

## クローフリー双向グラフに対する一般化安定集合問題

電気通信大学情報工学科 中村大真 (Daishin Nakamura)  
電気通信大学情報工学科 田村明久 (Akihisa Tamura)

### 1 はじめに

次の最大重み安定集合問題を考える。

$$\begin{aligned} & \text{Maximize } \vec{w} \cdot \vec{x} \\ & \text{Subject to } A\vec{x} \leq \vec{1} \\ & \vec{x} \in \{0, 1\}^n \end{aligned}$$

ここで  $A$  は各行の成分のうち 2 個が 1 で、残りの成分は 0 である  $m \times n$  行列、また  $\vec{w} \in \mathbf{R}^n$ 。

この問題は、 $A^T$  を隣接行列とする無向グラフ  $G(V, E)$  ( $|V| = n, |E| = m$ ),  $\vec{w}$  を頂点の重み関数  $w: V \rightarrow \mathbf{R}$ , 変数  $\vec{x} \in \{0, 1\}^n$  を  $V$  の部分集合  $S = \{i \in V \mid x_i = 1\}$  に対応させれば、最大重みの安定集合を求める問題である。

この問題は NP 困難に属するため、種々の近似解法が研究されているが、グラフがクローフリーならば、厳密解が多項式時間で求められる [2]。クローフリーグラフとはどの 4 頂点も  $K_{1,3}$  を誘導しないグラフである。

この問題の自然な拡張として、次の整数計画問題を考える。

$$\begin{aligned} & \text{Maximize } \vec{w} \cdot \vec{x} \\ & \text{Subject to } A\vec{x} \leq \vec{b} \\ & \vec{x} \in \{0, 1\}^n \end{aligned}$$

ここで  $A$  は各行の成分のうち高々 2 個が非ゼロで、残りの成分は 0 である  $m \times n$  行列、また  $\vec{w} \in \mathbf{R}^n, \vec{b} \in \mathbf{R}^m$ 。

この問題の各制約式は、意味をなさないか変数を 0 か 1 に固定してしまうものを除けば、 $x_i + x_j \leq 1, x_i - x_j \leq 0, -x_i - x_j \leq -1$  のいずれかと置き換えられる。そこでこれらの制約をグラフで表したのが双向グラフ [1] である。双向グラフは頂点集合  $V$  と、図 1 に示す 3 種類の辺からなる。各辺は制約  $x_i + x_j \leq 1, x_i - x_j \leq 0, -x_i - x_j \leq -1$  に対応する。以下簡単のため、各 2 頂点  $i, j$  について、制約  $x_i + x_j \leq 1$  に対応する辺が存在することを  $i \sim j$ , 制約  $x_i - x_j \leq 0$  に対応する辺が存在することを  $i \rightsquigarrow j$  または  $j \rightsquigarrow i$ , 制約  $-x_i - x_j \leq -1$  に対応する辺が存在することを  $i \bar{\sim} j$  と書く。

各辺に対応する制約をすべて満たす  $\vec{x} \in \{0, 1\}^n$  およびこれに対応する  $V$  の部分集合  $X = \{i \in V \mid x_i = 1\}$  を解と呼ぶ。与えられた双向グラフと頂点重みのもとで最大重みの解を求める問題を一般化安定集合問題と呼ぶ。

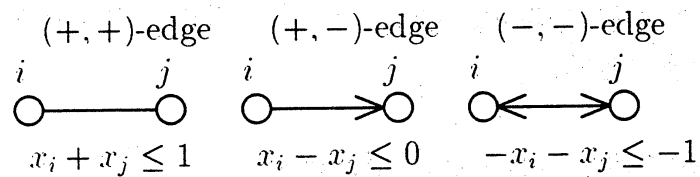


図 1: 双向グラフの 3 種類の辺

双向グラフについても、辺の符号を無視して無向グラフの意味でループ、多重辺、隣接、連結、クローフリーなどの言葉を用いる。頂点  $i$  と  $j$  が隣接することを  $i \sim j$  と書く。

