数理解析研究所講究録
1068 巻 1998 年 150-158

A Two-Person Zero-sum Game with Fractional Loss Function

新潟大学大学院 自然科学研究科 沢崎 陽一 (YOICHI SAWASAKI)[1]
新潟大学大学院 自然科学研究科 木村 寛 (YUTAKA KIMURA)[2]
新潟大学 理学部 田中 謙輔 (KENSUKE TANAKA)[3]

非協力 n 人ゲームにおいて, 各プレイヤーの損失関数が特に分数型関数をしているときに, このゲームの均衡解の存在とその特徴について議論した ([8]).

ここでは分数型関数をもった 2 人零和ゲームを議論する. 新しいパラメトリック型 2 人零和ゲームを導入し, この新しいゲームと分数型ゲームとの相互関係を用いて, 各ゲームでの saddle value と saddle point の存在性や特徴を与える.

1 パラメトリック型 2 人零和ゲーム

パラメトリック型非協力 2 人零和ゲーム (GP_θ) を次の集合で与える.

$$(X, Y, f, g, \theta, F_\theta) \tag{1.1}$$

ここで,

1. E をバナッハ空間とし, $X \subset E$ はプレイヤー I の戦略集合, $Y \subset E$ はプレイヤー II の戦略集合.
2. $f : X \times Y \to \mathbb{R}$, $g : X \times Y \to \mathbb{R}_+$. ただし, $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$.
3. $\theta \in \mathbb{R}$ はゲームのパラメータ.
4. $F_\theta : X \times Y \to \mathbb{R}$ を $F_\theta(x, y) := f(x, y) - \theta g(x, y)$ で定義し, F_θ はプレイヤー I の損失関数, $-F_\theta$ はプレイヤー II の損失関数.
5. $\overline{F}_\theta := \inf_{x\in X} \sup_{y\in Y} F_\theta(x, y)$, $\underline{F}_\theta := \sup_{y\in Y} \inf_{x\in X} F_\theta(x, y)$.

Definition 1.1 ゲーム (GP_θ) が **saddle value** を持つとは次が成り立つとき,

$$\overline{F}_\theta = \underline{F}_\theta =: F_\theta^*. \tag{1.2}$$

また, 共通の値 F_θ^* をゲーム (GP_θ) の *saddle value* と呼ぶ.

---

[1]**Department of Mathematical Science, Graduate School of Science and Technology, Niigata University, Niigata 950–2181, JAPAN**
[2]**Department of Mathematical Science, Graduate School of Science and Technology, Niigata University, Niigata 950–2181, JAPAN**
[3]**Department of Mathematics, Faculty of Science, Niigata University, Niigata 950–2181, JAPAN**

Definition 1.2 $x^* \in X$ がゲーム (GP_θ) の **mini-sup** であるとは, 次が成り立つとき,

$$\sup_{y\in Y} F_\theta(x^*, y) = \sup_{y\in Y} \inf_{x\in X} F_\theta(x, y). \tag{1.3}$$

また, $y^* \in Y$ がゲーム (GP_θ) の **max-inf** であるとは, 次が成り立つとき,

$$\inf_{x\in X} F_\theta(x, y^*) = \inf_{x\in X} \sup_{y\in Y} F_\theta(x, y). \tag{1.4}$$

Definition 1.3 $(x^*, y^*) \in X \times Y$ がゲーム (GP_θ) の *saddle point* であるとは次が成り立つとき,

$$\inf_{x\in X} F_\theta(x, y^*) = F_\theta(x^*, y^*) = \sup_{y\in Y} F_\theta(x^*, y). \tag{1.5}$$

このとき J. -P. Aubin [1] より, 次の命題が成り立つ.

Proposition 1.1 $(x^*, y^*) \in X \times Y$ がゲーム (GP_θ) の *saddle point* であるための必要十分条件は, $x^* \in X$ が (GP_θ) の *mini-sup*, かつ $y^* \in Y$ が (GP_θ) の *max-inf* であることである. □

また, K. Fan [5], M. Sion [10] よりミニマックス定理が得られる.

