数理解析研究所講究録
1067 巻 1998 年 65-72



# 完全円形領域と Bergman 計量

大沢健夫（名大・多元数理）

T. Ohsawa (Nagoya University)

1. $\Omega$ を $\mathbb{C}^n$ の擬凸領域とし, $K_\Omega(z,\overline{w})$ を $\Omega$ 上の Bergman 核関数とする. $K_\Omega$ の境界での挙動は, ごく自然な方法で境界 $\partial\Omega$ の幾何を通して $\Omega$ 上の $L^2$ 正則な関数の質量分布を反映し, それは実際 [H-1] やその後のさまざまな研究成果にも（たとえば [D], [P], [O-1, O-2], [C], [D-H], [B-S-Y] など）見ることが出来る.

2. 双正則幾何の観点からは, Bergman 計量

$$ds_\Omega^2 = \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} \frac{\partial^2 \log K_\Omega(z,\overline{z})}{\partial z^\alpha \partial \overline{z}^\beta} dz^\alpha \otimes d\overline{z}^\beta$$

もまた $\Omega$ に付随する自然な量である. 双正則変換の下での Hermite 計量の不変性により, Bergman 計量は内在的な量であるが, $K_\Omega$ の値はそうではない. この $K_\Omega$ と $ds_\Omega$ の漸近挙動から, 固有正則写像に関する重要な情報を引き出すことが出来ることは良く知られている（より詳細な記述については [F], [B-N] を参照）.

3. これらの応用の他にも, Bergman 核や計量の境界挙動は現在の複素解析学においてもかなりの重要性をもっている. なぜならば, それらは $\overline{\partial}$-作用素に対する $L^2$ 評価式の方法にさらなる発展を促す問題を供給しているからである. たとえば, [O-1] において、 $\partial\Omega$ が $C^2$ 級で, $\delta_\Omega(z)$ を $z$ から $\partial\Omega$ への距離を表す関数であるとするとき, $K_\Omega(z,\overline{z}) \geq \delta_\Omega(z)^{-2}$ が成り立つかどうかという問題が提出された. そして, [O-T] において $L^2$ 正則関数のごく一般的な拡張定理の系として肯定的な答が得られ, 拡張定理自体は代数幾何学に対する応用をも見出したのである（ [A-S] を参照）.

4. この論文においては, 我々は Bergman 計量に対する完備性問題についてのみ議論を限定することにする. 以前, [D-O] において $\partial\Omega$ が区分的に $C^2$ 級である時 $ds_\Omega^2$ に関する距離関数 $\mathrm{dist}_\Omega(z,w)$ に対して$\partial\Omega$ へのユークリッドの意味での距離 $\delta_\Omega(z)$ による次のような下からの評価を得た.

**命題 1** 任意の $w \in \Omega$ に対し, ある $c_1$ , $c_2 > 0$ が存在して

$$\mathrm{dist}_\Omega(z,w) > c_1 \log|\log(c_2\delta_\Omega(z))| - 1.$$

この評価は実際は次のより一般的な結果の系として導かれる.

**定理 2** $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ をコンパクトな擬凸領域, $\rho\colon \Omega \to [-1,0)$ を $C^\infty$ 級の有界かつ多重劣調和な皆位関数で次の条件を満たすとする.
条件：ある $C_1$ , $C_2 > 0$ が存在して

$$C_1\delta_\Omega(z)^{C_2} < -\rho(z) < C_1\delta_\Omega(z)^{1/C_2}$$

また任意の 1 点 $z_0 \in \Omega$ を固定する. その時, ある $c_3$ , $c_4 > 0$ が存在して任意の $z \in \Omega$ に対して

$$\mathrm{dist}_\Omega(z_0,z_1) > c_3 \log|\log(c_4\delta_\Omega(z))| - 1.$$

5. 一方, Jarnicki-Pflug [J-P-1] によれば, $ds_\Omega^2$ は $\Omega$ が完全円形な擬凸領域で, その Minkowski 関数が連続であれば, $ds_\Omega^2$ は完備な計量であるとの結果がある（関連する結果として [J-P-2] も参照）. ここで $\Omega$ が完全円形であるとは任意の $z \in \Omega$ と $|\zeta| < 1$ なる任意の $\zeta \in \mathbb{C}$ に対し$\zeta z \in \Omega$ が成り立つことと定義し, また $\Omega$ の Minkowski 関数とは次で定義される $\mathbb{C}^n$ 上の関数 $h$ である.

$$h(z) = \inf\Big\{t > 0 \Big| z/t \in \Omega\Big\}$$

これを定理 2 に適用することによって Jarnicki-Pflug の定理の量的な解釈を確立する. それを実現するためには次の定理が重要である.

