数理解析研究所講究録
1067 巻 1998 年 39-47

再生核，テータ函数と吹田予想の周辺

Akira Yamada
山田　陽　(東京学芸大学・教育)

1　概要

前半ではリーマン面上の基本的な等角不変量とそのダブル上のテータ函数, prime-form との関係を吹田予想を軸に簡単にまとめてみた．後半では，吹田予想を少しだけ一般化した一つの予想およびそれに関連して得られた結果を述べた．

2　等角不変量とテータ函数，prime form

以下簡単のため，特に断らない限り，Ω は種数 ρ で境界成分が $\Gamma_0,\ldots,\Gamma_{n-1}$ の $n(>0)$ 個である縁付きの閉リーマン面（の内部）とする．Ω のダブル $\hat{\Omega}$ は種数 $g=2\rho+n-1$ の閉リーマン面であり，裏と表を対応させる canonical anti-conformal involution $\phi:\hat{\Omega}\to\hat{\Omega}$ をもつ．$\phi(x)=\bar{x}$ と書くことにする．$\hat{\Omega}$ の ϕ に関して対称な canonical homology basis

$$A_1,B_1,\ldots,A_\rho,B_\rho,A_{\rho+1},B_{\rho+1},\ldots,A_{\rho+n-1},B_{\rho+n-1},A_{1'},B_{1'},\ldots,A_{\rho'},B_{\rho'}$$

としては，$B_{\rho+j}=\Gamma_j$ $(j=1,\ldots,n-1)$, $A_j,B_j\subset\Omega$ $(j=1,\ldots,\rho)$ かつ $\phi(A_j)=-A_{j'}$, $\phi(B_j)=B_{j'}$ $(j=1,\ldots,\rho+n-1)$ を満たすものをとることにする．ただし，$j'=j$ $(\rho+1\le j\le\rho+n-1)$ とする．また一般の種数 g の閉リーマン面を C であらわすことにする．テータ函数 $\theta(z)$ と prime form $E(x,y)$ の定義や基本的性質については必要に応じて Fay の講義録 [1] を参照してください．

$\tilde{K}(x,\bar{y})$ を exact Bergman kernel, $K(x,\bar{y})$ を Bergman kernel, $\hat{K}(x,\bar{y})$ を Szegö kernel, $R_a(x,\bar{y})$ $(\hat{R}_a(x,\bar{y}))$ を reference point が $a\in\Omega$ のときの (conjugate) Hardy H^2 kernel とする．また一般に $K(x)=K(x,\bar{x})$ などと略記しよう．

注意 *1.* 紛らわしいが，kernel function の第 2 変数の $\bar{y}$ は $\phi(y)$ の意味ではないことに注意する．

リーマン面上の等角不変量の大小関係について次の不等式はよく知られている．

定理 1 ([2], [5]). $g>0$ のとき任意の $x\in\Omega$ にたいして，

$$\pi\tilde{K}(x)<C_B(x)^2<\min\{\pi K(x),\ C_\beta(x)^2\}. \tag{1}$$

ただし，$C_B(x)=2\pi\hat{K}(x)$, $C_\beta(x)$ はそれぞれ x における *analytic capacity* と *logarithmic capacity.*

次の予想がある．

推測 1. $g>0$ のとき任意の $x\in\Omega$ にたいして，

$$C_\beta(x)^2<\pi K(x)<\hat{R}_x(x). \tag{2}$$

この不等式の左半分を**吹田 conjecture** [5], 右半分を**斉藤 conjecture** [4] という．現在のところ，これらの conjecture は二重連結領域でしか証明されていない (と思う).

Ω が planar の場合，上記の等角不変量は $\hat{\Omega}$ 上のテータ函数と prime form による簡潔な表現をもつ．$\omega(x,y)=\frac{d^2}{dxdy}\log E(x,y)dxdy$ を C 上の双線形第二種正規微分, $g(x,y)$ を Ω のグリーン函数とする．$g(\cdot,a)$ の Ω 内の critical points を $\{a_j\}_{j=1}^{g}$ としたとき $e_0(a)=\sum_{j=1}^{g}a_j-a-\Delta\in J(\hat{\Omega})$ とおく．グリーン函数の reference point a を固定するとき，$e_0=e_0(a)$ と略記する．

