数理解析研究所講究録
1068巻 1998年 182-193

凸最小化問題と不動点近似法

高橋 渉
(Wataru TAKAHASHI)
東京工業大学・大学院情報理工学研究科

1 はじめに

Hilbert 空間 H で定義され, $(-\infty, \infty]$ に値をとる関数 f が凸であるとは, H の任意の要素 x, y および非負な数 α, β(ただし, $\alpha+\beta=1$) に対して

$$f(\alpha x+\beta y) \leq \alpha f(x)+\beta f(y)$$

が成立するときをいう. また, ある $x \in H$ に対し, $f(x) < +\infty$ となるとき, 関数 f は proper であるという. 「r 個の下半連続な凸関数 g_i の制約式

$$g_i(x) \leq 0, \quad i=1,2,\ldots,r$$

を満たす $x \in H$ の中で, 下半連続で凸な目的関数 f を最小にする点 x_0 を見つけよ」という凸最小化問題において

$$C_i=\{x \in H : g_i(x) \leq 0\}, \quad i=1,2,\ldots,r$$

とし, $S=\cap_{i=1}^{r} C_i$ とすると, C_i $(i=1,2,\ldots,r)$ と S は閉凸集合になるが, 上の問題は「閉凸集合 S の中で, 下半連続で凸な関数 f を最小にする点 x_0 を見つけよ」という問題になる. さらに

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (\forall x \in S) \\ \infty & (\forall x \notin S) \end{cases}$$

と定義すると, 「Hilbert 空間 H において, g を最小にする点 x_0 を見つけよ」という問題になる. そこで一般的には, Hilbert 空間 H 上で定義され, $(-\infty, \infty]$ に値をとる下半連続で proper な凸関数 g に対して, g を最小にするという問題を考えればよいことになる. いま g の劣微分

$$\partial g(x)=\{x^* \in H : g(y) \geq g(x)+(x^*, y-x), \forall y \in H\}, \quad \forall x \in H$$

は, H から H への m-増大作用素になる. そこで, この m-増大作用素 $A=\partial g$ に対して, 初期値問題

$$\begin{cases} \frac{du(t)}{dt}+Au(t) \ni 0, & 0<t<\infty \\ u(0)=x \end{cases}$$

を考える. これは一意の解 $u:[0,\infty) \to H$ をもつ. いま A の定義域 $D(A)$ の元 x と $t \geq 0$ に対して

$$S(t)x=u(t)$$

で $S(t)$ を定義すると, $S(t)$ は $D(A)$ 上の非拡大写像, すなわち

$$\|S(t)x - S(t)y\| \le \|x - y\|, \quad \forall x, y \in D(A)$$

となり, $D(A)$ の閉包 C 上に一意に拡張できる. また $F(S(t))$ を写像 $S(t)$ の不動点の集合とすると

$$0 \in \partial g(x_0) \Longleftrightarrow g(x_0) = \min_{x \in H} g(x) \Longleftrightarrow x_0 \in \bigcap_{t \ge 0} F(S(t))$$

であることも知られている. さらに, m-増大作用素 $A = \partial g$ の resolvents $J_\lambda = (I + \lambda A)^{-1}$, $\forall \lambda > 0$ はすべて非拡大写像となり, 任意の $\lambda > 0$ に対して

$$0 \in A(x_0) \Longleftrightarrow J_\lambda x_0 = x_0$$

であることも簡単な計算によってわかる. そこで, 「Hilbert 空間 H 上で定義された下半連続で proper な凸関数 $g(x)$ を最小にする点 x_0 を見つけよ」という問題は興味あるいろいろの問題に発展する. ここでは, 「g を最小にする点 x_0 が存在する」という仮定の下に, その x_0 を求める方法と大いに関係のある非拡大写像または非拡大写像族に関する不動点近似法をいくつか紹介する. 特に, 最近, 塩路-高橋 [38] によって得られた Banach 空間における Halpern 形の強収束定理やそれを写像族の場合まで証明した強収束定理は, 写像の定義域にコンパクトを仮定していない点が興味あるものと思われる. また C_i $(i = 1, 2, \ldots, r)$ が与えられたとき「H から C_i への距離射影 P_i のみを使って, $S = \cap_{i=1}^r C_i$ の元を求めよ」という凸制約問題を, ここでは 上の強収束定理や Reich の弱収束定理 [33] 用いて議論する.