定理 **3** $\Omega \in \mathbb{C}^n$ を有界な完全円形領域, $h$ を $\Omega$ の*Minkowski*関数であるとすると, ある $\varepsilon \in (0,1)$ と $A > 0$ が存在して

$$-(1-h(z)^2)^\varepsilon e^{-A|z|^2}$$

は多重劣調和関数である.

定理 2 と定理 3 を合わせて次の定理を得る.

定理 **4** $\Omega \in \mathbb{C}^n$ を有界な完全円形領域でその*Minkowski* 関数が*Hölder* 連続であるとする. そのときある $c_5$ , $c_6 > 0$ が存在して, 任意の $z \in \Omega$ に対して

$$\mathrm{dist}_\Omega(0,z) > c_5 \log|\log(c_6\delta_\Omega(z))| - 1.$$

6. $D \in \mathbb{C}^n$ を $D' \in \mathbb{C}^{n-1}$ の上の Hartogs 領域, すなわち,

$$D = \Big\{(z,w) \in D' \times \mathbb{C} \ \Big| \ |w|^2 < e^{-\rho(z)}\Big\} \quad \text{（ただし, } \rho \text{ は } D' \text{ から } [-\infty,\infty) \text{ へ値をとる上半連続関数）}$$

であるとする. よく知られているように, $D$ が擬凸であるのは $D'$ が擬凸かつ $\rho$ が多重劣調和である時であり, またその時に限る. 事実, Hartogs と岡の定理によれば, $-\log(e^{-\frac{1}{2}\rho(z)} - |w|)$ が多重劣調和であるのは $D$ が $D' \times \mathbb{C}$ 内で擬凸である時でありまたその時に限る. 後で $\rho$ が多重劣調和であれば$-\log(e^{-\rho(z)} - |w|^2)$ もまた多重劣調和であることが分かる. 次の公式から読みとることの出来るこの関数の付加的な性質は我々の目的には重要である.

補題 **5** $\rho$ が $C^2$ 級である時,

$$(1) \qquad \begin{aligned} &\partial\overline{\partial}\left(-\log(e^{-\rho} - |w|^2)\right) \\ &= e^{-\rho}\left\{(e^{-\rho} - |w|^2)^{-2}(dw + w d\rho) \wedge (d\overline{w} + \overline{w}\overline{\partial}\rho) \right. \\ &\qquad \left. + (e^{-\rho} - |w|^2)^{-1}\partial\overline{\partial}\rho\right\}. \end{aligned}$$

証明.

$$\begin{aligned} &\partial\overline{\partial}\Big(-\log\left(e^{-\rho} - |w|^2\right)\Big) \\ &= \partial\left\{(e^{-\rho} - |w|^2)^{-1}\overline{\partial}(|w|^2 - e^{-\rho})\right\} \\ &= (e^{-\rho} - |w|^2)^{-1}\partial\overline{\partial}\left(|w|^2 - e^{-\rho}\right) \\ &\qquad + (e^{-\rho} - |w|^2)^{-2}\partial\left(e^{-\rho} - |w|^2\right) \wedge \overline{\partial}\left(e^{-\rho} - |w|^2\right) \\ &= (e^{-\rho} - |w|^2)^{-2}\left\{(e^{-\rho} - |w|^2)\left(dw \wedge d\overline{w} + e^{-\rho}\partial\overline{\partial}\rho - e^{-\rho}\partial\rho \wedge \overline{\partial}\rho\right) \right. \\ &\qquad \left. + (e^{-\rho}\partial\rho + \overline{w}\,dw) \wedge (e^{-\rho}\overline{\partial}\rho + w\,d\overline{w})\right\} \\ &= (e^{-\rho} - |w|^2)^{-2}\left\{e^{-\rho}(dw \wedge d\overline{w} + |w|^2\partial\rho\overline{\partial}\rho + w\,\partial\rho \wedge d\overline{w} + \overline{w}\,dw \wedge \overline{\partial}\rho) \right. \\ &\qquad \left. + (e^{-\rho} - |w|^2)e^{-\rho}\partial\overline{\partial}\rho\right\} \\ &= e^{-\rho}(e^{-\rho} - |w|^2)^{-2}(dw + \overline{w}\,\partial\rho) \wedge (d\overline{w} + w\overline{\partial}\rho) + e^{-\rho}(e^{-\rho} - |w|^2)^{-1}\partial\overline{\partial}\rho \quad \square. \end{aligned}$$