定理 2. Ω が *planar* $(g>0)$ のとき，任意の $x,y\in\Omega$ に対して次が成り立つ．

$$\left|\frac{E(x,y)}{E(x,\bar{y})}\right|=\exp(-g(x,y)),$$

$$K(x,\bar{y})=-\frac{1}{\pi}\omega(x,\bar{y}),\ (\tilde{K}(x,\bar{y})=-\frac{1}{\pi}\omega(x,\bar{y})), \tag{3}$$

$$\hat{K}(x,\bar{y})=\frac{1}{2\pi i}\frac{\theta(x-\bar{y})}{\theta(0)E(x,\bar{y})}, \tag{4}$$

$$R_a(x,\bar{y})=\frac{\theta(a-\bar{a}+e_0)\theta(x-\bar{y}+e_0)}{\theta(x-\bar{a}+e_0)\theta(a-\bar{y}+e_0)}\frac{E(x,\bar{a})E(\bar{y},a)}{E(\bar{a},a)E(x,\bar{y})}, \tag{5}$$

$$\hat{R}_a(x,\bar{y})=\frac{\theta(x-\bar{a}+e_0)\theta(a-\bar{y}+e_0)\theta(x-\bar{y}-e_0)E(a,\bar{a})}{\theta^2(e_0)\theta(a-\bar{a}+e_0)E(x,\bar{y})E(x,\bar{a})E(\bar{y},a)}, \tag{6}$$

$$C_B(x)=\frac{\theta(x-\bar{x})}{\theta(0)iE(x,\bar{x})},\ C_\beta(x)=\frac{1}{iE(x,\bar{x})}. \tag{7}$$

証明. [1], [2], [8] 参照. □

注意 *2.* (4)-(6) は non-planar の時も成り立つ．

注意 *3.* (3) は non-planar のときも第一種正規微分の二次形式を加えた形で成り立つが，これほど簡単な式にはならない [1, p.126]．また $\tilde{K}(x,\bar{y})$ の時は A-cycles を境界成分にとるような canonical homology basis をとらねばならない．

注意 *4.* 平面領域の場合, $a\in\Omega$ での Ahlfors function $f_a(x)$ が $\hat{K}(x,a)/\hat{L}(x,a)$ で表せることはよく知られている．ただし，$\hat{L}(x,y)$ は Szegö kernel の adjoint L kernel. 従って，Ω が planar の場合, Ahlfors function は次の表現をもつ [1, p.131].

$$f_a(x)=\epsilon\frac{\theta(x-\bar{a})E(x,a)}{\theta(x-a)E(x,\bar{a})},\ (|\epsilon|=1).$$

不等式 (1) をテータ函数の立場から考える上で次の三つの等式は有用である．

$\theta(e)\neq 0$ $(e\in\mathbb{C}^g)$ のとき任意の $x,y,a,b\in C$ に対して

$$\begin{aligned}&\frac{\theta(x-a-e)\theta(y-b-e)}{\theta^2(e)E(x,a)E(y,b)}-\frac{\theta(x-b-e)\theta(y-a-e)}{\theta^2(e)E(x,b)E(y,a)}\\&\qquad=\frac{\theta(x+y-a-b-e)E(x,y)E(b,a)}{\theta(e)E(x,a)E(x,b)E(y,a)E(y,b)},\end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned}&\frac{\theta(x-a+e)\theta(x-b-e)E(a,b)}{\theta(e)\theta(e+b-a)E(x,a)E(x,b)}\\&\qquad=\omega_{b-a}(x)+\sum_{j=1}^{g}\left[\frac{\partial\log\theta}{\partial z_j}(e+b-a)-\frac{\partial\log\theta}{\partial z_j}(e)\right]u_j(x),\end{aligned} \tag{9}$$

$$\frac{\theta(y-x-e)\theta(y-x+e)}{\theta^2(e)E(x,y)^2}=\omega(x,y)+\sum_{i,j=1}^{g}\frac{\partial^2\log\theta}{\partial z_i\partial z_j}(e)u_i(x)u_j(y). \tag{10}$$

ここで $\omega_{b-a}(x)$ は a,b にそれぞれ留数 $-1,1$ の一位の極をもつ第三種正規微分であり，$\{u_i(x)\}_{i=1}^{g}$ は 第一種正規微分である．

式(8) は Fay の trisecant formula [1, p.34] と呼ばれ，テータ函数のリーマン面への応用においてもっとも重要な公式である．式(9) と(10) は(8) から順次簡単な極限移行 (すなわちロピタルの法則と prime form の対角線 $x=y$ の近傍での局所表示 $E(x,y)\sqrt{dxdy}=y-x+$ higher terms を使う) を行うことで得られる．

(10) で $e=0$, $y=\bar{x}$ と特殊化すると，テータ函数の定義より $\left(\frac{\partial^2\log\theta}{\partial z_i\partial z_j}(0)\right)>0$ がすぐ解るので平面正則領域の場合の $C_B(x)^2<\pi K(x)$ が直ちに示される [2].