2 準備

E を Banach 空間とし, C を E の空でない閉凸集合とする. このとき, C 上の写像 T は, 任意の $x, y \in C$ に対して, $\|Tx - Ty\| \le \|x - y\|$ を満たすとき, 非拡大であるといわれる. C 上の写像 T に対して, $F(T)$ は T の不動点の全体を表し, $R(T)$ は T の値域を表す. $D \subset C$ とし, P を C から D の上への写像とする. このとき, P がサニーであるとは $x \in C$ と $t \ge 0$ に対して, $Px + t(x - Px) \in C$ であるならば

$$P(Px + t(x - Px)) = Px$$

がつねに成り立つことである. また C から C への写像 P が $P^2 = P$ を満たすとき retraction であるといわれる. Banach 空間におけるサニー非拡大 retraction は Hilbert 空間での metric projection を拡張した概念である. また C の部分集合 D に対して, C から D の上への非拡大 retraction が存在するとき, D は C の非拡大 retract といわれる.

Banach 空間 E に対して, E の凸性の modulus δ は, 任意の ε $(0 \le \varepsilon \le 2)$ に対して

$$\delta(\varepsilon) = \inf\{1 - \left\|\frac{x+y}{2}\right\| : \|x\| \le 1, \ \|y\| \le 1, \ \|x - y\| \ge \varepsilon\}$$

で定義される. Banach 空間 E は, 任意の $\varepsilon > 0$ に対してその modulus が $\delta(\varepsilon) > 0$ であるとき, 一様凸であるといわれる. また, E は $\|x\| = 1, \|y\| = 1$ となる $x, y \in E$ $(x \ne y)$ に

対して, つねに $\|x+y\| < 2$ であるとき, 狭義凸であるといわれる. 一様凸な Banach 空間は狭義凸である. E^* を E の共役空間とするとき, E が $E = (E^*)^*$ を満たすなら, E は回帰的であるといわれる. 一様凸な Banach 空間は回帰的であることも知られている.

Banach 空間 E の元 x とその共役空間 E^* の元 x^* に対して, (x, x^*) によって x における x^* の値 $x^*(x)$ を表すとき, E 上の duality 写像 J は, つぎのように定義される:

$$J(x) = \{x^* \in E^* : (x, x^*) = \|x\|^2 = \|x^*\|^2\}, \quad \forall x \in E.$$

Hahn-Banach の定理を用いることによって, 任意の $x \in E$ に対して $J(x) \neq \phi$ であることが証明される. この duality 写像 J は E のノルムの微分可能性とも大いに関わりをもつ. いま $U = \{x \in E : \|x\| = 1\}$ とするとき, 任意の $x, y \in U$ に対して

$$\lim_{t \to 0} \frac{\|x+ty\| - \|x\|}{t} \tag{$*$}$$

が常に存在するとき, E のノルムは Gâteaux 微分可能であるといわれる. このとき, Banach 空間 E は smooth であるともいわれる. 任意の $y \in U$ に対して極限 $(*)$ が $x \in U$ に対して一様に存在するとき, E のノルムは uniformly Gâteaux 微分可能であるといわれる. 任意の $x \in U$ に対して, 極限 $(*)$ が $y \in U$ に対して一様に存在するとき, E のノルムは Fréchet 微分可能であるといわれる. E が smooth であるなら, duality 写像 J は一価となり, E のノルムが uniformly Gîeaux 微分可能なら, J は E の有界集合上で一様連続である. また, E のノルムが Fréchet 微分可能ならば, J は norm-to-norm 連続である [46].

