数理解析研究所講究録
1067 巻 1998 年 15-23

Poincaré 密度, 対数容量, および Bergman 核

(Poincaré density, logarithmic capacity, and Bergman kernel)

都立大　山下慎二 (Yamashita, Shinji)

要約

単連結でない平面領域 Ω で Poincaré 密度 $P_\Omega(z)$, 対数容量 $\Gamma_\Omega(z)$, $z \in \Omega$, が定義可能であれば, Ω で $0 < \Gamma_\Omega < P_\Omega$ である. 集合

$$\{z \in \Omega; \Gamma_\Omega(z) = c\,P_\Omega(z)\}, \quad 0 < c < 1,$$

を調べよう. また Bergman 核, K_Ω, さらに reduced Bergman 核, K^r_Ω について $P_\Omega(z)$ と $K_\Omega(z,z)$, また, $P_\Omega(z)$ と $K^r_\Omega(z,z)$ の比較をしよう.

1. Poisson 型方程式

平面 $\mathbf{C} = \mathbf{R}^2$ 内の領域 Ω で Poisson 型偏微分方程式

$$\frac{1}{4}\Delta u = u_{z\bar{z}} = \Phi \tag{1.1}$$

を考える. ここで, u, Φ は Ω で定義された実函数, $2u_z = u_x - iu_y$ $(z = x + iy)$, etc., で, Ω の各点 a を中心とする開円板 $\Delta(a) \subset \Omega$ と $\Delta(a) \times \overline{\Delta(a)}$ で正則な函数 $F(z,w)$ があって, $F(z,\bar{z})$ は $\Delta(a)$ で real でしかも

$$\Phi(z) = F(z,\bar{z}) \not\equiv 0 \quad \text{in} \quad \Delta(a) \tag{1.2}$$

を満たすものとする. ここに, $\overline{E} = \{\bar{z};\, z \in E\}$ は $E \subset \Omega$ と実軸線対称. これにより, Φ, 従って, u は Ω で実解析的である.

次に三種の集合を考える：

$$Q(\Phi) = \{z \in \Omega;\, \Phi(z) \neq 0\},$$

$$N(u) = \{z \in \Omega;\, u_z(z) = 0\},$$

$$L(u,c) = \{z \in \Omega;\, u(z) = c\}, \quad c \in \mathbf{R}.$$

次の定理 N, L の証明は [**Y3**, Theorem 1] のそれと本質的に変りはない.

定理 N. $N(u) \cap Q(\Phi) \neq \emptyset$ ならば, この集合の連結成分は (i) 孤立点; (ii) $Q(\Phi)$ 内に終わらない単純解析曲線; (iii) $\Big($ $Q(\Phi)$ 内の $\Big)$ Jordan 解析曲線; からなる. さらに, 孤立点 $\Big($がある場合$\Big)$ は $Q(\Phi)$ 内に集積しない.

定理 L. $L(u,c) \cap \Big(\Omega \setminus N(u)\Big) \neq \emptyset$ $(c \in \mathbf{R})$ ならば, この集合の連結成分について, $Q(\Phi)$ の代わりに $\Omega \setminus N(u)$ として, 定理Nと同じ結論が成り立つ.

2. Poincaré 密度

領域 $\Omega \subset \mathbf{C}$ の補集合 $\mathbf{C} \setminus \Omega$ は少なくとも二点を含むとし, 円板 $U = \{w;\ |w| < 1\}$ から Ω の上への普遍被覆射影の一つを ϕ とすれば,

$$P_\Omega(z) = \frac{1}{(1 - |w|^2)|\phi'(w)|}, \quad z = \phi(w) \tag{2.1}$$

は Ω でよく定義される$\Big($ すなわち, $z = \phi(w)$ であるかぎり, ϕ, w の選び方に依らない$\Big)$ ので, この函数を Poincaré 密度 (函数) と呼ぶ. 微分 $P_\Omega(z)|dz|$ は Ω の Poincaré 線要素である. 各点 $a \in \Omega$ を中心とする開円板 $\Delta(a) \subset \Omega$ があって,

$$P_\Omega(z) = \frac{|\psi'(z)|}{1 - |\psi(z)|^2}, \quad z \in \Delta(a), \tag{2.2}$$

が成立する. ただし, ψ は ϕ の逆函数の $\Delta(a)$ での一つの分枝である. 従って, $u = \log P_\Omega$ に対して (1.1) が成立し,

$$\Phi = P_\Omega^2 \quad \text{in} \quad \Omega$$

で $Q(\Phi) = \Omega$, さらに

$$F(z,w) = \frac{\psi'(z)\overline{\psi'(\overline{w})}}{\Big(1 - \psi(z)\overline{\psi(\overline{w})}\Big)^2} \quad \text{in} \quad \Delta(a) \times \overline{\Delta(a)}$$

である.