また(6) より

$$\hat{R}_x(x)=\frac{\theta(x-\bar{x}+e_0)\theta(x-\bar{x}-e_0)}{\theta^2(e_0)(iE(x,\bar{x}))^2} \tag{11}$$

となるので，(10) で $e=e_0$, $y=\bar{x}$ とおくと，もしも $\left(\frac{\partial^2\log\theta}{\partial z_i\partial z_j}(e_0)\right)<0$ (強い意味での斉藤 conjecture) が成り立てば，$\pi K(x)<\hat{R}_x(x)$ が従うことがわかる．

問題 1. 行列 $\left(\frac{\partial^2\log\theta}{\partial z_i\partial z_j}(e)\right)$ はいつ正定値または負定値になるか？

ちなみに，吹田–斉藤 conjecture (2) の第 2 項を抜き去った弱い形の不等式は，planar の場合，容易に証明することができる．すなわち

定理 3 ([9]). Ω が *planar*$(g>0)$ のとき $C_\beta(x)^2<\hat{R}_x(x)$ $(\forall x\in\Omega)$.

証明. (11) と(7) より $\frac{\theta(x-\bar{x}+e_0)\theta(x-\bar{x}-e_0)}{\theta^2(e_0)}>1$ であればよい．しかし，$F(e)=\theta(x-\bar{x}+e)/\theta(e)$ とおくと，対称性より $x-\bar{x}\in\hat{T}_0$ が成り立つから，次の定理より $F(e_0-x+\bar{x})\leq F(e_0)$. ここで $g>0$ の仮定より $x\neq\bar{x}$. よって等号は成り立たない． □

定理 4 ([8]). Ω が *planar*$(g>0)$ のとき，任意の $a\in\Omega$ と $e\in\hat{T}_0(=\{z\in\mathbb{C}^g|\sqrt{-1}z\in\mathbb{R}^g\})$ にたいして不等式

$$\exp\Big(-\sum_{j=1}^{g}g(a_j,a)\Big)\leq\theta(a-\bar{a}+e)/\theta(e)\leq\exp\Big(\sum_{j=1}^{g}g(a_j,a)\Big)$$

が成り立つ．右側 (左側) の不等式で等号は $e=e_0(a)$ $(e=\bar{a}-a-e_0(a))$ のときに限る．

3 Fay's trisecant formula

Fay の trisecant formula は Riemann's vanishing theorem を用いて簡単に証明することが出来る [9]. この等式は本質的には第三種正規微分の加法性

$$\omega_{a-b}(x)+\omega_{b-c}(x)=\omega_{a-c}(x)$$

に帰着する事に注意する．trisecant formula の一つの拡張として，次の一般加法定理がある．

定理 5 (Fay). $\theta(e)\neq 0$ $(e\in\mathbb{C}^g)$ のとき, 任意の $x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n\in C$ に対して

$$\theta(\sum_1^n x_i-\sum_1^n y_i-e)\frac{\prod_{i<j}E(x_i,x_j)E(y_j,y_i)}{\theta(e)\prod_{i,j}E(x_i,y_j)}=\det\left(\frac{\theta(x_i-y_j-e)}{\theta(e)E(x_i,y_j)}\right) \tag{12}$$

証明. $n=2$ のときは(12) は trisecant formula と一致する. 一般の n に対しては, 下記の (行列式に関する)Jacobi の公式を使うと容易に帰納法で証明できる [9].

$$|A_{n-2}|\cdot|A|=\begin{vmatrix}\Delta_{n-1,n-1} & \Delta_{n-1,n}\\ \Delta_{n,n-1} & \Delta_{n,n}\end{vmatrix} \tag{13}$$

ここで, A は $n\times n$ 行列, A_{n-2} は A の $(n-2)$-主対角行列, $\Delta_{i,j}$ は A の (i,j)-余因子である. □

4 Multiplicative Bergman kernel

まず最初に吹田予想 (SC) から容易に導ける結論を一つ紹介する. 絶対値一価な多価有界正則函数 $\exp(-g(x,p)-ig^*(x,p))$ を $f_p(x)$ とおく.

定義 1. $L(z,t)$ を Bergman kernel $K(z,\bar{t})$ の adjoint L-kernel とする.
L-conjecture (LC): $\forall t\in\Omega,\exists z\in\Omega$ s.t. $L(z,t)=0$.

定理 6. *$g>0$ のとき (SC) $\Longrightarrow$ (LC).*

証明. 背理法. 任意の $z\in\Omega$ で $L(z,t)\neq 0$ とする. 函数 $|\frac{K(z,t)}{L(z,t)f_t(z)^2}|$ は Ω 上で劣調和, $\partial\Omega$ 上で 1 となるので, 最大値の原理より Ω 上で 1 以下である. 従って $z\to t$ とすると $\frac{\pi K(t)}{C_\beta(t)^2}\leq 1$. これは, (SC) に矛盾する. □

注意 5. 特に, $g=1$ のとき (LC) が成り立つ.