3 強収束定理

C を Banach 空間 E の閉凸集合とし, T を C から C への非拡大写像とする. Halpern[] は Hilbert 空間でつぎの問題を考えた: $\{\alpha_n\} \subset [0,1]$ とし

$$x_1 = x \in C, \quad x_{n+1} = \alpha_n x + (1-\alpha_n)Tx_n \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

とするとき, どのような条件の下で $\{x_n\}$ は T の不動点に収束するか.

これに対して, Wittmann[57] はつぎの定理を証明した.

定理 3.1 (Wittmann) $\{\alpha_n\}$ を $[0,1]$ の元α_n の実数列で

$$\lim_{n \to \infty} \alpha_n = 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_{n+1} - \alpha_n| < +\infty$$

となるものとする. C を Hilbert 空間 H の閉凸集合とし, T を C から C への $F(T) \neq \phi$ となる非拡大写像とする. $x \in C$ とし, $x_1 = x$,

$$x_{n+1} = \alpha_n x + (1-\alpha_n)Tx_n \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

とする. このとき, $\{x_n\}$ は T の不動点 x_0 に強収束する. また $x_0 = Px$ である. ただし P は H から $F(T)$ の上への metric projection である.

Wittmann の定理で $\alpha = \frac{1}{n}$ とし, T をアフィンとすると, それはつぎの Baillon の非線形エルゴード定理 [3] と一致する.

定理 3.2 (Baillon) C を Hilbert 空間における閉凸集合とし, T を C から C への $F(T) \neq \phi$ となる非拡大写像とする. このとき, 任意の $x \in C$ に対して

$$S_n x = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} T^k x$$

は, T の不動点に弱収束する.

Baillon の定理は弱収束どまりであるのに対し, Wittmann の定理は強収束までいえる. 最近, 塩路-高橋 [38] は Wittmann の定理を Banach 空間の場合まで拡張するつぎの定理を得た. Halpern の問題を Banach 空間の場合で解くことは, これまで open にされていた.

定理 3.3 $\{\alpha_n\}$ を $[0,1]$ の元 α_n の実数列で

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_{n+1} - \alpha_n| < +\infty$$

となるものとする. E を一様凸で一様 Gâteaux 微分可能なノルムをもつ Banach 空間とする. C を E の閉凸部分集合とし, T を C から C への $F(T) \neq \phi$ となる非拡大写像とする. $x \in C$ とし, $x_1 = x$,

$$x_{n+1} = \alpha_n x + (1 - \alpha_n) T x \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

とする. このとき, $\{x_n\}$ は T の不動点 x_0 に強収束する. また $x_0 = Px$ である. ただし, P は C から $F(T)$ の上へのサニー非拡大な retraction である.

この定理の証明には, Reich[34], 高橋-上田 [55] による増大作用素の resolvents に関係するつぎの定理が用いられた.

定理 3.4 E を一様凸で一様 Gâteaux 微分可能なノルムをもつ Banach 空間とし, C を E の空でない閉凸部分集合とする. T を C から C への非拡大写像とし, $x \in C$ とする. このとき, $0 < t < 1$ となる任意の t に対して

$$z_t = tx + (1-t) T z_t$$

を満たす元 z_t が一意に定まるが, $t \to 0$ とするならば $\{z_t\}$ は Px に強収束する. ただし, P は C から $F(T)$ の上へのサニー非拡大 retraction である.

一方, 清水-高橋 [37] は複数の非拡大写像に対する共通不動点近似法を考案し, つぎの 2 つの定理を証明した. 定理を述べる前に定義を一つ与えておく. C を Banach 空間 E の閉凸集合とし, $\{S(t) : 0 \leq t < \infty\}$ を C 上で定義された写像の族とする. このとき, $\{S(t) : 0 \leq t < \infty\}$ がつぎの 4 つの条件を満たすならば C 上の非拡大半群と呼ばれる:

(1) $S(t+s)x = S(t)S(s)x$, $\forall t, s \in [0, \infty)$, $x \in C$;

(2) $S(0)x = x$, $\forall x \in C$;

(3) 任意の $x \in C$ に対して, $t \mapsto S(t)x$ は連続である;

(4) $\|S(t)x - S(t)y\| \leq \|x - y\|$, $\forall t \in [0, \infty]$, $x, y \in C$.