Lemma 1.1 $X \subset E$ で, $Y \subset E$ はコンパクト凸集合とし, $\varphi : X \times Y \to \mathbb{R}$ は条件 (i), (ii) を満たす.

(i) $^\forall x \in X, \quad y \mapsto \varphi(x, y)$; 上半連続な凹関数.

(ii) $^\forall y \in Y, \quad x \mapsto \varphi(x, y)$; 凸関数.

このとき, 次を満たす $y^* \in Y$ が存在する.

$$\max_{y\in Y} \inf_{y\in X} \varphi(x, y) = \inf_{x\in X} \varphi(x, y^*) = \inf_{x\in X} \max_{y\in Y} \varphi(x, y). \tag{1.6}$$

すなわち, y^* はゲームの *max-inf* である. □

このとき, Lemma 1.1 よりゲーム (GP_θ) のミニマックス定理が得られる.

Theorem 1.1 $X \subset E$ で, $Y \subset E$ をコンパクト凸集合とし, $f : X \times Y \to \mathbb{R}$, $g : X \times Y \to \mathbb{R}_+$ は条件 (i), (ii),(iii), (iv) を満たす.

(i) $^\forall y \in Y, \quad x \mapsto f(x, y)$; 凸関数.

(ii) $^\forall x \in X, \quad y \mapsto f(x, y)$; 上半連続な凹関数.

(iii) $^\forall y \in Y, \quad x \mapsto g(x, y)$; 凹関数.

(iv) $^\forall x \in X, \quad y \mapsto g(x, y)$; 下半連続な凸関数.

このとき, 任意の $\theta \geq 0$ に対して, 次を満たす $y^* \in Y$ が存在する.

$$\overline{F}_\theta = \underline{F}_\theta = \inf_{x \in X} F_\theta(x, y^*). \tag{1.7}$$

Proof. $\theta \geq 0$ より (ii), (iv) から, 任意の $x \in X$ に対して, $y \mapsto F_\theta(x, y)$ は上半連続な凹関数である. また, 同様に (i), (iii) から, 任意の $y \in Y$ に対して, $x \mapsto F_\theta(x, y)$ は凸関数である. よって Lemma 1.1 より, $\overline{F}_\theta = \underline{F}_\theta$ が成立し, ゲーム (GP_θ) の *max-inf* $y^* \in Y$ が存在する. □

2 分数型 2 人零和ゲーム

分数型非協力 2 人零和ゲーム (GP) を次の集合で与える.

$$(X, Y, f, g, G, \overline{\theta}, \underline{\theta}) \tag{2.1}$$

ここで,

1. E をバナッハ空間とし, $X, Y \subset E$ はそれぞれプレイヤー I, II の戦略集合.
2. $f : X \times Y \to \mathbb{R}, \ \ g : X \times Y \to \mathbb{R}_+$.
3. $G = f/g : X \times Y \to \mathbb{R}$ をプレイヤー I の損失関数, $-G$ をプレイヤー II の損失関数.
4. $\overline{\theta} := \inf_{x \in X} \sup_{y \in Y} G(x, y), \ \ \underline{\theta} := \sup_{y \in Y} \inf_{x \in X} G(x, y)$.

Definition 2.1 $y^* \in Y$ がゲーム (GP) の *max-inf* であるとは次か成り立つとき,

$$\overline{\theta} = \inf_{x \in X} \sup_{y \in Y} G(x, y) = \inf_{x \in X} G(x, y^*). \tag{2.2}$$

また, $x^* \in X$ がゲーム (GP) の *mini-sup* であるとは次が成り立つとき,

$$\underline{\theta} = \sup_{y \in Y} \inf_{x \in X} G(x, y) = \sup_{y \in Y} G(x^*, y). \tag{2.3}$$

Definition 2.2 $(x^*, y^*) \in X \times Y$ がゲーム (GP) の *saddle point* であるとは次が成り立つとき,

$$\sup_{y \in Y} G(x^*, y) = G(x^*, y^*) = \inf_{x \in X} G(x, y^*). \tag{2.4}$$

このとき, $\overline{F}_\theta$ と $\overline{\theta}$ との間に次のような性質が成りたつ.