定義 2. $M(\Omega)$ を Ω 上の unitary multiplier 全体の集合とする. すなわち,

$$M(\Omega)=\{\chi|\chi\in\mathrm{Hom}(\pi_1(\Omega),\mathbb{C}^*)\text{ かつ }|\chi|=1\}.$$

定義 3. $\rho>0$ を Ω 上の連続な weight とするとき, $\chi\in M(\Omega)$ にたいして

$$\Gamma_\rho^\chi(\Omega)=\{\omega|\text{multiplier }\chi\text{をもつ}\Omega\text{上の正則 Prym 微分 s.t. }\iint_\Omega|\omega|^2\rho<\infty\} \tag{14}$$

$$D_\rho^\chi(\Omega)=\{f|\text{multiplier }\chi\text{をもつ}\Omega\text{上の乗法的正則函数 s.t. }df\in\Gamma_\rho^\chi(\Omega)\} \tag{15}$$

$$\Gamma_{E,\rho}^\chi(\Omega)=\{\omega|\omega=df,\ \exists f\in D_\rho^\chi(\Omega)\} \tag{16}$$

χ が unitary であることにより, $\Gamma_\rho^\chi(\Omega)$ と $\Gamma_{E,\rho}^\chi(\Omega)$ には well-defined な内積

$$\langle\omega_1,\omega_2\rangle=\iint_\Omega\omega_1\overline{\omega_2}\rho<\infty\}$$

が定義され, 再生核をもつ Hilbert 空間になる. それぞれの再生核を $K_\rho^\chi(x,\bar{y})$. $K_{E,\rho}^\chi(x,\bar{y})$ で表し, *multiplicative (exact) Bergman kernel* と呼ぶ. multiplier を指定したいときは χ-(exact) Bergman kernel などと呼ぶ. また特に $K_{E,\rho}^\chi(\cdot,\bar{y})=dF(\cdot)$ で $F(y)=0$ とあらわせるとき $K_{E,\rho}^\chi(\cdot,\bar{y})$ は $x=y$ で *strongly exact* と呼ぶ. $\rho\equiv 1$ または $\chi\equiv 1$ のときは, ρ または χ を省略することにし

て，たとえば $\Gamma^{\chi}(\Omega)$, $K^{\chi}(x,\bar{y})$, $K_{\rho}(x,\bar{y})$ とかく．またグリーン函数 $g(\cdot,p)$ を g_p と略記し，函数 $f_p=\exp(-g_p-ig_p^*)$ の multiplier を χ_p とかく．

吹田予想 (SC) は，円環の場合の証明 [5] から解るように，本質的には乗法的な対数容量 (無限乗積) と加法的な Bergman 核 (無限級数) との比較に帰着される．この点に，吹田予想の証明の困難さの一因があると思われる．そこで，次の簡単な事実に注意する．

定理 7. $\Omega\notin O_G$ のとき，任意の $x,p\in\Omega$ で

$$K^{\chi_p}(x,\bar{p})=K_E^{\chi_p}(x,\bar{p})=\frac{C_\beta(p)}{\pi}df_p(x).$$

特に，$\pi K^{\chi_p}(p)=C_\beta(p)^2$ が成り立ち，また $K^{\chi_p}(\cdot,\bar{p})$ は *strongly exact* である．

したがって，(SC) は multiplicative Bergman kernel の族の中での，比較ともみなせることになる．そこで，円環の場合の数値実験に基づき，次の推測に導かれる．

推測 2 (Extended Suita Conjecture (ESC)). $\Omega\notin O_G$ のとき，任意の $p\in\Omega$ と $\chi\in M(\Omega)$ にたいして $C_\beta(p)^2\le\pi K^{\chi}(p)$. 等号は $\chi=\chi_p$ のときに限る．

この予想は多価な multiplicative Bergman 核の代わりに重みつきの (一価)Bergman 核を使うと，容易に次の同値な形に述べることができる．

推測 3. $p\in\Omega\notin O_G$ とする．*Weight* ρ *が* Ω *上の実調和函数* $h(z)$ *によって* $\rho(z)=e^{-2h(z)}$ *と表されるとき，* $\rho(p)K_\rho(p)\ge\frac{1}{\pi}C_\beta(p)^2$. *等号は* $flux(h)\equiv flux(g_p)\pmod{2\pi}$ *のときに限る．*

今のところ，筆者は等角同値なものを除くと開円板, punctured disk および円環の場合にのみ (ESC) の証明を得ることはできたが，一般の場合に成り立つかどうかは解らない．

定理 8. Ω *が開円板, punctured disk および円環に等角同値のとき，(ESC) が成り立つ．*

証明. Ω によって場合分けする．

開円板の場合: 単連結より multiplier は trivial なものに限る．従って明らか．

punctured disk の場合: (ESC) の等角不変性より, $\Omega=\Delta^*(=\{0<|z|<1\})$ と仮定してよい．このとき，原点の回りの multiplier を $e^{2\pi i\alpha}$ $(0<\alpha\le 1)$ とすると，完備直交系 $\{z^{n+\alpha}\}_{n=-1}^{\infty}$ を正規化して簡単な計算で $\pi K_\alpha(z,\bar{w})=\frac{(z\bar{w}+\alpha(1-z\bar{w}))}{(1-z\bar{w})^2}z^{\alpha-1}\bar{w}^{\alpha-1}$ を得る．よって，$|z|=r$ $(0<r<1)$ とおくと，$\pi K_\alpha(z)=\frac{(r^2+\alpha(1-r^2))r^{2(\alpha-1)}}{(1-r^2)^2}$. この具体的な形より，$\pi K_\alpha(z)$ が α に関して最小になる必要十分条件が $\alpha=1$(すなわち通常の Bergman 核) であることが容易に解る．Δ^* のグリーン函数は Δ のグリーン函数と一致し, flux=0 であるから (ESC) が成り立つ．

