同じ物理量を２回すぐ続けて測定すれば、２回とも必ず同じ測定値が見出される。

これらは「観測公理」と呼ばれることが多いが、しかし、ともに「測定」という未定義の用語が含まれているので、量子力学の論理的基礎となる「公理」ではなく、（量子力学的）測定過程なるものに必要な公準を設けて測定概念を明確にしようとするものであることに注意。

全系の状態ベクトル $\Psi(t)$ は Schroedinger 方程式

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(t)}{\partial t} = H \Psi(t) \qquad (3)$$

に従って変化する。測定開始時（$t=t_0$）における状態がいま $\Psi_i(t_0)=|a_i\rangle\otimes|0\rangle\!\rangle$ だったとすれば、上式の形式解はユニタリー作用素 $U(t,t_0)$ $[U(t_0,t_0)=1,\ t>t_0]$ を用いて

$$|a_i\rangle\otimes|0\rangle\!\rangle\Big|_{t_0}\xrightarrow[\Delta T]{} U(t,t_0)|a_i\rangle\otimes|0\rangle\!\rangle=|a_i\rangle\otimes|i\rangle\!\rangle\Big|_{t_1} \quad (4)$$

と書かれる。（$t_1=t_0+\Delta T$ で、ΔT は測定に要した時間、t_1 は測定が完了した時刻である。）H_{SM} が S については A のみの関数だとすれば、impulsive approximation の下で（４）は実際に証明することもできる。[1]

S が $|a_i\rangle$ の一般の重ね合わせの状態

$$|\psi\rangle=\sum_i c_i|a_i\rangle,\quad c_i=\langle a_i|\psi\rangle \quad (5)$$

のときには（４）と線形性に関する周知の議論から

$$|\psi\rangle|0\rangle\!\rangle\Big|_{t_0}\xrightarrow[\Delta T]{}\sum_i\langle a_i|\psi\rangle|a_i\rangle|i\rangle\!\rangle \quad (6)$$

なる 'entanglement' の関係式を得る。（以下しばしば直積記号を略す。）同じ事を射影作用素 $E^{S+M}\equiv|\Psi(t)\rangle\langle\Psi(t)|$ によって表現すれば

$$E^{S+M}(t_1) = \sum_{ij} \langle a_i|\psi\rangle\langle\psi|a_j\rangle |a_i\rangle\langle a_j| \otimes |i\rangle\rangle\langle\langle j| \Big|_{t_1} \quad (7)$$

であり、$|i\rangle\rangle\langle\langle j|$ （$i \neq j$）は異なる指針状態のあいだの位相相関（干渉）を記述すべき項である。しかしこの項（干渉項）が測定過程に物理的効果をもつか否かは、測定器のモデルに依存する。次節以下で、特にこの点を議論する。

2. モデルとしての分離型測定器

ここで次の仮定による単純な測定器のモデルを取り上げる。[2]

（仮定）測定器は固有値 a_i のそれぞれに対応し、物理的に互いに独立なサブ測定器 $M^{(i)}$（$i=1,2,\cdots n$）の集りである。すなわち

$$\left.\begin{aligned} M &= \{M^{(1)}, M^{(2)}, \cdots\cdots M^{(n)}\} \\ \mathcal{H}^M &= \mathcal{H}^{(1)} \otimes \mathcal{H}^{(2)} \otimes \cdots\cdots \otimes \mathcal{H}^{(n)} \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

であって、サブ測定器間には直接の相互作用はなく、各 $M^{(i)}$ の物理量 $\mathcal{O}^{(i)}$ はそれぞれ独立に測定できるものとする。

ここで簡単なモデルとして各$M^{(i)}$を定める物理量が‘アイソスピン’$\boldsymbol{\tau}^{(i)}=(\tau_1^{(i)},\tau_2^{(i)},\tau_3^{(i)})$のみである場合を考える。行列表示$\tau_3=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$の下で$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$はそれぞれ‘‘陽子’状態、$|1\rangle^{(i)}$, ‘中性子’状態$|0\rangle^{(i)}$の表示である。

すると（８）による測定器の状態は次のように作られる。

$$\left.\begin{aligned}|0\rangle\rangle &= |0\rangle^{(1)}|0\rangle^{(2)}\cdots\cdots\quad|0\rangle^{(n)}\\ |i\rangle\rangle &= |0\rangle^{(1)}|0\rangle^{(2)}\cdots|1\rangle^{(i)}\cdots\,|0\rangle^{(n)}\end{aligned}\right\}\qquad(9)$$

状態ベクトルのこのような構成は量子通信の記述形式と似ている。このサブ測定器としてエマルジョン中の$AgBr$分子を想像してもよい。$AgBr$は感光相互作用（$Ag+Br$への分離）をそれぞれの位置で独立に受け持つのである。このモデルで、いわゆる Negative Result Measurement を解釈することもできる。いまH_{SM}として次の形のものを仮定する：

$$\left.\begin{aligned}&H_{SM}(t)=g(t)\left(\frac{\pi}{2}\right)\hbar\sum_{i=1}^{n}\delta(A,a_i)\,\tau_1^{(i)}\\ &\int_{t_0}^{t_1}g(t')\,dt'=1.\end{aligned}\right\}\qquad(10)$$