(註)

$$u_z(z) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \Big(\log\{(1 - |w|)^2 |\phi'(w)|\}\Big)_w = 0,$$

ここに $z = \phi(w)$ である.

3. Bergman 核函数

領域$\Omega \subset \mathbf{C}$ 上のBergman 空間

$$A^2(\Omega) = \left\{ f;\ f \text{ は}\Omega\text{ で正則}, \iint_\Omega |f(z)|^2 dxdy < +\infty \right\}$$

はnontrivial, $A^2(\Omega) \neq \{0\}$ とする. 集合$A^2(\Omega)$ は内積

$$(f, h) = \iint_\Omega f(z)\overline{h(z)} dxdy$$

のもとにスカラー$\mathbf{C}$ 上のHilbert 空間である. この時, Bergman 核函数$K_\Omega(z, w)$, $z, w \in \Omega$ が存在する. すなわち, $K_\Omega(\cdot, w) \in A^2(\Omega)$ $\forall w \in \Omega$ で, 線型写像

$$T_w(f) \equiv f(w) = \big(f, K_\Omega(\cdot, w)\big)$$

は$w \in \Omega$ における$f \in A^2(\Omega)$ の(point) evaluation である. 等式$K_\Omega(z, w) = \overline{K_\Omega(w, z)}$ より $K_\Omega(z, \overline{w})$ はw に関して$\overline{\Omega}$ で正則であり, $K_\Omega(z, z) \geq 0$ で, $\|T_z\| = \sqrt{K_\Omega(z, z)}$, $z \in \Omega$.

4. 対数容量

本節では領域$\Omega \subset \mathbf{C}$ がGreen 函数を持つとする. これは集合$\mathbf{C} \setminus \Omega$ の対数容量が正であることと同値である. さらに, これは$A^2(\Omega) \neq \{0\}$ と同値である. 点$z \in \Omega$ を極に持つΩ のGreen 函数を$g_\Omega(w, z)$ とすれば, 函数

$$\Gamma_\Omega(z) = \exp\left\{ \lim_{w \to z} \left(\log \frac{1}{|w - z|} - g_\Omega(w, z) \right) \right\}$$

が定義できる. 函数$\Gamma_\Omega(z)$ をΩ に関するz における対数容量と呼ぶ. $0 < \Gamma_\Omega < +\infty$ である.

周知の結果[**S1**] によれば, Ω で

$$\Big(\log \Gamma_\Omega(z)\Big)_{z\overline{z}} = \pi K_\Omega(z, z) \tag{4.1}$$

が成立. 一方, $F(z, w) \equiv \pi K_\Omega(z, \overline{w})$ は$\Omega \times \overline{\Omega}$ で正則で, $F(z, \overline{z}) \not\equiv 0$ ゆえ(1.1) が$u = \log \Gamma_\Omega$ について成立.

5. 単連結領域

単連結領域$\Omega \subset \mathbf{C}$, $\Omega \neq \mathbf{C}$, からU の上への一対一等角写像をχ とすれば, $\chi' \in A^2(\Omega)$ で,

$$K_\Omega(z, w) = \frac{\chi'(z)\overline{\chi'(w)}}{\pi\Big(1 - \chi(z)\overline{\chi(w)}\Big)^2}, \qquad (z, w) \in \Omega \times \Omega,$$

であり,

$$\Gamma_\Omega(z) \equiv P_\Omega(z) \equiv \sqrt{\pi K_\Omega(z,z)}, \qquad z \in \Omega,$$

が成立する.

(註) 次の事実は興味深い. 円環領域$\Omega' = \{z; 1/\rho < |z| < \rho\}$ $\rho > 1$, では

$$P_{\Omega'}(z) \gtreqless \sqrt{\pi K_{\Omega'}(z,z)} \tag{5.1}$$

のすべてが起りうる; [**S2**, pp. 151-152] 参照.

1998年6月22 日, 京大,須川敏之氏より論文[**BG**] の存在について注意を喚起された. 感謝.