円環の場合: 等角不変性より Ω は適当な τ (<0) に対して長方形 $\{\tau\le\mathrm{Re}\,z\le 0,\ 0<\mathrm{Im}\,z<\pi\}$ の虚軸に平行な二辺を同一視した領域と仮定できる．再び等角不変性より虚軸上にある Ω の部分集合上で調べれば十分である．円環は planar hyperelliptic (最後の章参照) であるから定理 14 により，multiplicative Bergman kernel は虚軸上で prime-form で表現できる．

$$\pi K^{\chi}(iz,\overline{ip})=\frac{d}{dw}\left\{\frac{E(w,ia)}{E(ia,\overline{ip})E(w,\overline{ip})}\right\}\bigg|_{w=iz},\quad z,p\in(0,\pi),\exists a\in\mathbb{R}.$$

ただし，dz が $\hat{\Omega}$ の第一種正規微分であるから，multiplier は $\chi=e^{i(a+p)}$ で与えられる．円環のダブルの種数は 1 なので，prime-form はテータ函数で表現される [1, p.35].

$$E(x,y)=\frac{\theta\left[\begin{smallmatrix}1/2\\1/2\end{smallmatrix}\right](y-x)}{\theta\left[\begin{smallmatrix}1/2\\1/2\end{smallmatrix}\right]'(0)}.$$

更に，周期性と因子を比較して容易に関係 $\theta\left[\begin{smallmatrix}1/2\\1/2\end{smallmatrix}\right](2iz) = const\cdot\vartheta_1(z)$ が解る．ただし，$\vartheta_1(z)$ は Whittaker-Watson の本 [6] の 4 種類ある Jacobi の楕円テータ函数 (基本周期が π) のうち唯一の奇函数を表す．結局

$$\pi K^{\chi}(2iz,\overline{2ip}) = \frac{\vartheta_1{}'(0)}{4}\frac{d}{dz}\left\{\frac{\vartheta_1(z-a)}{\vartheta_1(a+p)\vartheta_1(z+p)}\right\},\quad z,p\in(0,\pi/2),$$

特に，

$$\pi K^{\chi}(2iz) = \frac{\vartheta_1{}'(0)}{4}\frac{\vartheta_1{}'(z-a)\vartheta_1(2z)-\vartheta_1(z-a)\vartheta_1{}'(2z)}{\vartheta_1(z+a)\vartheta_1(2z)^2},\quad z\in(0,\pi/2),\ a\in\mathbb{R},\tag{17}$$

となる．定理 14 の下の注意により，(ESC) を示すためには，(17) の右辺が a の函数として $a\equiv z \pmod \pi$ のとき，またそのときに限り最小値を取ることを証明すればよい．しかし，これは変数の線型変換 $\{z-a=z'-a',\ 2z=z'+a'\}$ により次の補題に帰着されるので円環の場合の (ESC) は示された． □

補題 1. *Nome* $q=e^{i\pi\tau}$ が正のとき，任意の $x,a\in\mathbb{R}$ にたいして不等式

$$\frac{\vartheta_1{}'(x-a)\vartheta_1(x+a)-\vartheta_1(x-a)\vartheta_1{}'(x+a)}{\vartheta_1(2a)}\geq\vartheta_1{}'(0)$$

が成り立つ．等号は $x\equiv\pm a \pmod\pi$ のときに限る．

証明．まず，$\vartheta_1(2a)=0$ すなわち $a\equiv 0 \pmod{\pi/2}$ のとき，上の不等式の左辺は a について除去可能な特異点となり，値 $\frac{1}{\vartheta_1{}'(0)}(\vartheta_1{}'^2(x)-\vartheta_1(x)\vartheta_1{}''(x))$ を持つことに注意する．左辺は a について，周期 π の偶函数なので $0\leq a<\pi/2$ と仮定できる．場合分けする．