Lemma 2.1 $\overline{F}_\theta$について次が成りたつ.

(a) $\overline{F}_\theta$ は θ に関して単調非増加.

(b) $\overline{F}_\theta < 0$ ならば, $\theta \geq \overline{\theta}$.

(c) $\overline{F}_\theta > 0$ ならば, $\theta \leq \overline{\theta}$.

(d) $\theta > \overline{\theta}$ならば, $\overline{F}_\theta \leq 0$.

(e) $\theta < \overline{\theta}$ならば, $\overline{F}_\theta \geq 0$.

さらに Y がコンパクト, 任意の $x \in X$ に対して $y \mapsto f(x,y)$ が連続, $y \mapsto g(x,y)$ が連続のとき, 次が成り立つ.

(f) $\overline{F}_\theta < 0 \Longleftrightarrow \theta > \overline{\theta}$.

(g) $\overline{F}_{\overline{\theta}} \geq 0$.

Proof. (a) $\theta_1 < \theta_2$ とする. このとき, g は $X \times Y$ 上で常に正だから, すべての $(x,y) \in X \times Y$ に対して,

$$F_{\theta_1}(x,y) > F_{\theta_2}(x,y) \tag{2.5}$$

である. ゆえに,

$$\begin{aligned} \overline{F}_{\theta_1} &= \inf_{x\in X} \sup_{y \in Y} F_{\theta_1}(x,y) \\ &\geq \inf_{x\in X} \sup_{y \in Y} F_{\theta_2}(x,y) \\ &= \overline{F}_{\theta_2}. \end{aligned}$$

よって, $\overline{F}_\theta$ は θ に関して単調非増加である.
(b) $\overline{F}_\theta < 0$ とする. このとき $\overline{F}_\theta$の定義から, すべての $y \in Y$ に対して,

$$F_\theta(\bar{x},y) = f(\bar{x},y) - \theta g(\bar{x},y) < 0 \tag{2.6}$$

をみたす $\bar{x} \in X$ が存在する. このとき (2.6) 式より, すべての $y \in Y$ に対して, $G(\bar{x},y) = \frac{f(\bar{x},y)}{g(\bar{x},y)} < \theta$ となるから,

$$\sup_{y\in Y} G(\bar{x},y) \leq \theta. \tag{2.7}$$

$\overline{\theta}$ の定義と (2.7) 式から, $\overline{\theta} \leq \theta$ が成り立つ.
(c) $\overline{F}_\theta > 0$ とする. このときすべての $x \in X$ に対して,

$$F_\theta(x,y_x) = f(x,y_x) - \theta g(x,y_x) > 0 \tag{2.8}$$

となる $y_x \in Y$ が存在する. (2.8) 式より, $G(x,y_x) = \frac{f(x,y_x)}{g(x,y_x)} > \theta$ となるから, すべての $x \in X$ に対して,

$$\begin{aligned} \sup_{y\in Y} G(x,y) &\geq G(x,y_x) \\ &> \theta. \end{aligned}$$

これは $\overline{\theta} \geq \theta$ を示している.
(d) $\theta > \overline{\theta}$とすると, $\overline{\theta}$ の定義より,

$$\theta > \sup_{y \in Y} G(\bar{x}, y)$$

を満たす $\bar{x} \in X$ が存在する. つまり, すべての $y \in Y$ に対して, $F_\theta(\bar{x}, y) < 0$ である.