系 **6** $\rho(z)$ が多重劣調和であれば, $-\log(e^{-\rho(z)}-|w|^2)$ は $(z,w)$ の関数として多重劣調和である.

証明. 多重劣調和関数の正則化定理（例えば [H-2] を参照）により, $\rho$ は局所的にはある $C^\infty$ 多重劣調和関数の減少列 $\{\rho_\nu\}_{\nu=1}^\infty$ の極限となる. $-\log(e^{-\rho_\nu}-|w|^2)$ は上の補題から多重劣調和かつ $\nu$ に関する減少列. よって, 極限 $-\log(e^{-\rho}-|w|^2)$ もまた多重劣調和である. □

（注意）等式 (1) には興味深い解釈がある. $K_z(w,\zeta)$ を領域 $D_z=\{w\in\mathbb{C}\,|\,|w|^2<e^{-\rho(z)}\}$ に対する Bergman 核関数とする. このとき,

$$K_z\left(w,\bar\zeta\right)=\frac{e^{-\rho(z)}}{\pi\left(e^{-\rho(z)}-w\bar\zeta\right)^2}$$

であるから, 上の公式は次のように書き換えられる.

$$\begin{aligned}&\partial\bar\partial\log K_z(w,\bar w)\\&=|w|^2\left\{\sqrt{K_z(w,\bar w)\pi e^\rho}\partial\bar\partial\rho+\pi e^\rho K_z(w,\bar w)\partial\log(e^\rho|w|^2)\wedge\bar\partial\log(e^\rho|w|^2)\right\}\end{aligned}$$

さらに, $G_z(w,\zeta)$ を $D_z$ の Green 関数とする. このとき

$$\log\left(e^{\rho(z)}|w|^2\right)=-2G_z(0,w)$$

であるから, 次のように書き換えることも出来る.

$$\begin{aligned}&\partial\bar\partial\log K_z(w,\bar w)\\&=-2e^{-2G_z(0,w)}(1-e^{-2G_z(0,w)})^{-1}\partial\bar\partial G_z(0,w)\\&\quad+4\pi e^{-2G_z(0,w)}K_z(w,\bar w)\partial G_z(0,w)\wedge\bar\partial G_z(0,w)\end{aligned}$$

従って, Bergman 核と Green 関数のこのような関係の一般化を任意のリーマン面について求めることは自然なことである. この問題に関連した結果に関しては, [Su] , [M-Y] を参照.

8. 定理 3 の証明. Minkowski 関数の定義から, $\frac{h(z)}{|z|}(z\neq 0)$ は同次座標 $(z_1:z_2:\cdots:z_n)$ のみに依存する. $\Omega$ は $0\in\mathbb{C}^n$ の有界かつ完全円形な近傍であるから, $\left(\frac{h(z)}{|z|}\right)^{\pm1}$ は有界である. 非同次座標$\zeta=(\zeta_2,\ldots,\zeta_n)$, $\zeta_i=\frac{z_i}{z_1}\,(2<i<n)$ を用いれば, ある上半連続関数 $\lambda$ が存在して, $h(z)$ は

$$h(z)=|z_1|\cdot(1+|\zeta|^2)^{1/2}\lambda(\zeta)\quad(z_1\neq 0)$$

と表せる. $\Omega$ は擬凸だから, $\rho(z):=\log\{(1+|\zeta|^2)^{1/2}\lambda(\zeta)\}$ は多重劣調和である. ここで, しばらくの間 $\lambda$ を $C^2$ 級と仮定する. このとき, 次の式が成り立つ.

$$-\partial\bar\partial\log(1-h^2)=-\partial\bar\partial\log(e^{-\rho}-|z_1|^2)-\partial\bar\partial\rho. \tag{2}$$

補題から, 次のことが成り立つ.

$$-\partial\bar\partial\log(e^{-\rho}-|z_1|^2)\geq e^{-\rho}(e^{-\rho}-|z_1|^2)^{-1}\partial\bar\partial\rho.$$

ここで, また後においても関数 $\varphi$ の複素 Hessian と $\partial\bar\partial\varphi$ とを同一視することにする.