$0<a<\pi/2$ の場合: $f(z)=\vartheta_1{}'(z-a)\vartheta_1(z+a)-\vartheta_1(z-a)\vartheta_1{}'(z+a)$ とおく．$f'(z)=\left\{\frac{\vartheta_1{}''(z-a)}{\vartheta_1(z-a)}-\frac{\vartheta_1{}''(z+a)}{\vartheta_1(z+a)}\right\}\vartheta_1(z+a)\vartheta_1(z-a)$ と変形して符号を調べよう．一般に，実軸上で常に $g(z)/h(z)>0$ が成り立つとき $g(z)\approx h(z)$ と書くことにする．楕円テータ函数の無限乗積表示 $\vartheta_1(z)=2q^{1/4}\sin z\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})\prod_{n=1}^{\infty}(1-2q^{2n}\cos 2z+q^{4n})$ [6, p.470] より，明らかに $\vartheta_1(z)\approx\sin z$．また，熱方程式 $\frac{\partial^2\vartheta_1(z|\tau)}{\partial^2 z}=-\frac{4}{\pi i}\frac{\partial\vartheta_1(z|\tau)}{\partial\tau}$ [同上] より，$\frac{\vartheta_1{}''(z)}{\vartheta_1(z)}=-\frac{4}{\pi i}\frac{\partial}{\partial\tau}\log\vartheta_1(z|\tau)=const+16\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nq^{2n}(\cos 2z-q^{2n})}{1+q^{4n}-2q^{2n}\cos 2z}$．よって，$\frac{\vartheta_1{}''(z)}{\vartheta_1(z)}=F(\cos 2z)$ と書ける．ただし，$F(z)$ は $\mathbb{C}$ 上で有理型かつ区間 $[-1,1]$ 上で正則であり，項別微分することにより $[-1,1]$ 上で $F'(z)>0$ であることがすぐわかる．従って，微分の平均値の定理より $f'(z)=(F(\cos 2(z-a))-F(\cos 2(z+a)))\vartheta_1(z+a)\vartheta_1(z-a)\approx(\cos 2(z-a)-\cos 2(z+a))\sin(z+a)\sin(z-a)\approx\sin 2z\sin(z+a)\sin(z-a)$．$f(z)$ は周期 π を持つのでこの三角函数の式の符号の変化を $0\leq z\leq\pi$ で調べて，$f(z)$ は $z=a,\ \pi-a$ のとき，またそのときのみ最小値 $\vartheta_1{}'(0)\vartheta_1(2a)$ をとる事がわかる．$0<a<\pi/2$ のとき $\vartheta_1(2a)>0$ なので，補題が示された．

$a=0$ の場合: $f(z)=\vartheta_1{}'^2(z)-\vartheta_1(z)\vartheta_1{}''(z)$ とおく．$f'(z)=-\left(\frac{\vartheta_1{}''(z)}{\vartheta_1(z)}\right)'\vartheta_1(z)^2$ となるから上と同様にして $f'(z)\approx\sin 2z\sin^2 z$．よって，$f(z)$ は $z\equiv 0 \pmod\pi$ のみで最小値 $\vartheta_1{}'(0)^2$ をとる． □

定義 4. Ω 上の multiplier $\chi\in\mathrm{Hom}(\pi_1(\hat{\Omega}),\mathbb{C}^*)$ にたいして，

$$\chi\text{: symmetric}\iff\forall c\in\pi_1(\hat{\Omega}),\ \chi(\phi(c))=\overline{\chi}^{-1}(c)$$

定義 5. $\chi\in M(\Omega)$ にたいして，その $\hat{\Omega}$ 上への extension $\hat{\chi}$ で $\hat{\chi}(A_{\rho+j})=1\ (j=1,\ldots,n-1)$ をみたす symmetric multipiler $\hat{\chi}$ が unique に存在する．$\hat{\chi}$ を χ の *symmetric extension* と呼ぶ．

定義より，$\hat{\chi}=1\iff\chi=1$ に注意する．

定義 6. D を Ω 上の integral divisor とする．$\hat{\chi}$ を multiplier にもち $\mathrm{div}(\omega) \geq 1/\bar{D}$ である $\hat{\Omega}$ 上の有理型 Prym 微分 ω 全体の集合を $\Gamma^{\hat{\chi}}(1/\bar{D}, \hat{\Omega})$ とする．また，$\Gamma_E^{\chi}(D, \Omega) = \{\omega \in \Gamma_E^{\chi}(\Omega) |$ multiplier χ をもち $\mathrm{div}(F) \geq D$ をみたす多価正則函数 F で $\omega = dF$ とかける $\}$ とおく．

multiplicative Bergman kernel も通常の Bergman kernel と同じく Shottky 微分であることがわかる．それらの性質を調べるのに次の Ahlfors decomposition は有用である．証明は，multiplier χ による場合わけと Prym 微分の周期を調べて得られる．

定理 9. $\chi \in M(\Omega)$, D を Ω 上の *integral divisor* としたとき，次の直交分解が成り立つ．

$$\Gamma^{\chi}(\Omega) = \Gamma^{\hat{\chi}}(1/\overline{D}, \hat{\Omega}) \oplus \Gamma_E^{\chi}(D, \Omega) \tag{18}$$