ループや多重辺がないとき、双向グラフは単純であるという。また各 3 頂点  $i, j, k$  について次の 4 条件を満たすとき、双向グラフは推移的であるという。(1)  $i \overset{+}{\sim} j$  かつ  $j \overset{+}{\sim} k$  ならば  $i \overset{+}{\sim} k$ , (2)  $i \overset{+}{\sim} j$  かつ  $j \overset{-}{\sim} k$  ならば  $i \overset{-}{\sim} k$ , (3)  $i \overset{-}{\sim} j$  かつ  $j \overset{+}{\sim} k$  ならば  $i \overset{-}{\sim} k$ , (4)  $i \overset{-}{\sim} j$  かつ  $j \overset{-}{\sim} k$  ならば  $i \overset{-}{\sim} k$ . 一般化安定集合問題は単純推移的な双向グラフに限定して一般性を失わない。

本研究では単純推移的なクローフリー双向グラフに対する一般化安定集合問題が多項式時間で解けることを示した。

## 2 双向グラフの解の性質

### 2.1 リフレクションと基準形

双向グラフの 1 頂点  $i$  に注目して、0-1 変数  $x_i$  を  $1 - x_i$  で変数変換し、頂点重み  $w_i$  を  $-w_i$  で置き換える操作をリフレクションと呼ぶ。頂点  $i$  に接続する各辺の頂点  $i$  での符号はすべて入れ替わる。頂点の部分集合  $Y \subseteq V$  について、 $Y$  に属する各頂点についてリフレクションすることを  $Y$  でリフレクションするという。 $Y$  でリフレクションした後の双向グラフの最大重み解を  $X$  とすれば、 $X \Delta Y$  はもとの双向グラフの最大重み解である(ここで  $\Delta$  は集合の対称差)。しかもリフレクションによって単純性、推移性、クローフリー性は保存される。

双向グラフの頂点  $i$  は、 $i$  に接続する各辺の頂点  $i$  での符号がすべて+のとき正頂点、+と-の両方あるとき混合頂点、すべて-のとき負頂点と呼ぶ。

**Lemma 2.1.1** ([1]) 単純推移的な双向グラフには必ず解が存在し、多項式時間で求められる。

**Lemma 2.1.2** 単純推移的な双向グラフ  $G$  の解を  $X$  とする。 $G$  を  $X$  でリフレクションすると、 $(-, -)$  辺を持たなくなる。

単純, 推移的, かつ  $(-, -)$  辺も負頂点も持たない双向グラフを基準形という.

**Lemma 2.1.3** 単純推移的な双向グラフは, リフレクションによって, 基準形に多項式時間で変換できる.

## 2.2 基準形の解の基と安定集合

基準形双向グラフの解  $X$  について, 次で定義される  $X$  の部分集合  $X_B$  を  $X$  の基と呼ぶ.

$$X_B = \{i \in X \mid i \overset{+}{\sim} j \text{ ならば } j \notin X\}$$

基準形双向グラフの頂点の部分集合は, 辺の符号を無視してどの2頂点も隣接しないとき, 安定であるという.  $X_B$  は安定であることに注意.

一方, 安定集合  $S$  に対して,  $\text{ex}(S)$  を次で定義する.

$$\text{ex}(S) = S \cup \{i \in V \mid \exists j \in S : i \overset{+}{\sim} j\}$$

$\text{ex}(S)$  は解であることに注意. さらに  $(\text{ex}(S))_B = S$ .

**Lemma 2.2.1** 基準形双向グラフの安定集合全体と解全体とは,  $\text{ex}(\cdot)$  により一対一対応する.

## 2.3 交互集合と交互集合族

基準形双向グラフ  $G$  とその解  $X$  を固定する.  $X$  は安定でもあると仮定してよい. (そうでなければ  $X \setminus X_B$  でリフレクションする.)

頂点の部分集合  $A \subseteq V$  は,  $X \Delta A$  が安定集合のとき,  $X$  に関する交互集合族であるといい, 特に  $A$  が連結ならば, 交互集合と呼ぶ.

安定解  $X$  に関する交互集合族  $A$  について, その重み  $\delta_X(A)$  を次で定義する.

$$\begin{aligned} \delta_X(A) &= w(\text{ex}(X \Delta A)) - w(X) \\ &= w(A \setminus X) - w(X \setminus A) + w(I) \end{aligned}$$

ここで  $I = \{v \in V \mid v \overset{+}{\sim} i \text{ となる } i \in A \setminus X \text{ が存在する}\}$

$w(I)$  は無向グラフでは現れない項であり, 誘導重みと呼ぶ.