したがって, (2) の右辺の負の項 $-\partial\bar\partial\rho$ は前の項に吸収されてしまう. 従って, 任意の正の定数 $A_0$ に対し, $\varphi(z):=-\log(1-h(z)^2)+A_0|z|^2$ は $\Omega$ 上強多重劣調和である. さらに, 再び補題を用いれば,

$$\partial\bar\partial\varphi\geq e^{-\rho}(e^{-\rho}-|z_1|^2)^{-2}(dz_1+z_1\partial\rho)\otimes(d\overline{z_1}+\overline{z_1}\bar\partial\rho)+A_0\partial\bar\partial|z|^2 \tag{3}$$

が成り立ち，

$$\partial\varphi = \frac{\partial h^2}{1-h^2} + A_0\partial|z|^2 = \frac{\overline{z_1}(dz_1 + z_1\partial\rho)}{e^{-\rho} - |z_1|^2} + A_0\partial|z|^2$$

であるから, (3) から十分小さい $\varepsilon$ が存在して，

$$\partial\overline{\partial}\varphi \geq \varepsilon\partial\varphi \otimes \overline{\partial}\varphi$$

が成り立つ．この $\varepsilon$ は $\Omega$ の直径にも依存する．

よって, 次が成り立つ．

$$-\partial\overline{\partial}e^{-\varepsilon\varphi} = \varepsilon e^{-\varepsilon\varphi}(\partial\overline{\partial}\varphi - \varepsilon\partial\varphi \otimes \overline{\partial}\varphi) \geq 0.$$

正則化定理より, この結果は一般的な場合についても成り立つ．□

9. （注意）複素多様体 $M$ が強多重劣調和な有界皆位関数を許容するならば, 超凸 (hyperconvex) であるとよばれる．多変数関数論ではこの表現は J. -P. Serre によって提起された次のような問題を研究するために J. -L. Stehlé [St] によって学位論文としてまとめられた．その問題とは Stein ファイバーを持つ Stein 多様体上の解析的ファイバー束は Stein 多様体になるかというものであった．Stehlé は Serre の予想はファイバーが超凸である時成り立つと証明した．また, J. -L. Ermine [E] によって有界な凸基底を持つ管状領域と有界な擬凸 Reinhardt 領域は共に超凸であることが証明された．彼は同じ論文で, 定理 3 をほとんど証明している．というのは, 超凸な領域の上の有界擬凸な Hartogs 領域は超凸であることに言及しているからである．しかし, 超凸性についてのより広い意味については Diedrich-Fornaess の研究成果の後になってようやく了解されたのである．彼らは, $C^2$ 級の境界を持つ任意の有界な擬凸領域 $\Omega \in \mathbb{C}^2$ に対して, その定義関数 $\rho$ が次のような性質を持つことを発見した．

（性質）$0 < \varepsilon \ll 1$ なる任意の $\varepsilon$ と, $A \gg 1$ なる任意の $A$ に対し, $-(-\rho)^\varepsilon e^{-A|z|^2}$ は強多重劣調和関数である．

この結果は $\overline{\partial}$ -Neumann 正則性定理の発展に大きな影響を及ぼした．（より最近の結果については [O-S-1, O-S-2] を参照．）

超凸性と Bergman 核の結び付きについては [O-3, O-4] に見ることが出来ることにも注意しよう．この方面においては, $\mathbb{C}^n$ 上の任意の有界な超凸領域が Bergman 計量の意味で完備かという問題（小林昭七氏の予想）が未解決である．（この論説を書いた後, 筆者の元に小林予想を解決したプレプリント [B-P] が送られてきた．）

10. 読者の便宜のために, ここで小林 [K] の結果による Bergman 核の特徴付けを思い出すことにする．定理 2 のような Bergman 計量の評価はこれを基礎とするものである．