5 Norm inequality

定理 10. $\Omega \notin O_G$ のとき，任意の $f_1 \in \Gamma^{\chi}(\Omega)$ と $df_2 \in \Gamma_{E,2g_p}^{\chi}(\Omega)$ にたいして

$$\iint_{\Omega} |f_1 + df_2|^2 (1 - e^{-2g_p}) - \iint_{\Omega} |f_1|^2 - \iint_{\Omega} |df_2|^2 2g_p \\ \leq \pi |f_2(p)|^2 - \iint_{\Omega} |f_1 f_p - f_2 df_p|^2. \tag{19}$$

Ω が *compact bordered surface* のときは，(19) で常に等号がなりたつ．

注意 *6.* g_p の代わりに，それらの有限和 $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j g_{p_j}$ $(\alpha_j > 0)$ を使っても，同様な不等式が得られる．

Compact bordered surface のときは，上の定理の系として，$(1 - e^{-2g_p})$ の重み付きの自乗可積正則函数の空間は Bergman space と Hardy H^2 space の和空間であり，その共通部分が Dirichlet 有限函数の空間になっていることがわかる．

系 1. 次がなりたつ．

(1) $\Gamma_{1-e^{-2g_p}}^{\chi}(\Omega) = \Gamma^{\chi}(\Omega) + \Gamma_{E,2g_p}^{\chi}(\Omega)$, $\Gamma^{\chi}(\Omega) \cap \Gamma_{E,2g_p}^{\chi}(\Omega) = \Gamma_E^{\chi}(\Omega)$,
(2) $\Omega \notin O_G$ のとき，任意の $f_1 \in \Gamma^{\chi}(\Omega)$ と $df_2 \in \Gamma_{E,2g_p}^{\chi}(\Omega)$ にたいして

$$\iint_{\Omega} |f_1 + df_2|^2 (1 - e^{-2g_p}) - \iint_{\Omega} |f_1|^2 - \iint_{\Omega} |df_2|^2 2g_p \\ \leq \frac{|f_2(p)|^2}{K^{\chi\chi_p}(p)} (\pi K^{\chi\chi_p}(p) - C_{\beta}(p)^2). \tag{20}$$

等号の意味を両辺同時に無限大になることも許すと，次の等式が得られる．

系 2. $\Omega \notin O_G$ のとき，絶対値一価な Ω 上の任意の正則函数にたいして

(1) $\iint_{\Omega} |d(f_p f)|^2 = \pi |f(p)|^2 + \iint_{\Omega} |df|^2 (1 + 2g_p)$,
(2) $\iint_{\Omega} |d(f_p f)|^2 2g_p = \pi |f(p)|^2 + \iint_{\Omega} |df|^2 2g_p$,
(3) $\iint_{\Omega} |d(f_p f)|^2 = \iint_{\Omega} |d(f_p f)|^2 2g_p + \iint_{\Omega} |df|^2$,
(4) $\iint_{\Omega} |f df_p|^2 \leq \pi |f(p)|^2 + \iint_{\Omega} |df|^2 (e^{-2g_p} - 1 + 2g_p)$.

二つの再生核 K_1, K_2 に対して，ある再生核 K_3 が存在して $K_2+K_3=K_1$ となるとき，$K_2 \ll K_1$ と書く．

ノルム不等式より，再生核の和と (ESC) には密接な関係があることがわかる．

命題 1. 任意の *multiplier* χ にたいして，次が成り立つ．

(1) $K^\chi + K^\chi_{E,2g_p} \ll K^\chi_{1-e^{-2g_p}} \iff \pi K^{\chi\chi_p}(p) \le C_\beta(p)^2$,
(2) $K^\chi + K^\chi_{E,2g_p} = K^\chi_{1-e^{-2g_p}} \implies C_\beta(p)^2 = \pi K^{\chi\chi_p}(p)$,
(3) 任意の $\Omega \notin O_G$ にたいして，$K^\chi_{1-e^{-2g_p}} \underset{\neq}{\ll} K^\chi + K^\chi_{E,2g_p} \implies C_\beta(p)^2 < \pi K^{\chi\chi_p}(p)$,
(4) $K^\chi_{1-e^{-2g_p}} \ll K^\chi + K^\chi_{E,2g_p} \implies C_\beta(p)^2 \le \pi K^{\chi\chi_p}(p)$.

注意 *7.* (1) で $\Longleftarrow$ という関係は任意の $\Omega \notin O_G$ で成り立つ．

円板では簡単な計算で $K + K_{E,2g_p} = K_{1-e^{-2g_p}}$ が成り立つことがわかる．より一般に，定理 7 と命題 1 (1) より次が成り立つ．

定理 11. $\Omega \notin O_G$ のとき，$K + K_{E,2g_p} \ll K_{1-e^{-2g_p}}$. *Compact bordered surface* のとき，ここで等号となるのは Ω が単連結の時に限る．

この定理より，命題 1 の(4) の仮定は $\chi = id$ の場合には成り立たないことがわかる．

6 χ-Bergman kernel の exactness

楕円函数の公式を利用して，円環の χ-Bergman kernel が $\chi \neq 1$ のとき exact になることがわかった．この理由を調べて，以下の結果を得た．