**Lemma 2.3.1** 基準形双向グラフ  $G$  とその安定解  $X$  が

条件 1: 『 $X$  のどの頂点とも隣接しない混合頂点が存在しない』

を満たすとする. このとき  $X$  に関する任意の交互集合族  $A$  について,  $A$  の連結成分を  $A_1, \dots, A_k$  とするとき,

$$\delta_X(A) = \sum_{i=1}^k \delta_X(A_i)$$

**Lemma 2.3.2** 基準形双向グラフ  $G$  とその安定解  $X$  について, 混合頂点のリフレクションによって, 多項式時間で条件 1 を満たすように変換できる.

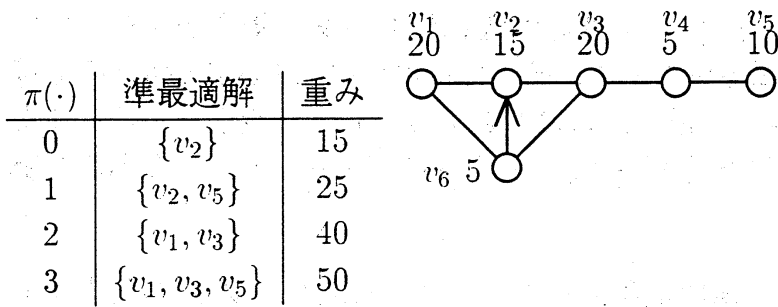


図 2: クローフリー双向グラフの例

### 2.4 準最適とパレート最適

基準形双向グラフ  $G$  の解  $X$  について、 $X$  に含まれる正頂点の個数を  $\pi(X)$  と書く。  $X$  は  $w(Y) > w(X)$  かつ  $\pi(X) = \pi(Y)$  となる  $G$  の別の解  $Y$  が存在しないとき、準最適と呼ぶ。ここで  $|X|$  ではなく  $\pi(X)$  を基準に取るのは、 $|X|$  がリフレクションで変化するのに対し、 $\pi(X)$  は混合頂点のリフレクションで変わらないためである。

準最適解  $X$  のうちで特に次の条件を満たすものをパレート最適と呼ぶ：

条件『 $\pi(Y) < \pi(X) < \pi(Z)$  を満たす任意の準最適解  $Y$  と  $Z$  について、 $w(X) \geq \frac{\pi(Z) - \pi(X)}{\pi(Z) - \pi(Y)} \cdot w(Y) + \frac{\pi(X) - \pi(Y)}{\pi(Z) - \pi(Y)} \cdot w(Z)$ 』

特に最大重み解および正頂点を含まない準最適解はパレート最適である。

無向クローフリーグラフの場合は、すべての準最適解がパレート最適となる。また準最適解  $X$  に対して  $\delta_X(A)$  最大の交互集合  $A$  を求めれば、 $X \Delta A$  は準最適解になる。よって  $\delta_X(A)$  最大の交互集合  $A$  を繰り返し求めることによって、無向クローフリーグラフの最大重み安定集合を多項式時間で求めることができる [2]。

しかし双向クローフリーグラフの場合はパレート最適でない準最適解が存在することがある。また条件 1 を満たす準最適安定解  $X$  に関して  $\delta_X(A)$  最大の交互集合  $A$  を求めても、 $\text{ex}(X \Delta A)$  は準最適にならないことがある。(例: 図 2 の  $X = \{v_2, v_5\}$ )

基準形双向グラフ  $G$ 、頂点重み  $w : V \rightarrow \mathbf{R}$ 、安定解  $X$  の三つ組  $(G, w, X)$  は、 $X$  がパレート最適で、任意の最大重み解  $Y^*$  について  $\pi(X) \leq \pi(Y^*)$  を満たし、かつ条件 1 を満たすとき、基本構造と呼ぶ。安定解  $X$  に関する交互集合を  $A$  とおき、次を定義する。

$$\nu_X(A) = \pi(\text{ex}(X \Delta A)) - \pi(X)$$

$$\rho_X(A) = \frac{\delta_X(A)}{\nu_X(A)}$$

基本構造  $(G, w, X)$  が与えられたとき、次の問題を考える。

(MAXRATIO) Maximize  $\rho_X(A)$   
 Subject to  $A$  は  $X$  に関する交互集合  
 and  $\nu_X(A) \geq 1$

**Lemma 2.4.1** 基本構造  $(G, w, X)$  について, 問題 (MAXRATIO) を考える. (MAXRATIO) の最適値がゼロ以下 ( $\nu_X(A) \geq 1$  を満たす  $X$  に関する交互集合が存在しない場合を含む) ならば,  $X$  は最大重み解である. そうでなければ (MAXRATIO) の最適解を  $A^*$  とし,  $Y = \text{ex}(X \Delta A^*)$  と置く. このとき  $Y$  はパレート最適である. また  $\pi(X) \leq \pi(Z) \leq \pi(Y)$  かつ  $w(Z) > \frac{\pi(Y) - \pi(Z)}{\pi(Y) - \pi(X)} \cdot w(X) + \frac{\pi(Z) - \pi(X)}{\pi(Y) - \pi(X)} \cdot w(Y)$  を満たす解  $Z$  は存在しない.