ただし$\delta(A,a_i)=|a_i\rangle\langle a_i|$、$g(t)$は区間$[t_0,t_1]$以外で$0$とする。$\Delta T$の間に$M^{(i)}$の状態は$|0\rangle^{(i)}\xrightarrow[\Delta T]{}|1\rangle^{(i)}$となる。

Entanglementの関係（前節　Eq.(6)　あるいは Eq.(7)　）は、このモデルの状態（９）についても同じ型で成立する。干渉項を$n=2$の場合に具体的に書けば次のようになる。

$$\left.\begin{array}{l} c_1 c_2^* |a_1\rangle\langle a_2| \otimes |1\rangle\rangle\langle\langle 2| + \text{herm. conj.} \\ |1\rangle\rangle\langle\langle 2| = |1\rangle^{(1)}|0\rangle^{(2)}\langle 0|^{(1)}\langle 1|^{(2)}. \end{array}\right\} \quad (11)$$

この分離型測定器が全体としては「単一の測定器」の場合と同一の Entanglement を実現することは奇異ではなく、各サブ測定器がともにSの同一の物理量を測定するからである。

測定完了以後の時間帯$\tau > t_0 + \Delta T$　ではH_{SM}は switch-off され（　$g(\tau) = 0$　）、SとM　とはともに自由ハミルトニアンの下で変化する。

一般に系（$S+M$）のすべての物理量はそれぞれの物理量作用素$\mathcal{O}^S$、$\mathcal{O}^M$の直積（の和）により展開できるが、この時間帯（$\tau > t_0 + \Delta T$）における系を記述する物理量の中には$\tau_1^{(i)}$はもはや含まれない。この事情は、散乱されてポテンシャル$V(q)$から離れた漸近的自由粒子は運動量p　のみで記述され、座標　q　は必要とされないことと同じである。

このモデルに戻れば、τ　における状態$E(\tau)$は　$E^{S+M}(t_1)$からさらにユニタリー時間発展　$U(\tau, \tau_1)$　により

$$E(\tau) = U(\tau, t_1) E^{S+M}(t_1) U^{-1}(\tau, t_1) \quad (12)$$

となるが、この時刻における干渉項 $|i\rangle\rangle\langle\langle j|\Big|_{t=\tau}$ は、$\mathcal{O}^M$ の中に $\tau_1^{(i)}$ がもはやあらわれないことの結果として、'すべての' $\mathcal{O}^M$ にたいし

$$tr(\mathcal{O}^M |i\rangle\rangle\langle\langle j|) = \langle\langle j|\mathcal{O}^M|i\rangle\rangle = 0 \quad (13)$$

である。この時間帯においてなお「本当は $\tau_1^{(i)}$ が存在する」などと考えてはならない。

3. 状態の収縮

$\Psi(t)$ と同じく状態作用素 $E^{S+M}(t)$ もそれ自体が観測によって決定できるものでなく、実験で知りうるものは物理量作用素の行列要素のみである。したがって、逆にすべての物理量作用素 $\mathcal{O}$ の行列要素から状態作用素を一義的に決定することは不可能である。実際 $E^{S+M}(t)$ の中にもし

$$tr(\mathcal{O}\,\Delta E^{S+M}(t)) = 0 \quad (14)$$

となる項 $\Delta E^{S+M}(t)$ があれば、その部分は物理的状態の決定とは irrelevant な項である。このモデルでは Eq.(13) が

成立する結果、$Eq.(12)$右辺中の‘干渉項’がこの部分に相当する。したがってこの項を落とし、$\tau > t_0 + \Delta T$ における $E(\tau)$ の代わりに

$$E'(\tau) = \sum_i |\langle a_i|\psi\rangle|^2 |a_i\rangle\langle a_i| \otimes |i\rangle\rangle\langle\langle i| \Big|_{t=\tau} \tag{15}$$

をもって‘$(S+M)$の状態作用素である’と再定義することが許される。

状態 $|\phi\rangle$は射影作用素 $E_\phi = |\phi\rangle\langle\phi|$ でも同等に表現されるが、E_ϕ はまた状態 ϕ の系のみから成る純粋集団の表現形式ともなっている。つまり例えば $E^{S+M}(t_0) = |\psi\rangle\langle\psi| \otimes |0\rangle\rangle\langle\langle 0|$ は‘t_0において S が $|\psi\rangle$ にあり、かつ M が $|0\rangle\rangle$ にある’純粋集団をあらわす。もしこの解釈を$Eq.(15)$右辺の各項にあてはめれば、各項は‘S が $|a_i\rangle$ にあり、かつ M が $|i\rangle\rangle$ にある’純粋集団であると主張することになる。干渉項の物理的効果が消失している（このモデルのような）場合に、この各項の解釈ははじめて正当化されるが、排反独立的に異なる命題がともに真であると主張できるためには、$E'(\tau)$ は‘１つの系’の状態を表現するのではなく、各項の純粋集団が頻度比 $|\langle a_i|\psi\rangle|^2$ をもって混合された統計集団をあらわすものと解釈すればよい。