まず$AD(\Omega)$ を単連結とは限らないΩ で正則なf で$f' \in A^2(\Omega)$ であるものの全体とし,

$$AD'(\Omega) = \left\{f';\ f \in AD(\Omega)\right\}$$

とすれば, $AD'(\Omega)$ は$A^2(\Omega)$ の閉部分空間, 従って, **C** 上の Hilbert 空間である; [**E**, p. 43] 参照. そこで, $A^2(\Omega)$ でのone-point evaluation T_z を考えれば, $T_z(f') = f'(z)$ は$AD'(\Omega)$ での有界線型写像ゆえ, $AD'(\Omega)$ は核函数$K^r_\Omega(z,w)$ を持つ. すなわち,

$$T_w(f') = \left(f', K^r_\Omega(\cdot,w)\right) \qquad \forall f' \in AD'(\Omega),\ \forall w \in \Omega$$

で, $\|T_w\|_r$ をT_w の$AD'(\Omega)$ でのnorm とすれば,

$$\begin{aligned}&\sup\{|f'(z)|;\ f \in AD(\Omega),\ \|f'\| \le 1\}\\ &= \ \|T_z\|_r \ = \ \sqrt{K^r_\Omega(z,z)} \ \le \ \|T_z\| = \sqrt{K_\Omega(z,z)}\end{aligned}$$

が成立する.

集合$AD(\Omega)$ が非定数函数を一つ含めば, $\Big($ [**BG**] では$\Omega \notin O_{AD}$ $\Big)$, [**BG**, Theorem 3] の主張は

$$\sqrt{\pi K^r_\Omega(z,z)} \le P_\Omega(z), \qquad z \in \Omega, \tag{5.2}$$

と読める. なお, (5.2) は 実は 先行論文[**Bu**] ですでに示されている. すなわち, [**Bu**, (2.2), (4.1)] より直ちに得られる.

従って(5.2) は$\Omega = \Omega'$ の場合(5.1) とは著しい違いを示している.

なお(5.2) の一般化を簡易な証明とともに第9節であたえる.

6. P_Ω と Γ_Ω

まず始めに, Γ_Ω が考えられるようなΩ では必ずP_Ω が考えられ, 従って函数$A_\Omega = \Gamma_\Omega/P_\Omega$ がΩ で意味をもつ. 単連結領域$\Omega \neq \mathbf{C}$ では必ず$A_\Omega = 1$ である. 領域Ω が単連結でなければ, $0 < A_\Omega < 1$ であるが, これをさらに詳細に検討してみる. 普遍被覆射影$\phi : U \to \Omega$ による$z \in \Omega$ の逆像

$$\phi^{-1}(z) = \{w_1.w_2, \cdots, w_k, \cdots\}$$

は可算個の相異なる点からなる. (さらに, $\Omega \notin O_G$ より) Blaschke 条件 $\sum_{k=1}^{+\infty}(1-|w_k|) < +\infty$ が満たされるので, Blaschke 積

$$b(w) = \prod_{k=1}^{+\infty} \frac{|w_k|}{w_k}\left(\frac{w_k - w}{1-\overline{w_k}w}\right), \quad w \in U,$$

但し, $w_k = 0$ のときは対応項は $-w$ とする, が考えられ,

$$A_\Omega(z) = \prod_{1\leq k<+\infty,\ k\neq j} \left|\frac{w_j - w_k}{1-\overline{w_k}w_j}\right| \tag{6.1}$$

がすべての$j \geq 1$ について成立; 右辺は

$$(1-|w_j|^2)|b'(w_j)|$$

なので常に1 より小ゆえ$A_\Omega < 1$ in Ω がわかる[**Y2**].

一方,

$$\Big(\log A_\Omega(z)\Big)_{z\bar{z}} = \pi K_\Omega(z,z) - P_\Omega(z)^2 \quad \text{in} \quad \Omega$$

で右辺はlocal に$\Big($すなわち, $\Delta(a)$ で$\Big)$ $F(z,\bar{z})$, 但し,

$$F(z,w) = \pi K_\Omega(z,\overline{w}) - \frac{\psi'(z)\overline{\psi'(\overline{w})}}{\Big(1-\psi(z)\overline{\psi(\overline{w})}\Big)^2}$$

は$\Delta(a) \times \overline{\Delta(a)}$ で考える. 函数 ψ についてはSection 2 で述べた. すなわち, $F(z,\bar{z}) \not\equiv 0$ ならば$u = \log A_\Omega$ は (1.1) を満たす.