そこで次の手続きによって, 単純推移的クローフリー双向グラフ  $G$  の最大重み解が求められる.

1. リフレクションによって  $G$  を基準形に変換する.
  2.  $G$  の正頂点を含まない解の中で最大重みのものを求め  $X$  と置く. 具体的には,
    - (a)  $G$  の正頂点全体を  $P (\neq \emptyset)$  と置く.
    - (b)  $G$  から  $P$  を削除し,  $G \setminus P$  と置く. (単純性, 推移性, クローフリー性は保存される)
    - (c)  $G \setminus P$  の最大重み解を再帰的に求め  $X$  と置く. これは  $G$  の正頂点を含まない解の中で最大重みである.
  3.  $X$  が安定でかつ条件 1 を満たすようにリフレクションする.
  4. 問題 (MAXRATIO) を解く.
  5. (MAXRATIO) の最適値がゼロ以下ならば,  $X$  は最大重み解である. (MAXRATIO) の最適値が正ならば, 最適解を  $A^*$  とする.  $X \leftarrow \text{ex}(X \Delta A^*)$  と置いて 3. へ戻る.
3. から 5. の繰り返しの度に  $\pi(X)$  は少なくとも 1 増加するから, 繰り返し回数は頂点数を超えない. よって後は与えられた任意の基本構造  $(G, w, X)$  に対して問題 (MAXRATIO) が多項式時間で解けることを示せばよい.

## 2.5 最大比から最大重みへ

問題 (MAXRATIO) の目的関数は線形でないので, 代わりに次の問題を考える.  $\lambda$  を固定された実数として,

$\begin{aligned} \text{(MAXWEIGHT}(\lambda)\text{)} \text{ Maximize } & w(\text{ex}(X \Delta A)) - \lambda \cdot \pi(\text{ex}(X \Delta A)) \\ \text{Subject to } & A \text{ は } X \text{ に関する交互集合} \end{aligned}$
--

ここで次のことに注意する.  $w(\text{ex}(X \Delta A)) - \lambda \cdot \pi(\text{ex}(X \Delta A)) = w^\lambda(\text{ex}(X \Delta A))$ , ただし

$$w^\lambda(v) = \begin{cases} w(v) - \lambda & v \text{ が正頂点のとき} \\ w(v) & v \text{ が混合頂点のとき} \end{cases}$$

そこで与えられた基本構造  $(G, w, X)$  に対して  $(\text{MAXWEIGHT}(\lambda))$  を繰り返し解くことによって  $(\text{MAXRATIO})$  を解く。

**Lemma 2.5.1**  $(\text{MAXWEIGHT}(0))$  の最適値がゼロ以下であるときかつそのときに限り  $X$  は最大重み解である。  $X$  が最大重み解でないとき、以下の手続きで  $(\text{MAXRATIO})$  を解くことができる。

1.  $\lambda_1 \leftarrow 0, i \leftarrow 1$  とする。
2.  $(\text{MAXWEIGHT}(\lambda_i))$  を解く。最適値がゼロ以下ならば、 $A_{i-1}$  は  $(\text{MAXRATIO})$  の最適解である。
3.  $(\text{MAXWEIGHT}(\lambda_i))$  の最適解と  $A_i$  と置く。  $\lambda_{i+1} \leftarrow \rho_X(A_i)$  と置く。  $i \leftarrow i+1$  として 2. へ戻る。