定理 12. $p \in \Omega$ とする．次は同値．

(1) χ-*Bergman kernel* $K^\chi(\cdot, \bar{p})$ は *exact*,
(2) 任意の $v \in \Gamma^{\hat{\chi}}(\hat{\Omega})$ にたいして，$v(p) = 0$.
(3) $\bar{p}$ のみに一位の極をもち，それ以外では正則な $\hat{\Omega}$ 上の $\hat{\chi}$-有理型函数 ψ_p が存在する．

このとき更に，Ω が単連結でないと仮定すると次が成り立つ．
(i) $\chi \neq 1$, (ii) (3) の函数 ψ_p は定数倍を除いて一意的であり，(iii) また χ に ψ_p の *unique zero* を対応させる写像は単射になる．

注意 *8.* $\chi = \chi_p$ のとき $\psi_p = f_p$ であり，$f_p(p) = 0$ より，(iii) の対応は $\chi_p \leftrightarrow p$ となっている．

ところで，平面正則領域でダブルが hyperelliptic なものを，*planar hyperelliptic* と呼ぶことにする．Ω が planar hyperelliptic のとき，Ω は $\hat{\mathbb{C}}$ から実軸上の有限個の閉区間を取り去った領域と等角同値になる [7]．このとき，$\hat{\mathbb{C}}$ 上の複素共役写像の引き戻しである Ω 上の anti-conformal involution を σ で表そう．σ は $\hat{\Omega}$ 上の anti-conformal involution に拡張できるが，その不動点集合は $g+1$ 個の Jordan 閉曲線の和集合となっている．この各成分を σ-*component* と呼ぼう．

上記の定理は Bergman kernel が exact になるのは極めて希な現象である事を述べている．更に詳しく次がわかる．

定理 13. $\exists p \in \Omega, \exists \chi \neq \chi_p$ *s.t.* $K^\chi(\cdot, \bar{p})$: *exact* $\implies \Omega$: *planar hyperelliptic.*
また，Ω は複連結で *planar hyperelliptic* と仮定すると，$\chi \neq \chi_p$ で $K^\chi(\cdot, \bar{p})$ が *exact* となる必要十分条件は $\sigma(p) = p$ かつ $\chi(B_j) = \exp(\int_{\bar{p}}^{a} u_j)$ $(j = 1, \ldots, g)$ となる $\hat{\Omega}$ 上の点 $a (\neq \bar{p})$ が p と同じ σ-*component* に存在することである．

Exact な χ-Bergman kernel は Jordan 閉曲線である σ-component 上の点をパラメータとして prime form を用いて表される.

定理 14. Ω は複連結 *planar hyperelliptic* で $p \in \Omega$ と $a \in \hat{\Omega}$ $(a \neq \bar{p})$ は同じ σ*-component* 上にあるとするとき,

$$K^{\chi}(z, \bar{p}) = \frac{1}{\pi} d_z \left[\frac{E(z,a)}{E(a,\bar{p})E(z,\bar{p})} \right], \ (\forall z \in \Omega). \tag{21}$$

ただし, $\chi(B_j) = \exp(\int_{\bar{p}}^{a} u_j)$ $(j = 1, \ldots, g)$.

注意 *9.* $a = p$ のとき, $K^{\chi} = K^{\chi_p}$ であり, また $a \to \bar{p}$ のとき, $K^{\chi} \to K$(通常の Bergman kernel) である.

参考文献

[1] J. D. Fay, *Theta functions on Riemann surfaces*, Lecture Notes in Mathematics **352**, Springer-Verlag, 1973.

[2] D. A. Hejhal, *Theta functions, kernel functions and Abelian integrals*, Amer. Math. Soc. Memoir **129**, 1972.

[3] S. Saitoh, *The Bergman norm and the Szegö norm*, Trans. Amer. Math. Soc. **249** (1979), 261–279.

[4] S. Saitoh, *Theory of reproducing kernels and its applications*, Pitman Research Notes in Mathematics Series **189**, Longman Scientific & Technical, 1988.

[5] N. Suita, *Capacities and kernels on Riemann surfaces*, Arch. Rational Mech. Anal. **46** (1972), 212–217.

[6] E. T. Whittaker and G. N. Watson, *A course of modern analysis*, Cambridge University Press, Bentley House, 200 Euston Road, London, 1902.

[7] A. Yamada, *On the linear transformations of Ahlfors functions*, Kodai Math. J. **1** (1978), 159–169.

[8] A. Yamada, *Positive differentials, theta functions and Hardy H^2 kernels*, Proc. Amer. Math. Soc., (to appear).

[9] A. Yamada, *Fay's trisecant formula and Hardy H^2 reproducing kernels*, Proceedings of the ISAAC Congress at University of Delaware, Kluwer Academic Publishers, (to appear).