定理 3.5 H を Hilbert 空間とし, C を H の閉凸集合とする. S, T を C から C への 2 つの可換な非拡大写像とし, $F(S) \cap F(T) \neq \phi$ とする. $\{\alpha_n\}$ を

$$0 \leq \alpha_n \leq 1, \quad \lim_{n \to \infty} \alpha_n = 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$$

を満たす実数列とする. このとき, $x_1 = x \in C$,

$$x_{n+1} = \alpha_n x + (1 - \alpha_n) \frac{2}{(n+1)(n+2)} \sum_{k=0}^{n} \sum_{i+j=k} S^i T^j x_n \quad (n = 1, 2, 3 \ldots)$$

で定義される点列 $\{x_n\}$ は $F(S) \cap F(T)$ の元 Px に強収束する. ただし, P は C から $F(T)$ の上への metric projection である.

注 上の定理は n 個の場合まで拡張される.

定理 3.6 H を Hilbert 空間とし, C を H の閉凸集合とする. $\{S(t) : 0 \leq t < \infty\}$ を C 上の非拡大半群とし, $\cap_{t \geq 0} F(S(t)) \neq \phi$ とする. $\{\alpha_n\}$ を

$$0 \leq \alpha_n \leq 1, \quad \lim_{n \to \infty} \alpha_n = 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = 0$$

を満たす実数列とする. このとき, $x_1 = x \in C$,

$$x_{n+1} = \alpha_n x + (1 - \alpha_n) \frac{1}{t_n} \int_0^{t_n} S(u) x_n du \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

で定義される点列 $\{x_n\}$ は, $\{t_n\}$ を $t_n \to \infty$ となる実数列とするなら, $\cap_{t \geq 0} F(S(t))$ の元 Px に強収束する. ただし, P は C から $\cap_{t \geq 0} F(S(t))$ の上への metric projection である.

定理 3.6 は, 塩路-高橋 [39] によって, つぎの定理まで拡張されている.

定理 3.7 E を一様凸で一様 Gâteaux 微分可能なノルムをもつ Banach 空間とし, C を E の閉凸集合とする. $\{S(t) : 0 \leq t < \infty\}$ を C 上の非拡大半群とし, $\cap_{t \geq 0} F(S(t)) \neq \phi$ とする. $\{\alpha_n\}$ を

$$0 \leq \alpha_n \leq 1, \quad \lim_{n \to \infty} \alpha_n = 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = 0$$

を満たす実数列とする. このとき, $x_1 = x \in C$,

$$x_{n+1} = \alpha_n x + (1 - \alpha_n) \frac{1}{t_n} \int_0^{t_n} S(u) x_n du \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

で定義される点列 $\{x_n\}$ は, $\{t_n\}$ を $t_n \to \infty$ とする実数列とするなら, $\cap_{t \geq 0} F(S(t))$ の元 Px に強収束する. ただし, P は C から $\cap_{t \geq 0} F(S(t))$ の上へのサニー非拡大 retraction である.

上の定理は, 最近 塩路-高橋 [40] によって Banach 空間で, かつ非拡大非可換半群の場合まで拡張されたことを報告しておく.

4 弱収束定理

C を Hilbert 空間 H の閉凸集合とし, T を C から C への非拡大写像とする. このとき, Mann[30] はつぎの問題を考えた: $\{\alpha_n\} \subset [0,1]$ とし, $x_1 = x \in C \subset H$,

$$x_{n+1} = \alpha_n T x_n + (1-\alpha_n) x_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

とするとき, どのような条件の下で $\{x_n\}$ は T の不動点に収束するか.