よって,

$$\begin{aligned} 0 &\geq \sup_{y \in Y} F_\theta(\bar{x}, y) \\ &\geq \inf_{x \in X} \sup_{y \in Y} F_\theta(x, y) \\ &= \overline{F}_\theta. \end{aligned}$$

(e) $\overline{\theta} > \theta$ より, すべての $x \in X$ に対して,

$$\sup_{y \in Y} G(x, y) > \theta.$$

このとき, $G(x, y_x) > \theta$, すなわち, $F_\theta(x, y_x) > 0$ をみたす $y_x \in Y$ が存在する. ゆえに,

$$\begin{aligned} \sup_{y \in Y} F_\theta(x, y) &\geq F_\theta(x, y_x) \\ &> 0, \qquad {}^\forall x \in X. \end{aligned}$$

よって,

$$\overline{F}_\theta = \inf_{x \in X} \sup_{y \in Y} F_\theta(x, y) \geq 0.$$

(f) $\overline{F}_\theta < 0$ とする. このとき $\sup_{y \in Y} F_\theta(\bar{x}, y) < 0$ となる $\bar{x} \in X$ が存在する. すなわち, すべての $y \in Y$ に対して, $G(\bar{x}, y) < \theta$ である. ここで Y がコンパクト $y \mapsto G(\bar{x}, y)$ が連続だから,

$$\begin{aligned} \theta &> \sup_{y \in Y} G(\bar{x}, y) \\ &\geq \inf_{x \in X} \sup_{y \in Y} G(x, y) \\ &= \overline{\theta}. \end{aligned}$$

逆に $\theta > \overline{\theta}$ のとき, (b) の証明から, すべての $y \in Y$ に対して,

$$F_\theta(\bar{x}, y) < 0$$

をみたす $\bar{x} \in X$ が存在する. ここで Y がコンパクト $y \mapsto F_\theta(\bar{x}, y)$ が連続だから,

$$\begin{aligned} 0 &> \sup_{y \in Y} F_\theta(\bar{x}, y) \\ &\geq \inf_{x \in X} \sup_{y \in Y} F_\theta(x, y) \\ &= \overline{F}_\theta. \end{aligned}$$

(g) $\overline{F}_{\overline{\theta}} < 0$ とする．このとき,

$$\sup_{y \in Y} F_{\overline{\theta}}(\bar{x}, y) < 0$$

をみたす $\bar{x} \in X$ が存在する．ここで Y がコンパクト $y \mapsto F_\theta(\bar{x}, y)$ が連続だから, すべての $y \in Y$ に対して, $F_{\overline{\theta}}(\bar{x}, y) < 0$. つまり,

$$\overline{\theta} > G(\bar{x}, y), \qquad {}^\forall y \in Y.$$

ゆえに,

$$\begin{aligned} \overline{\theta} &> \sup_{y \in Y} G(\bar{x}, y) \\ &\geq \inf_{x \in X} \sup_{y \in Y} G(x, y) \\ &= \overline{\theta}. \end{aligned}$$

これは矛盾である．よって$\overline{F}_{\overline{\theta}} \geq 0$ が成立する． □

Lemma 2.1 と同様にして, $\underline{F}_\theta$ と $\underline{\theta}$ との間に次のような性質が成りたつ.

Lemma 2.2 $\underline{F}_\theta$について次が成りたつ.

(a) $\underline{F}_\theta$ は θ に関して単調非増加.

(b) $\underline{F}_\theta < 0$ ならば, $\theta \geq \underline{\theta}$.

(c) $\underline{F}_\theta > 0$ ならば, $\theta \leq \underline{\theta}$.

(d) $\theta > \underline{\theta}$ならば, $\underline{F}_\theta \leq 0$.

(e) $\theta < \underline{\theta}$ならば, $\underline{F}_\theta \geq 0$.

さらに X がコンパクト, 任意の $y \in Y$ に対して $x \mapsto f(x, y)$ が連続, $x \mapsto g(x, y)$ が連続のとき, 次が成り立つ.

(f) $\underline{F}_\theta < 0 \Longleftrightarrow \theta > \underline{\theta}$.

(g) $\underline{F}_{\underline{\theta}} \geq 0$.