繰り返し毎に  $\nu_X(A_i)$  が減少するから、繰り返しの回数は頂点数を超えない。

### 3 クローフリー双向グラフの交互パス・サイクル

#### 3.1 誘導重みの処理

与えられた基本構造  $(G, w, X)$  の交互集合について考える。  $X$  に属する頂点を黒、  $X$  に属さない頂点を白と呼ぶ。

黒頂点全体  $X$  が安定であり、またグラフがクローフリーであることから、白頂点は高々2個の黒頂点としか隣接しないことに注意する。よって交互集合はパスまたはサイクルに限られる。ちょうど2個の黒頂点と隣接する白頂点を束縛頂点と呼ぶ。束縛頂点  $v_1$  と  $v_2$  が同じ2個の黒頂点と隣接するとき、  $v_1 \diamond v_2$  と書く。この二項関係  $\diamond$  による同値類をウイングと呼ぶ。頂点  $v$  の隣接頂点全体を  $N(v)$ 、そのうち束縛頂点全体を  $B(v)$  と書く。黒頂点  $v$  について  $B(v)$  が3個以上のウイングからなるとき、  $v$  は正則であるといい、ちょうど2個のウイングからなるとき、  $v$  は非正則であるという。

**Lemma 3.1.1** ([2]) 正則頂点  $v$  について、  $B(v)$  は次の条件を満たすように  $[B^1(v), B^2(v)]$  に一意に分割できる。

条件: 『  $x, y \in B(v)$  について  $x \not\sim y$  ならば、  $x$  と  $y$  が隣接するときかつそのときのみ  $\{x, y\}$  が  $B^1(v)$  または  $B^2(v)$  のどちらか一方に含まれる。』

Minty はこの性質を用いてクローフリー無向グラフにおいて最大重み交互パスを求める問題を最大重みマッチングを求める問題に帰着させている。双向グラフの場合は誘導重みを考慮しなければならないが、次の性質が成り立つ。

**Lemma 3.1.2** 正則頂点  $x$  と,  $v = x$  または  $v \sim x$  となる頂点  $v$  について, 次を定義する.

$$\begin{aligned} B^1(x) \succ_v B^2(x) &\stackrel{\text{def}}{\iff} a \not\sim b, a^+ \sim v \text{ かつ } b^+ \not\sim v \text{ となる} \\ &\quad a \in B^1(x) \text{ と } b \in B^2(x) \text{ が存在する} \\ B^2(x) \succ_v B^1(x) &\stackrel{\text{def}}{\iff} c \not\sim d, c^+ \sim v \text{ かつ } d^+ \not\sim v \text{ となる} \\ &\quad c \in B^2(x) \text{ と } d \in B^1(x) \text{ が存在する} \end{aligned}$$

このとき  $B^1(x) \succ_v B^2(x)$  と  $B^2(x) \succ_v B^1(x)$  のうち, 高々一方しか成り立たない.

$B^{-+}(v) = \{i \in B(v) \mid v \sim^+ i\}$  と書く.  $B^{-+}(v)$  が空であるか, または  $B^{-+}(v)$  はある一つのウイングに含まれるとき,  $v$  をタイプ 1 という. そうでないときは  $v = x$  または  $v \sim x$  を満たす黒頂点が必ずただ一つ存在する.  $x$  が非正則のとき  $v$  をタイプ 2,  $x$  が正則のとき  $v$  をタイプ 3 という.

関数  $\tilde{w} : (V \cup V \times V) \rightarrow \mathbf{R}$  を次の手続きで定義する. 始めは  $\tilde{w} \leftarrow 0$  とする. 各混合頂点  $v$  について, 以下の処理を行う.

- $v$  がタイプ 1 のとき: 各  $u \in B^{-+}(v)$  について  $\tilde{w}(u) \leftarrow \tilde{w}(u) + w(v)$  と置く.
- $v$  がタイプ 2 のとき:  $x$  を  $v = x$  または  $v \sim x$  を満たす非正則頂点とする.  
 $t \not\sim u, t \not\sim u$ , かつ 「 $v \sim^+ t$  または  $v \sim^+ u$ 」 を満たす各  $t, u \in B(x)$  について,  
 $\tilde{w}(t, u) \leftarrow \tilde{w}(t, u) + w(v)$  と置く.
- $v$  がタイプ 3 のとき:  $x$  を  $v = x$  または  $v \sim x$  を満たす正則頂点とする.
  - ★  $B^2(x) \succ_v B^1(x)$  のとき: 各  $u \in B^{-+}(v) \cap B^2(v)$  について  
 $\tilde{w}(u) \leftarrow \tilde{w}(u) + w(u)$  と置く.
  - ★ そうでないとき: 各  $u \in B^{-+}(v) \cap B^1(v)$  について  
 $\tilde{w}(u) \leftarrow \tilde{w}(u) + w(u)$  と置く.