$M$ を連結な $n$ 次元複素多様体, $K_M$ を $M$ 上の標準直線束とする．正則局所座標 $(z_1, \ldots, z_n)$ を用いれば, $K_M$ の断面の局所表示は

$$f\,dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n$$

となる．ただし, $f$ は（局所的に定義された）関数である．$M$ 上の任意の $K_M$ の可測な断面 $\omega$ （その局所表示を $f\,dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n$ とする）に対して，

$$\omega \wedge \overline{\omega} = |f|^2\,dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n \wedge d\overline{z}_1 \wedge \cdots \wedge d\overline{z}_n$$

は大域的に well-defind な $(n,n)$-形式である．

ゆえに，

$$\|\omega\|^2 = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\left(\frac{\sqrt{-1}}{2}\right)^n \int_M \omega \wedge \overline{\omega} \quad (\in [0,\infty])$$

で $\|\omega\|$ を定義し，これを $\omega$ の $L^2$ ノルムと呼ぶ．正則関数の Cauchy の評価式によれば，有限な $L^2$ ノルムを持つ $K_M$ の正則な断面の集合 $A^2(K_M)$ は Hilbert 空間であることが分かる．そこで，$\{\omega_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$ を $A^2(K_M)$ の完全正規直交基底とする．このとき，次の級数

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \omega_\nu(x) \wedge \overline{\omega_\nu(y)}$$

は Cauchy の評価式より $M \times M$ 上広義一様収束する．そこで，次のように定義する．

$$\kappa_M(x, \overline{y}) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \omega_\nu(x) \wedge \overline{\omega_\nu(y)}.$$

明らかに $\kappa_M$ は正規直交基底によらない．次に，局所座標を用いれば，$\kappa_M(x, \overline{y})$ は

$$\kappa_M(x, \overline{y}) = K_M(z, \overline{w})\, dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n \wedge d\overline{w}_1 \wedge \cdots \wedge d\overline{w}_n$$

と表される．上の $K_M$ と標準束とをとり違えることはないだろう．この $K_M(z, \overline{w})$ は $z = (z_1, \ldots, z_n)$ については正則で，$w = (w_1, \ldots, w_n)$ については反正則である．

いま，任意の $x \in M$ に対して $A^2(K_M)$ が $\omega(x) \neq 0$ なる$\omega$ を含んでいるとする．例えば，$\mathbb{C}$ の有界領域などはこの仮定を満たす．このとき，次のような $M$ 上の $(1,1)$ -形式

$$\partial\overline{\partial} \log K_M(z, \overline{z})$$

を導入することが許される．$\partial\overline{\partial} \log K_M(z, \overline{z})$ は well-defined であるのは，

$$K_M(z, \overline{z}) = K_M(w, \overline{w}) \left| \frac{\partial(w_1, \ldots, w_n)}{\partial(z_1, \ldots, z_n)} \right|^2$$

が成り立つからである．

そこで，次のようにおく．

$$\partial\overline{\partial} \log K_M(z, \overline{z}) = \sum_{\alpha, \beta = 1}^{n} g_{\alpha\overline{\beta}}(z)\, dz_\alpha \wedge d\overline{z}_\beta$$

もし，Hermite 計量 $(g_{\alpha\overline{\beta}})$ が正定値であるならば，$\partial\overline{\partial} \log K_M(z, \overline{z})$ に付随する Hermite 計量 $ds_M^2 = \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} g_{\alpha\overline{\beta}}(z)\, dz_\alpha \wedge d\overline{z}_\beta$ を $M$ の Bergman 計量という．$M$ が Bergman 計量を許容するならば，この $M$ を Bergman 多様体と呼ぶことにする．

任意の Bergman 多様体 $M$ に対し，正規直交系 $\{\omega_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$ は正則写像

$$\iota : M \ni x \mapsto (\omega_1(x) : \omega_2(x) : \cdots : \omega_\nu(x) : \cdots) \in (A^2(K_M) \setminus \{0\})/\mathbb{C}^*$$

を生じる．ここで，$\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ である．

$ds_{FS}^2$ を $\partial\overline{\partial} \log \|\omega\|^2$ から誘導された $(A^2(K_M) \setminus \{0\})/\mathbb{C}^*$ の Hermite 計量とする．このとき，

$$ds_M^2 = \iota^* ds_{FS}^2$$

が成り立つ．ゆえに，$M$ 上の道の長さは $\iota$ によるその像の長さと等しくなる．$ds_{FS}^2$ に関する道の長さはその端点間の距離以上なので，この Bergman 計量の特徴付けはこの計量を下から評価するための自然な方法を与えてくれる．