蛇足を加えれば、「実験で知り得るものは物理量の行列要素のみである」という前述の仮定は、量的規定性をふくまないので、そこでは未だ Born の確率規則は前提されていない。この規則は $|\langle a_i|\psi\rangle|^2$ を頻度比と見なすことが可能となって始めて得られるのである。この解釈の成立のために、'干渉項の物理的効果が存在しないこと' が本質的であった。もし通常行われるように、この確率規則を量子力学の「公理」と置くならば、それは干渉項が効果をもたぬこと——いわゆる decoherence の実現——を当初から含意していなければならない。すなわち $E^{S+M}(t)$ から干渉項を説明抜きに切り落として表式 $E'(\tau)$ をつくり、これを「測定の結果」として公理的に宣言することになる。(3)

干渉項に物理的効果がなければ（前述のごとく）$E^{S+M}(\tau)$ も $E'(\tau)$ も同一の物理的状態を表現するが、後者は「測定器の示した状態を排反独立事象として読みとる」という測定過程の物理的現実に、より直截に対応している。$E^{S+M}(\tau)$ の形のままではこの内容が明白には表現されていない。ちなみにこのモデルでは $M^{(i)}$ の状態が $|1\rangle^{(i)}$ か $|0\rangle^{(i)}$ かを読みとるには '荷電' $Q=(1+\tau_3)/2$ に外場を働かせればよい。

$E'(\tau)$ が $E^{S+M}(t)$ からのユニタリー時間発展で結ばれないことは当然であって、'ユニタリー性の破壊'、'非ユニタリ

一的発展’といった言い回しが非論理的なのである。

4. 議論

（1）サブ測定器が物理的に独立に働くために距離をへだてて配置するといった工夫は、M の中の C-数パラメターを調節することであって、こうしたパラメターは（質点の質量値などのように）系を力学的に規定する際に必要な因子であり古典論（あるいは巨視性）の導入ではない。

（2）$\tau > t_1$ において測定器は S に反作用するとなく引き離すことができるから、S についてのみ E' を見れば

$$\left.\begin{aligned} E^{S'} &= \sum_i |\langle a_i|\psi\rangle|^2 E_i^S \\ E_i^S &= |a_i\rangle\langle a_i| \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

となる。しかし（S の）物理量に同一の期待値を与える状態作用素は Eq.(16) 以外に無数に存在するから、S の統計集団としての物理的内容が(16)のごとく一義的に定まるのではない。

このモデルが測定の公準 M_1、M_2 を満たすことは明らかであろう。したがって t_0 における状態 $|\psi\rangle$ もまたこの公準に従って整えられた状態であると考えてよい。

（3）測定時間中には M は $\tau_1^{(1)}$ を含んで定義されるが、測定完了後（あるいは開始以前）にはそれが現れない、ということは M の個別同一性が時間に依存して異なる内容となることである。系の個別同一性は、ハミルトン関数が時間を陽に含まぬ場合にのみ、その時間発展の中で保たれるものである。[4]

（4）筆者の立場と同様に状態の収縮を‘定理’として導くことを試みた理論として R. Omnès のものがある。[5] そこでは「S と M との相互作用のほかに定理の導出にかかわる唯一の物理的要素は M における decoherence の存在である」が、

「そのために M は巨視的でなければならない」

と結論する。この見解は Bohr 以来の伝統的通念でもあるが、それと対比してわれわれの結論を要約すれば

「decoherence はサブ測定器 $M^{(i)}$ が $H_{SM}(t)=0$ の時間領域で全く独立となることによって実現される。したがって M が巨視的であることは decoherence のための必要条件ではない」

と主張することになる。

文献と注

(1)一般論は

D. Bohm , Quantum Theory (1951) [井上・河邊・後藤・高林訳、みすず書房　1955年]

Z. Maki , Prog. Theor. Phys. 82 (1989), 638.

(2)ここで導入するモデルは

Z. Maki, in Quantum Coherence and Decoherence , Fujikawa and Ono edit. [Elsvier Sciences B.V.,1996], 327 の model 2 を抽象化したものである。なお

「素粒子論研究」25 (1997), 79. を参照されたい。

(3) この点に明確に触れた文献の一つとして

W. Weidlich , Z. Phys . 205 (1967),199.

がある。また Eq.(6) [または Eq.(7)] と統計公式 (確率規則の公理のみから状態収縮を証明する小澤氏の議論「科学基礎論研究」23 No.1 (1995), 15. ほかもこの点に関係している。

(4) 詳細な議論は下記の論文を参照されたい。

「科学基礎論研究」25 No.1 (1997), 33.

(5) R. Omnès , The Interpretation of Quantum Mechanics [Princeton, 1994] ; Foundation of Physics 25 No.4.