このように  $\tilde{w}$  を定めると, 長さ 6 以上の任意の交互サイクル  $C$  の重み  $\delta_X(C)$  を簡単に表せる.

**Lemma 3.1.3** 長さ 6 以上の交互サイクルを

$C = (y_1, x_1, y_2, x_2, \dots, y_k, x_k, y_{k+1} = y_1)$  とする. ここで  $x_1, \dots, x_k$  は黒頂点,  $y_1, \dots, y_k$  は白頂点. このとき

$$\delta_X(C) = \sum_{i=1}^k w(y_i) - \sum_{i=1}^k w(x_i) + \sum_{i=1}^k \tilde{w}(y_i) + \sum_{i=1}^k \tilde{w}(y_i, y_{i+1}).$$

交互パス  $P$  の場合は両端点を考慮するため多少複雑になるが, ほぼ同様にして  $\delta_X(P)$  を表すことができる.

### 3.2 (MAXRATIO) の 3 分割解法

正則頂点を 3 個以上含む交互サイクルを大交互サイクル, 2 個以下しか含まない場合を小交互サイクルと呼ぶ. 交互集合族  $A$  は, その連結成分がすべて大交互サイクルであるとき, 大交互サイクル族と呼ぶ. ここでサイクルの族を考えるのは, 最終的に最大重みマッチングを解く問題に帰着させるためである.

与えられた基本構造  $(G, w, X)$  について,  $\lambda$  を固定された実数として, 次の 3 個の問題を考える.

(MAXWEIGHT1( $\lambda$ ))	Maximize	$w(\text{ex}(X \Delta C)) - \lambda \cdot \pi(\text{ex}(X \Delta C))$
	Subject to	$C$ は $X$ に関する小交互サイクル
(MAXWEIGHT2( $\lambda$ ))	Maximize	$w(\text{ex}(X \Delta A)) - \lambda \cdot \pi(\text{ex}(X \Delta A))$
	Subject to	$A$ は $X$ に関する大交互サイクル族
(MAXWEIGHT3( $\lambda$ ))	Maximize	$w(\text{ex}(X \Delta P)) - \lambda \cdot \pi(\text{ex}(X \Delta P))$
	Subject to	$P$ は $X$ に関する交互パス

(MAXWEIGHT1( $\lambda$ )), (MAXWEIGHT2( $\lambda$ )), (MAXWEIGHT3( $\lambda$ )) をそれぞれ高々頂点数回だけ解けば, (MAXRATIO) を解くことができる.

後は与えられた基本構造  $(G, w, X)$  について, 「(MAXWEIGHT1) を多項式時間で解ける」「重みが正の小交互サイクルが存在しないならば, (MAXWEIGHT2) を多項式時間で解ける」かつ「重みが正の交互サイクルが存在しないならば, (MAXWEIGHT3) を多項式時間で解ける」ことを示せばよい.

### 3.3 (MAXWEIGHT1) の解法

長さ 4 のサイクルはすべて列挙すればよい. 長さ 6 以上の小交互サイクルについて考える.

$x_1, \dots, x_k$  をすべて異なる黒頂点 ( $k \geq 3$ ),  $W_1, \dots, W_k$  をウイング,  $x_i$  は  $W_i$  と  $W_{i+1}$  とに隣接するとする. このとき

$(W_1, x_1, W_2, x_2, \dots, W_k, x_k, W_{k+1} = W_1)$  をウイングサイクルと呼ぶ. 長さ 6 以上の交互サイクルは必ずいずれか一つのウイングサイクルに含まれる.

ウイングサイクルを一つ固定すると, そこに含まれる交互サイクル  $C$  のうち重み  $\delta_X(C)$  が最大のものは, 補題 3.1.3 を用いて多項式時間で求めることができる. また正則頂点を高々 2 個含むウイングサイクルは頂点数の高々 2 乗個しかない. 以上より (MAXWEIGHT1) は多項式時間で解ける.