$x, y \in M$ を与えた時，$|x, y|$ を $\iota(x)$ から $\iota(y)$ までの $ds_{FS}^2$ に関する距離とする．この $|x, y|$ を $K_M(z, \overline{w})$ の値を用いて，（$x$, $y$ のまわりの座標 $z$, $w$ は固定して）表示しよう．簡単のために $K_M(z(x), z(y))$ の代わりに $K(x, y)$ と書くことにする．

命題 7

$$|x,y| = \operatorname{Arctan}\frac{\sqrt{K(x,\overline{x})K(y,\overline{y}) - |K(x,\overline{y})|^2}}{|K(x,\overline{y})|} \tag{4}$$

証明. $B_i \in A^2(K_M)$ $(i=1,\,2)$ を

$$B_1 = K(x,\overline{x})^{-\frac{1}{2}}K(u,\overline{x})\,du_1\wedge\cdots\wedge du_n$$
$$B_2 = K(y,\overline{y})^{-\frac{1}{2}}K(u,\overline{y})\,du_1\wedge\cdots\wedge du_n$$

とおく. もし, $B_1 = B_2$ ならば (4) の両辺は共に 0 である. そこで $B_1 \neq B_2$ としてよい.

正規直交系 $\{\omega_\nu\}_{\nu=1}^\infty$ は任意に取れるので, 次のようなものを選ぶとする.

$$\omega_1 = B_1$$
$$\omega_2 = \frac{B_2 - (B_2,B_1)B_1}{\|B_2 - (B_2,B_1)B_1\|}$$

ただし, $(\ ,\ )$ は内積を表す. このとき, $|x,y|$ は 空間 $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ における計量 $\partial\overline{\partial}\log(1+|z|^2)$ (正確にはこの形式に付随する計量) に関する 0 と $\frac{\omega_2(x)}{\omega_1(x)}$ との距離に等しい. 即ち,

$$|x,y| = \int_0^{\left|\frac{\omega_2(x)}{\omega_1(x)}\right|}\frac{dr}{1+r^2} = \operatorname{Arctan}\left|\frac{\omega_2(x)}{\omega_1(x)}\right| \tag{5}$$

である.

一方,

$$(B_2,B_1) = \frac{K(x,\overline{y})}{\sqrt{K(x,\overline{x})K(y,\overline{y})}}$$

であるから,

$$\|B_2 - (B_2,B_1)B_1\| = 1 - |(B_2,B_1)|^2 = 1 - \frac{|K(x,\overline{y})|^2}{K(x,\overline{x})K(y,\overline{y})}$$

ゆえに,

$$\begin{aligned}\left|\frac{\omega_2(x)}{\omega_1(x)}\right| &= \frac{B_2(y) - (B_2,B_1)B_1(y)}{|B_1(y)|\,\|B_2 - (B_2,B_1)B_1\|}\\ &= \frac{K(x,\overline{x})K(y,\overline{y}) - |K(x,\overline{y})|^2}{\sqrt{K(x,\overline{x})K(y,\overline{y})}|K(x,\overline{y})|(1-\frac{|K(x,\overline{y})|^2}{K(x,\overline{x})K(y,\overline{y})})^{1/2}}\\ &= \frac{\sqrt{K(x,\overline{x})K(y,\overline{y}) - |K(x,\overline{y})|^2}}{|K(x,\overline{y})|}\end{aligned} \tag{6}$$

(5) と (6) を合わせれば (4) を得る. □

(注意) [D-O] においては, 定理 2 を証明するためにこの正確な公式の代わりに次の不等式を用いた.

$$|x,y| \geq \min\left(\frac{1}{2}, \sup\left\{\frac{|\omega(x)|^2}{K(x,\overline{x})} \mid \omega\in A^2(K_M),\ \|\omega\|=1,\ \omega(y)=0\right\}\right)$$

証明のためにはこれで十分だったからである.

にもかかわらずここでは公式を示す方が良いと思った. 美的な理由だけでそうしたのではないと思う.

# 参考文献


[A-S] Angehrn, U. and Siu, Y.T. *Effecting freeness and separation of points for disjoint bundles*, Invent. math. 122(1995), 291-308.