これに対して, Mann 自身, $\{x_n\}$ が T の不動点への弱収束する一つの解答を与えたが, 1974 年, 石川 [18] は Mann よりも一般的な近似法でこれを研究している. すなわち, $x_1 = x \in C \subset H$

$$x_{n+1} = \alpha_n T[\beta_n T x_n + (1-\beta_n) x_n] + (1-\alpha_n) x_n,$$

$$0 < \alpha_n < 1, \quad 0 < \beta_n < 1 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定義される点列 $\{x_n\}$ の収束性についての研究を行った. 後に Reich[33] は Banach 空間でつぎの定理を証明した.

定理 4.1 E を一様凸で Fréchet 微分可能なノルムをもつ Banach 空間とする. C を E の閉凸集合とし, T を C から C への $F(T) \neq \phi$ となる非拡大写像とする. $\{\alpha_n\}$ を実数列で

$$0 \leq \alpha_n \leq 1, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n (1-\alpha_n) = \infty$$

を満たすものとする. このとき, $x_1 = x \in C$,

$$x_{n+1} = \alpha_n T x_n + (1-\alpha_n) x_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定義される点列 $\{x_n\}$ は T の不動点へ弱収束する.

この定理と定理 3.3 とは Banach 空間のノルムの微分可能性に興味ある違いがでている. 定理 3.3 は一様 Gâteaux 微分可能性を仮定して強収束定理を証明しているのに対し, 定理 4.1 では Fréchet 微分可能性を仮定して弱収束定理を証明している.
高橋-田村 [54] は石川近似法を 2 つの写像の場合まで拡張し, つぎの定理を得た.

定理 4.2 E を一様凸で Fréchet 微分可能なノルムをもつ Banach 空間とする. C を E の閉凸集合とし, S, T を C から C への $F(S) \cap F(T) \neq \phi$ となる非拡大写像とする. このとき, $x_1 = x \in C$,

$$x_{n+1} = \alpha_n S[\beta_n T x_n + (1-\beta_n) x_n] + (1-\alpha_n) x_n,$$

$$0 < a \leq \alpha_n, \quad \beta_n \leq b < 1 \quad (n = 1, 2, \dots)$$

で定義される点列 $\{x_n\}$ は $F(S) \cap F(T)$ の元に弱収束する.

最近, 厚芝-高橋 [1] は Banach 空間の非拡大半群に対して つぎの弱収束定理を証明している.

定理 4.3 E を一様凸で Fréchet 微分可能なノルムをもつ Banach 空間とし, C を E の閉凸集合とする. $\{S(t):0\le t<\infty\}$ を C 上の $\cap_{t\ge 0}F(S(t))\ne\phi$ となる非拡大半群とし, $\{t_n\}$ を $t_n\to\infty$ となる実数列とする. このとき, $x_1=x\in C$,

$$x_{n+1}=\alpha_n x_n+(1-\alpha_n)\frac{1}{t_n}\int_0^{t_n}S(u)x_n du,\quad 0\le\alpha_n\le a<1\ \ (n=1,2,\ldots),$$

で定義される点列 $\{x_n\}$ は $\cap_{t\ge 0}F(S(t))$ の点に弱収束する.

定理 4.1, 定理 4.2, 定理 4.3 の証明には, Reich[33], 高橋-金 [50] によって証明されたつぎの補助定理が用いられている.

補助定理 4.4 E を一様凸で Fréchet 微分可能なノルムをもつ Banach 空間とし, C を E の閉凸集合とする. $\{T_1,T_2,T_3,\ldots\}$ を C から C への非拡大写像の列とし, $U=\cap_{n=1}^{\infty}F(T_n)\ne\phi$ を仮定する. $x\in C$ とし, $S_n=T_nT_{n-1}\cdots T_1$ $(n=1,2,3,\ldots)$ とするなら, 集合

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}\overline{co}\{S_m x: m\ge n\}\cap U$$

は高々一点からなる.