### 3.4 (MAXWEIGHT2) の解法

$z_1, \dots, z_k$  をすべて異なる非正則頂点 ( $k \geq 0$ ),  $y_1, \dots, y_k$  をすべて異なるウイングに属する, お互いに隣接しない束縛頂点,  $z_i \sim y_i$  かつ  $z_i \sim y_{i+1}$  とする. このとき交互



パス  $P = (y_1, z_1, \dots, z_{k-1}, y_k)$  を **IWAP** と呼び、その重み  $\delta_X(P)$  を次で定義する。

$$\delta_X(P) = \sum_{i=1}^k w(y_i) - \sum_{i=1}^{k-1} w(z_i) + \sum_{i=1}^k \hat{w}(y_i) + \sum_{i=1}^{k-1} \hat{w}(y_i, y_{i+1}).$$

**Lemma 3.4.1**  $C = (P_1, x_1, P_2, x_2, \dots, P_k, x_k, P_{k+1} = P_1)$  ( $k \geq 2$ ) を長さ 6 以上の交互サイクルとする。ただし  $P_1, \dots, P_k$  は **IWAP**,  $x_1, \dots, x_k$  は正則頂点。このとき

$$\delta_X(C) = \sum_{i=1}^k \delta_X(P_i) - \sum_{i=1}^k w(x_i).$$

**Lemma 3.4.2**  $a$  と  $b$  を束縛頂点とする。  $a$  と  $b$  を両端点とする **IWAP** のうち重み  $\delta_X(P)$  が最大のは多項式時間で求められる。

ここで与えられた基本構造  $(G, w, X)$  に対して、辺に重みのついた無向グラフ  $\hat{G}$  (**Edmonds** グラフ) を次のように構成する。  $x_1, \dots, x_r$  を  $G$  の正則頂点全体とする。  $\hat{G}$  は  $x_i^1, x_i^2$  ( $i = 1, \dots, r$ ) という  $2r$  個の頂点を持つ。各  $i = 1, \dots, r$  について、  $x_i^1$  と  $x_i^2$  を辺で結び、重みを  $\hat{w}(x_i^1, x_i^2) = w(x_i)$  とする。各  $x_i, x_j$  と各  $p, q \in \{1, 2\}$  について、両端点がそれぞれ  $B^p(x_i)$  と  $B^q(x_j)$  とに属する **IWAP** が存在すれば、  $x_i^p$  と  $x_j^q$  を辺で結び、重みを  $\hat{w}(x_i^p, x_j^q) = \delta_X(P_{pq})$  とする。ここで  $P_{pq}$  は両端点がそれぞれ  $B^p(x_i)$  と  $B^q(x_j)$  とに属する **IWAP** のうちで  $\delta_X(P_{pq})$  が最大のものである。

$\hat{G}$  の完全マッチング  $M = \{(x_i^1, x_i^2) \mid i = 1, \dots, r\}$  について考える。  $\hat{G}$  上で  $M$  に関する交互サイクル  $\hat{C}$  は、  $\hat{C}$  の長さが 6 以上ならば、もとの  $G$  上の  $X$  に関する大交互サイクルに対応し、  $\delta_M(\hat{C}) = \delta_X(C)$  である。  $\hat{C}$  の長さが 4 の場合、つまり  $\hat{C} = (x_i^1, x_j^1, x_j^2, x_i^2, x_i^1)$  の場合について考える。 ( $\hat{C} = (x_i^1, x_j^2, x_j^1, x_i^2, x_i^1)$  についても同様)

$\hat{G}$  の辺  $(x_i^p, x_j^q)$  に対応する  $G$  の **IWAP** を  $P_{pq}$  と書く。  $P_{11}$  と  $P_{22}$  が異なるウイングを通過していれば、  $C = (x_i, P_{11}, x_j, P_{22}, x_i)$  は  $\hat{G}$  上の小交互サイクルである。重みは

$$\nu_M(\hat{C}) = \hat{w}(x_i^1, x_j^1) + \hat{w}(x_j^2, x_i^2) - \hat{w}(x_i^1, x_i^2) - \hat{w}(x_j^1, x_j^2) = \delta_X(C)$$

であり、重みが正の小交互サイクルが存在しないという仮定から、  $\nu_M(\hat{C}) < 0$  である。

問題は  $P_{11}$  と  $P_{22}$  が同じウイングを通過している場合である。

$P_{11} = (y_1^1, z_1, y_2^1, \dots, z_{k-1}, y_k^1)$ ,  $P_{22} = (y_1^2, z_1, y_2^2, \dots, z_{k-1}, y_k^2)$  と書く。ここで  $y_1^1 \in B^1(x_i)$ ,  $y_1^2 \in B^2(x_i)$ ,  $y_k^1 \in B^1(x_j)$ ,  $y_k^2 \in B^2(x_j)$ .  $W(x_i, x_j)$  を、  $x_i$  および  $x_j$  から、束縛頂点と非正則頂点が交互に現れるパスを使って到達できる束縛頂点全体の集合とする。