Proof. $\underline{F}_\theta$ と $\underline{\theta}$ の定義から, Lemma 2.1 と同様に証明すればよい． □

また, ゲーム (GP) と ゲーム (GP_θ) との間には次のような関係が成り立つ.

Theorem 2.1 $y^* \in Y$ をゲーム (GP) の *max-inf* とする．このとき, 次が成り立つ.

1. $\overline{\theta} = \underline{\theta} =: \theta^*$.
2. $\overline{F}_{\theta^*} \leq 0$ のとき, y^* はゲーム (GP_{θ^*}) の *max-inf* となる.

Proof. (i) $\overline{\theta}$, $\underline{\theta}$ の定義から, 明らかに $\overline{\theta} \geq \underline{\theta}$ が成り立つ.
一方, y^* はゲーム (GP) の *max-inf* だから,

$$\begin{aligned}\overline{\theta} &= \inf_{x \in X} G(x, y^*)\\ &\leq \sup_{y \in Y} \inf_{x \in X} G(x, y)\\ &= \underline{\theta}.\end{aligned}$$

よって, $\overline{\theta} = \underline{\theta}$ である.
(ii) y^* はゲーム (GP) の *max-inf* より, 任意の $x \in X$ に対して,

$$\theta^* = \inf_{x \in X} G(x, y^*) \leq G(x, y^*).$$

すなわち，任意の $x \in X$ に対して,

$$0 \leq F_{\theta^*}(x, y^*) \leq \sup_{y \in Y} F_{\theta^*}(x, y)$$

が成り立つ. このとき,

$$\begin{aligned}0 &\leq \inf_{x \in X} F_{\theta^*}(x, y^*)\\ &\leq \inf_{x \in X} \sup_{y \in Y} F_{\theta^*}(x, y)\\ &= \overline{F}_{\theta^*} \leq 0.\end{aligned}$$

これは,

$$\inf_{x \in X} F_{\theta^*}(x, y^*) = \inf_{x \in X} \sup_{y \in Y} F_{\theta^*}(x, y)$$

を示している. よって y^* は (GP_{θ^*}) の *max-inf* である. □

Theorem 2.2 $\theta^* := \overline{\theta} = \underline{\theta}$ とし, $y^* \in Y$ をゲーム (GP_{θ^*}) の *max-inf* とする. このとき, $\overline{F}_{\theta^*} \geq 0$ ならば, y^* はゲーム (GP) の *max-inf* となる.

Proof. $\overline{F}_{\theta^*} \geq 0$ とすると, $y^* \in Y$ がゲーム (GP_{θ^*}) の *max-inf* より,

$$\begin{aligned}0 \leq \overline{F}_{\theta^*} &= \inf_{x \in X} \sup_{y \in Y} F_{\theta^*}(x, y)\\ &= \inf_{x \in X} F_{\theta^*}(x, y^*)\\ &\leq F_{\theta^*}(x, y^*), \qquad {}^{\forall} x \in X\end{aligned}$$

となるから, すべての $x \in X$ に対して,

$$\theta^* \leq G(x, y^*) \leq \sup_{y \in Y} G(x, y) \tag{2.9}$$

が成り立つ. これより,

$$\begin{aligned}\theta^* &\leq \inf_{x \in X} G(x, y^*)\\ &\leq \inf_{x \in X} \sup_{y \in Y} G(x, y)\\ &= \theta^*.\end{aligned}$$

よって, y^* は (GP) の *max-inf* である. □

上の結果を用いて, ゲーム (GP) の minimax 定理が得られる.

Theorem 2.3 $X \subset E$ で, $Y \subset E$ をコンパクト凸集合とし, $f : X \times Y \to \mathbb{R}$, $g : X \times Y \to \mathbb{R}_+$ は条件 (i), (ii),(iii), (iv) を満たす.

(i) $\forall y \in Y, \quad x \mapsto f(x,y)$; 凸関数.

(ii) $\forall x \in X, \quad y \mapsto f(x,y)$; 連続な凹関数.

(iii) $\forall y \in Y, \quad x \mapsto g(x,y)$; 凹関数.