5 応用

H を Hilbert 空間, $C_1,C_2,\ldots,C_r$ を H の空でない閉凸集合とする. このとき, Hilbert 空間における凸制約問題はつぎの形で述べられるであろう.

original(unknown) image z が $C_1,C_2,\cdots,C_r$ の共通部分 C_0 に属するということが知られているとき、H から C_i への距離射影 P_i のみを使って、z を求めよ。

これはまた最小化問題における制約集合の問題とも関連づけられるし、非線形の連立不等式の解を求める問題とも関連づけられる。

Crombez [8] はこの問題をつぎのような形で解いた。

定理 5.1 $C_1,C_2,\cdots,C_r$ を H の空でない閉凸集合とし、$C_0=\cap_{i=1}^{r}C_i$ は空でないとする。P_i を H から C_i への距離射影とする。また

$$T=\alpha_0 I+\sum_{i=1}^{r}\alpha_i T_i,\quad T_i=I+\lambda_i(P_i-I),$$

$$0<\lambda_i<2,\quad \alpha_i>0,\quad \sum_{i=0}^{r}\alpha_i=1$$

とする。このとき、H の任意の元 x に対して、$\{T^n x\}$ は C_0 の元に弱収束する。

高橋-田村 [53] は この定理を非線形エルゴード理論を用いて Banach 空間の場合まで拡張した.

定理 5.2 E を Fréchet 微分可能なノルムをもつ一様凸な Banach 空間とし、C を E の空でない閉凸集合とする。$C_1,C_2,\ldots,C_r$ を $\cap_{i=1}^{r}C_i\ne\phi$ となる C の 非拡大 retracts とし、

P_i を C から C_i の上への 非拡大 retraction とする。また

$$\begin{aligned} T &= \sum_{i=1}^{r} \alpha_i T_i, \quad 0 < \alpha_i < 1, \quad \sum_{i=1}^{r} \alpha_i = 1, \\ T_i &= (1-\lambda_i)I + \lambda_i P_i, \quad 0 < \lambda_i < 1 \end{aligned}$$

とする。このとき $F(T) = \cap_{i=1}^{r} C_i$ であり、さらに任意の $x \in C$ に対して $\{T^n x\}$ は $F(T)$ の元に弱収束する。

定理 5.2 を証明するにあたって, 高橋-田村 は Bruck[7], Lau-高橋 [26], 高橋-朴 [51] 等によって証明されたつぎの補助定理を用いた.

補助定理 5.3 E を Fréchet 微分可能なノルムをもつ一様凸な Banach 空間とし、C を E の空でない閉凸集合とする。また T を C から C への非拡大写像とする。このとき、任意の $x \in C$ に対して

$$\bigcap_{m=1}^{\infty} \overline{co}\{T^n x : n \geq m\} \cap F(T)$$

は高々一点集合からなる。

一方, 下地-高橋 [52], 厚芝-高橋 [2] は, Crombez[8] や高橋-田村 [53] とは違う形の不動点近似法によって凸制約問題を研究した. 彼らの定理を述べる前に, その問題を解くために重要となるある写像を定義しよう。C を Banach 空間 E の閉凸集合とし、$T_1, T_2, \ldots, T_r$ を C 上の写像とする。また、$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ を $0 \leq \alpha_i \leq 1 \ (i = 1, 2, \ldots, r)$ となる実数とする。このとき、つぎのように定義される写像 W は $T_1, T_2, \ldots, T_r$ と $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ によって生成される W 写像といわれる [52].

$$\begin{aligned} S_1 x &= \alpha_1 T_1 x + (1-\alpha_1)x, \\ S_2 x &= \alpha_2 T_2 S_1 x + (1-\alpha_2)x, \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ S_{r-1} x &= \alpha_{r-1} T_{r-1} S_{r-2} x + (1-\alpha_{r-1})x, \\ W x &= \alpha_r T_r S_{r-1} x + (1-\alpha_r)x. \end{aligned}$$

定理 5.4 E を狭義凸な Banach 空間とし、C を E の閉凸集合とする. $T_1, T_2, \ldots, T_r$ を $\cap_{i=1}^{r} F(T_i) \neq \phi$ となる C 上の非拡大写像とし, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ を $0 < \alpha_i < 1 \ (i = 1, 2, \ldots, r-1)$, $0 < \alpha_r \leq 1$ となる実数とする. W を $T_1, T_2, \ldots, T_r$ と $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ によって生成される W 写像とする. このとき

$$F(W) = \bigcap_{i=1}^{r} F(T_i)$$

が成り立つ.