要約に述べた集合

$$\{z \in \Omega;\, \Gamma_\Omega(z) = cP_\Omega(z)\}, \quad 0 < c < 1,$$

の性質は定理Lの意味で明らかとなった.

7. 包含関係 $\Sigma \supset \Omega$ を満たす二領域 Σ, Ω

平面 $\mathbf{C}$ 内の二領域 Σ, Ω が $\Sigma \supset \Omega$ を満たすとき, 二不等式

$$P_\Sigma \le P_\Omega \quad \text{in } \Omega, \tag{7.1}$$

および

$$\Gamma_\Sigma \le \Gamma_\Omega \quad \text{in } \Omega, \tag{7.2}$$

は周知である. もしも

$$A_\Sigma \le A_\Omega \quad \text{in } \Omega \tag{7.3}$$

が正しければ, (7.2) は (7.1) および (7.3) から得られる. ここでは (7.3) の不成立の例を考えよう. [**Y2**] 参照. Punctured disks $\Sigma = U \setminus \{0\}$ および

$$\Omega = \left\{ z;\ 0 < |z - \frac{1}{2}| < \frac{1}{2} \right\}$$

が (7.3) の反例である. 実際,

$$A_\Sigma(z) = \frac{2|z| \log \dfrac{1}{|z|}}{1 - |z|^2}, \quad z \in \Sigma; \qquad A_\Omega(z) = A_\Sigma(2z - 1), \quad z \in \Omega,$$

ゆえ, $\mathcal{D} = \{z; |z - 2/3| < 1/3\}$ とおけば,

$$A_\Sigma(z) > A_\Omega(z) \iff z \in \Omega \cap \mathcal{D};$$

$$A_\Sigma(z) = A_\Omega(z) \iff z \in \Omega \cap \partial\mathcal{D};$$

$$A_\Sigma(z) < A_\Omega(z) \iff z \in \Omega \setminus (\mathcal{D} \cup \partial\mathcal{D}).$$

8. $\sqrt{\pi K_\Omega(z, z)}$ と $P_\Omega(z)$ との比較

円板 U から Ω の上への普遍被覆射影 ϕ があるとき, $z = \phi(w) \in \Omega$ に対して, $\rho_\Omega(z)$ を ϕ が $\{\zeta;\ |\zeta - w|/|1 - \overline{w}\zeta| < r\}$ で単葉となるような r, $0 < r \le 1$, の最大値とすれば, $\rho_\Omega(z)$ は $z = \phi(w)$ を満たす限り ϕ, w の選び方に依らない. このとき, $0 < \rho_\Omega \le 1$ で,

$$\exists z \in \Omega,\ \rho_\Omega(z) = 1 \iff \Omega \text{ が単連結} \iff \rho_\Omega(z) = 1 \quad \forall z \in \Omega,$$

である. 第5節 (**註**) と関連して,

$$\sqrt{\pi K_\Omega(z, z)} \le P_\Omega(z)/\rho_\Omega(z), \qquad z \in \Omega \tag{8.1}$$

を示そう. もちろん Ω が単連結ならば, (8.1) で等号成立. 証明のために, まず $z\in\Omega$ に対して ϕ を選んで $z=\phi(0)$ となるようにし, $\rho=\rho_\Omega(z)$ とおけば, $f\in A^2(\Omega)$, $\|f\|\le 1$ なら函数 $h(\zeta)=f\Big(\phi(\rho\zeta)\Big)\rho\phi'(\rho\zeta)$, $\zeta\in U$, は $A^2(U)$ の元であり, $A^2(U)$ で $\|h\|\le 1$ であるので,

$$|f(z)|\rho/P_\Omega(z)=|h(0)|\le\sqrt{K_U(0,0)}=1/\sqrt{\pi}$$

より $|f(z)|\le P_\Omega(z)/(\sqrt{\pi}\rho)$, 従って (8.1) を得る.

さて, (8.1) で等号が成立したとせよ. すなわち, h が極値問題

$$\sqrt{K_U(0,0)}=\max\Big\{|\psi(0)|;\ \psi\in A^2(U),\ \|\psi\|\le 1\Big\}$$

の極値函数であるとせよ. この時, 核函数の一般論から

$$h(w)=\frac{\epsilon K_U(w,0)}{\sqrt{K_U(0,0)}}=\frac{\epsilon}{\sqrt{\pi}}\qquad w\in U.$$

となる ϵ, $|\epsilon|=1$ の存在がわかるので $\Sigma=\{\phi(\rho w);\, w\in U\}$ とすれば,

$$\iint_\Sigma |f(\zeta)|^2 d\xi d\eta=1\qquad(\zeta=\xi+\eta)$$

ゆえ Ω と Σ とは面積 0 の集合 $\Omega\setminus\Sigma$ を除いて一致することになる. 仮に $\rho=\rho_\Omega(z)\ne 1$ とすれば, $\Omega\setminus\Sigma$は内点を持つことになるので, $\rho_\Omega(z)=1$, よって $\Omega=\Sigma$ でなければならない. すなわち Ω は単連結である.