[B-N] Bell, S. R. and Narasimhan, R. *Proper holomorphic mappings of Complex spaces*, Complex manifolds, S. R. Bell et al. Springer, 1997

[B-P] Błocki, Z. and Pflug, P. *Hyperconvexity and Bergman completeness*, preprint.

[B-S-Y] Boas, H. P, Straube, E. J. and Yu, J. *Boundary limits of the Bergman kernel and metric*, Michigan Math, J. 42(1995), 449-461.

[C] Catlin, D. *Estimates of invarient metrics on pseudoconvex domains of dimension two*, Math. Z. 200(1989),429-466.

[D'A] D'Angelo, J. *A note on the Bergman kernel*, Duke. Math. J. 45(1978), 259-265.

[D] Diederich, K. *Das Randverhalten der Bergmanschen Kernfunktion und Metrik in streng pseudokonvexen Gebieten*, Math. Ann. 187(1970), 9-36.

[D-F] Diederich, K. and Fornaess, J.E. Pseudoconvex domains : Bounded strictly plurisubharmonic exhausion functions, Inv. Math. 39(1977), 129-141.

[D-H] Diederich, K. and Herbort, G. *Extension of holomorphic $L^2$ -functions with weighted growth conditions*, Nagoya Math. J. 126(1992), 141-157.

[D-H-O] Diederich, K, Herbort, G. and Ohsawa, T. *The Bergman kernel on uniformly extendable pseudoconvex domains*, Math. Ann. 273(1986), 471-478.

[D-O] Diederich, K. and Ohsawa, T. *An estimate for the Bergman distance on pseudoconvex domains*, Ann. Math. 141(1995), 181-190.

[E] Ermine, J. -L. *Conjecture de Sérre et espaces hyperconvexes*, Lecture Notes in Mathematics 670, Springer, 1978, 124-139.

[F] Fefferman, C. *The Bergman kernel and biholomorphic mappings of pseudoconvex domains*, Invent. Math. 26(1974),1-65.

[H-1] Hörmander, L. *$L^2$ estimates and existence theorems for the $\bar{\partial}$ -operator*, Acta Math. 113(1965), 89-152.

[H-2] ——— *An introduction to complex analysis in several variables*, North Holland, 1990

[J-P-1] Jarnicki, M. and Pflug, P. *Bergman completeness of complete circular domains*, Ann. Pol. Math. 50(1989), 219-222.

[J-P-2] ——— *Invariant distances and metrics in complex analysis*, de Gruyter expositions in math. 9, 1983.

[K] Kobayashi, S. *Geometry of bounded domains*, Trans. Amer. Math. Soc. 92(1959), 267-290.

[M-Y] Maitani, F. and Yamaguchi, H. *Variation of three metrics on the moving Riemann Surfaces*, preprint.

[O-1] Ohsawa, T. *A remark on the completeness of the Bergman metric*, Proc. Jap. Acad. 57(1981), 238-240.

[O-2] ______ *Boundary behavior of the Bergman kernel function on pseudoconvex domains*, Publ. RIMS, Kyoto Univ. 20(1984), 897-902.

[O-3] ______ *On the Bergman kernel of hyperconvex domains*, Nagoya. Math. J. 129(1993), 43-52.

[O-4] ______ *Addendum to "On the Bergman kernel of hyperconvex domains"*, Nagoya. Math. J. 137(1995), 145-148.

[O-S-1] Ohsawa, T. and Sibony, N. *Bounded P. S. H. functions and pseudoconvexity in Kähler manifolds*, to appear in Nagoya Math. J.

[O-S-2] ______ *Nonexistence of Levi-flat hypersurfaces in* $\mathbb{P}^2$, preprint.

[O-T] Ohsawa, T.and Takegoshi, K. *On the extension of* $L^2$ *holomorphic functions*, Math. Z. 195(1987), 197-204.

[P] Pflug, P. *Quadratintegrable holomorphe Funktionen und die Serre Vermutung*, Math. Ann. 216(1975), 285-288.

[St] Stehlé, J. -L. *Fonktions plurisousharmoniques et convexité holomorphe de certain fibrés analytiques*, Lecture Notes in Mathematics 474, 155-180

[Su] Suita, N. *Capacities and kernels on Riemann surfaces*, Arch. Rational Mech. Anal. 46(1972), 212-217.