- $\nu_M(\hat{C}) \leq 0$  の場合はそのままにしておく。
- $B^1(x_i) \subseteq W(x_i, x_j)$  ならば、  $\hat{G}$  から辺  $(x_i^2, x_j^1)$  と  $(x_i^2, x_j^2)$  を取り除く。

- $B^2(x_i) \subseteq W(x_i, x_j)$  ならば,  $\hat{G}$ から辺  $(x_i^1, x_j^1)$  と  $(x_i^1, x_j^2)$  を取り除く.
- $B^1(x_j) \subseteq W(x_i, x_j)$  ならば,  $\hat{G}$ から辺  $(x_i^1, x_j^2)$  と  $(x_i^2, x_j^2)$  を取り除く.
- $B^2(x_j) \subseteq W(x_i, x_j)$  ならば,  $\hat{G}$ から辺  $(x_i^1, x_j^1)$  と  $(x_i^2, x_j^1)$  を取り除く.
- 上記以外で  $l = 1$  の場合は,  $\hat{G}$ から辺  $(x_i^1, x_j^1)$  と  $(x_i^2, x_j^2)$  を取り除く.
- 上記以外の場合には,  $\tilde{\delta}_X(P_{11}) + \tilde{\delta}_X(P_{12}) = \tilde{\delta}_X(P_{12}) + \tilde{\delta}_X(P_{21})$  であることが示せる. そこで次の操作を行う.
  - ★  $\hat{G}$ から辺  $(x_i^1, x_j^1)$ ,  $(x_i^1, x_j^2)$ ,  $(x_i^2, x_j^1)$ ,  $(x_i^2, x_j^2)$  を取り除く.
  - ★  $\hat{G}$ に新しい頂点  $z^1$  と  $z^2$  を加え, 辺で結ぶ.  $\hat{w}(z^1, z^2) = 0$  とする. マッチング  $M$  に辺  $(z^1, z^2)$  を加える.
  - ★  $\hat{G}$ に新しい辺  $(x_i^1, z^1)$ ,  $(x_i^2, z^1)$ ,  $(x_j^1, z^2)$ ,  $(x_j^2, z^2)$  を加え, 重みをそれぞれ  $\hat{w}(x_i^1, z^1) = \tilde{\delta}_X(P_{11})$ ,  $\hat{w}(x_i^2, z^1) = \tilde{\delta}_X(P_{22})$ ,  $\hat{w}(x_j^1, z^2) = 0$ ,  $\hat{w}(x_j^2, z^2) = \tilde{\delta}_X(P_{12}) - \tilde{\delta}_X(P_{11}) (= \tilde{\delta}_X(P_{22}) - \tilde{\delta}_X(P_{21}))$  と置く. パス  $(x_i^p, z^1, z^2, x_j^q)$  はもとの  $G$  上では  $P_{pq}$  に対応する.

**Lemma 3.4.3**  $\hat{G}$ のすべての長さ 4 の交互サイクルに対して上記の変更を行う. 変更後の  $\hat{G}$  の最大マッチングを  $M^*$  とする.  $M \Delta M^*$  に含まれる交互サイクルのうちで重みが正であるものを  $\hat{C}_1, \dots, \hat{C}_k$  とする.  $\hat{C}_1, \dots, \hat{C}_k$  は  $G$  上の大交互サイクル族  $A = \{C_1, \dots, C_k\}$  に対応し, しかも (MAXWEIGHT2) の最適解である.

このように, 重みが正の小交互サイクルが存在しない場合, (MAXWEIGHT2) は, Edmonds グラフを構成, 修正して, 最大重みマッチング問題を解くことに帰着できる.

### 3.5 (MAXWEIGHT3) の解法

重みが正の交互サイクルが存在しないとき, (MAXWEIGHT3) は, Edmonds グラフの構成と修正によって, 最大重みマッチング問題を高々頂点数の 2 乗回解くことに帰着できる. Edmonds グラフの構成と修正の方法は大交互サイクル族の場合とほぼ同様であるが省略する.

## 参考文献

- [1] E. L. Johnson and M. W. Padberg, Degree-two inequalities, clique facets, and bipartite graphs, *Ann. Discrete Math.*, **16** (1982), 169-187.
- [2] G. J. Minty, On maximal independent sets of vertices in claw-free graphs, *J. Combin. Theory Ser. B* **28** (1980), 284-304.