9. 像面積

領域Ω で正則な函数f による Ω の像集合を本節では$f(\Omega)$ と表わす. すなわち, f が定数でなければf による Ω の Riemann 像の $\mathbf{C}$ への射影が $f(\Omega)$ である. 詳しく言えば,

$$f(\Omega)=\Big\{w\in\mathbf{C};\,\exists\, z\in\Omega,\ w=f(z)\Big\}\subset\mathbf{C}.$$

さて $f(\Omega)$ の面積を $A\Big(f(\Omega)\Big)$ と表わせば, $f'\in A^2(\Omega)$ ならば $A\Big(f(\Omega)\Big)\le\|f'\|^2$ である. 正則函数族 $\Phi(\Omega)$ を $A\Big(f(\Omega)\Big)\le 1$ を充たす Ω での正則函数f のすべてとする. 更に,

$$\alpha_\Omega(z)=\sup\Big\{|f'(z)|;\ f\in\Phi(\Omega)\Big\},\qquad z\in\Omega,$$

と定義すれば, 直ちに$\sqrt{K^r_\Omega(z,z)}=\|T_z\|_r\le\alpha_\Omega(z)$, $z\in\Omega$, を得る. 不等式

$$\sqrt{\pi}\alpha_\Omega(z)\le P_\Omega(z),\qquad z\in\Omega, \tag{9.1}$$

を証明するために普遍被覆写像$\phi : U \to \Omega$ を選んで$z = \phi(0)$ とし, 合成函数$g = f \circ \phi$, $f \in \Phi(\Omega)$, を考えれば, $g \in \Phi(U)$ である. 一般に U で正則な函数 h が $A\Big(h(U)\Big) < +\infty$ を充たせば, 周知の結果 $\Big($ [**M**, Theorem 1], で $r \to 1-0$ とせよ; また[**Y1**, Lemma] も参照あれ. $\Big)$ より

$$\pi |h'(0)|^2 \leq A\Big(h(U)\Big). \tag{9.2}$$

そこで, (9.2) で$h = g$ とすれば, $A\Big(g(U)\Big) = A\Big(f(\Omega)\Big) \leq 1$ ゆえ,

$$\pi \left(\frac{|f'(z)|}{P_\Omega(z)} \right)^2 = \pi |g'(0)|^2 \leq 1$$

より (9.1) を得る. 不等式(5.2) は(9.1) より直ちに導かれる.

上に見たように本節の議論は(9.1) の証明に関する限り, “ 核函数” は登場しない.

文献

[BG] A. F. Beardon and F. W. Gehring: Schwarzian derivatives, the Poincaré metric and the kernel function. *Comm. Math. Helv.* 55(1980), 50-64.

[Bu] J. Burbea: The Schwarzian derivative and the Poincaré metric. *Pacific J. Math.* 85(1979), 345-354.

[E] B. Epstein: Orthogonal families of analytic functions. Macmillan, New York, 1965.

[M] T. H. MacGregor: Length and area estimates for analytic functions. *Michigan Math. J.* 11(1964), 317-320.

[S1] N. Suita: Capacities and kernels on Riemann surfaces. *Arch. Rat. Mech. Anal.* 46(1972), 212-217.

[S2] N. Suita: Conformal metrics. *Sūrikaiseki Kenkyūjo Kōkyūroku* 323(1978), 139-153. (in Japanese)

[Y1] S. Yamashita: Criteria for functions to be Bloch. *Bull. Austral. Math. Soc.* 21(1980), 223-227.

[Y2] S. Yamashita: Poincaré density and two capacities. *Math. Japonica* 44(1996), 211-219.

[Y3] S. Yamashita: Slender sets for an elliptic partial differential equation with applications. *Math. Japonica* 45(1997), 457-481.

東京都立大学理学研究科
数学教室
192-0397 八王子市南大沢 2－1－1
e-mail: yamashin@math.metro-u.ac.jp

“狩猟民族は足元の明るいうちに村へ帰る.” —— 萱野茂