(iv) $\forall x \in X, \quad y \mapsto g(x,y)$; 連続な凸関数.

このとき, $\overline{\theta} \geq 0$ に対して, 次が成立する.

1. $\overline{\theta} = \underline{\theta} =: \theta^*$.
2. ゲーム (GP) の *max-inf* $y^* \in Y$ が存在する.

Proof. (i) $\overline{\theta} \geq 0$ より, Theorem 1.1, Lemma 2.1 (g) から,

$$\underline{F_{\overline{\theta}}} = \overline{F_{\overline{\theta}}} \geq 0. \tag{2.10}$$

また, 任意の $x \in X$ に対して, $y \mapsto F_{\overline{\theta}}(x,y)$ は連続より, $y \mapsto \inf_{x\in X} F_{\overline{\theta}}(x,y)$ は上半連続である. このとき, Y がコンパクトより,

$$\underline{F_{\overline{\theta}}} = \sup_{y\in Y}\inf_{x\in X} F_{\overline{\theta}}(x,y) = \inf_{x\in X} F_{\overline{\theta}}(x,y^*) \tag{2.11}$$

をみたす $y^* \in Y$ が存在する.

(2.10), (2.11) 式より,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \sup_{y\in Y}\inf_{x\in X} F_{\overline{\theta}}(x,y) \\ &= \inf_{x\in X} F_{\overline{\theta}}(x,y^*) \\ &\leq F_{\overline{\theta}}(x,y^*), \qquad \forall x \in X. \end{aligned} \tag{2.12}$$

(2.12) 式より, すべての $x \in X$ に対して, $\overline{\theta} \leq G(x,y^*)$ を得る. よって,

$$\begin{aligned} \overline{\theta} &\leq \inf_{x\in X} G(x,y^*) \\ &\leq \sup_{y\in Y}\inf_{x\in X} G(x,y) \\ &= \underline{\theta}. \end{aligned}$$

以上より, $\overline{\theta} = \underline{\theta}$ である.

(ii) (2.11) 式より, $y^* \in Y$ はゲーム (GP_{θ^*}) の *max-inf* である. このとき Lemma 2.1 (g) より $\overline{F_{\overline{\theta}^*}} \geq 0$ となるから, Theorem 2.2 より y^* はゲーム (GP) の *max-inf* である. □

参考文献

[1] J. -P. Aubin, Mathematical Methods of Game and Economic Theory, Revised Edition (North-Holland, Amsterdam 1982).

[2] J. -P. Aubin, Optima and Equilibria, (Springer-Verlag, New York, 1993).

[3] J. P. Crouzeix, J. A. Ferland and S. Schaible, Duality in Generalized Linear Fractional Programming, Math. Prog., 27, (1983), 1–14.

[4] J. P. Crouzeix, J. A. Ferland and S. Schaible, An Algorithm for Generalized Fractional Programs, J.Optim.The.Appl., 47, No.1, (1985), 35–49.

[5] K. Fan, Minimax theorems, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 39 (1953), 42-47.

[6] R. Jagannathan and S. Schaible, Duality in Generalized Fractional Programming via Farkas's Lemma, J.Optim.The.Appl., 41, (1983), 417–424.

[7] Y. Kimura, Y. Sawasaki and K. Tanaka, A Perturbation on Two-person Zero-sum Games, to appear in Annals of Dynamic Game.

[8] Y. Kimura, Y. Sawasaki and K. Tanaka, A Non-Cooperative Equilibrium of $n-$person Game with Fractional Loss Functions, RIMS Kokyuroku 1043, 215-220, Kyoto Univ., Kyoto, Japan.

[9] R.T.Rockafellar, Convex Analysis, Princeton University Press, 1970.

[10] M. Sion, On General Minimax Theorems, Pacific J. Math., 8 (1958), 171-176.

[11] K. Tanaka and K. Yokoyama, On ε-Equilibrium Point in a Noncooperative n-person Game, J. Math. Anal. Appl., 160 (1991), 413-423.