下地-高橋 [52] は 補助定理 4.4 と定理 5.4 を用いてつぎの定理を証明した.

定理 5.5 E を一様凸で, Fréchet 微分可能なノルムをもつ Banach 空間とし、C を E の閉凸集合とする. $T_1, T_2, \ldots, T_r$ を $\cap_{i=1}^{r} F(T_i) \neq \phi$ となる C 上の非拡大写像とし, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$

を $0 < \alpha_i < 1$ $(i = 1, 2, \ldots, r-1)$, $0 < \alpha_r \leq 1$ となる実数とする．W を $T_1, T_2, \ldots, T_r$ と $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ によって生成される W 写像とする．このとき、任意の $x \in C$ に対して, $\{W^n x\}$ は $\cap_{i=1}^{r} F(T_i)$ の元に弱収束する．

この定理を凸制約問題に応用するとつぎの形になる．

定理 5.6 E を一様凸で, Fréchet 微分可能なノルムをもつ Banach 空間とし、C を E の閉凸集合とする．$C_1, C_2, \ldots, C_r$ を $\cap_{i=1}^{r} C_i \neq \phi$ となる非拡大 retracts とし、$P_i (i = 1, 2, \ldots, r)$ を C から C_i への非拡大 retractions とする．また$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ を $0 < \alpha_i < 1$ $(i = 1, 2, \ldots, r-1)$, $0 < \alpha_r \leq 1$ となる実数とする．W を $P_1, P_2, \ldots, P_r$ と $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ によって生成される W 写像とする．このとき任意の $x \in C$ に対して $\{W^n x\}$ は $\cap_{i=1}^{r} C_i$ の元に弱収束する。

これに対して, 厚芝-高橋 [2] は, 定理 3.4 と 定理 5.4 を用いてつぎの定理を証明した．

定理 5.7 E を一様凸で, 一様 Gâteaux 微分可能なノルムをもつ Banach 空間とし, C を E の閉凸集合とする．$T_1, T_2, \ldots, T_r$ を $\cap_{i=1}^{r} F(Ti) \neq \phi$ となる C 上の非拡大写像とし, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ を $0 < \alpha_i < 1$ $(i = 1, 2, \ldots, r-1)$, $0 < \alpha_r \leq 1$ となる実数とする．W を $T_1, T_2, \ldots, T_r$ と $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ によって生成される W 写像とする．このとき, 任意の $x_1 = x \in C$ に対して

$$x_{n+1} = \beta_n x + (1 - \beta_n) W x_n \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

$$0 \leq \beta_n \leq 1, \quad \lim_{n \to \infty} \beta_n = 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |\beta_{n+1} - \beta_n| < \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n = \infty$$

で定義される点列 $\{x_n\}$ は $\cap_{i=1}^{r} F(T_i)$ の点 z に強収束する．ここで, $Px = z$ とすると, P は C から $\cap_{i=1}^{r} F(T_i)$ の上へのサニー非拡大 retraction である．

この定理を凸制約問題に応用するとつぎの形になる．

定理 5.8 E を 一様凸で, 一様 Gâteaux 微分可能なノルムをもつ Banach 空間とし, C を E の閉凸集合とする．$C_1, C_2, \ldots, C_r$ を $\cap_{i=1}^{r} C_i \neq \phi$ となる C の非拡大 retracts とし, $P_1, P_2, \ldots, P_r$ をそれぞれ C から $C_1, C_2, \ldots, C_r$ の上への非拡大 retractions とする．$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ を $0 < \alpha_r < 1$ $(i = 1, 2, \ldots, r-1)$, $0 < \alpha_r \leq 1$ となる実数とし, W を $P_1, P_2, \ldots, P_r$ と$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ によって生成される W 写像とする．このとき, 任意の $x_1 = x \in C$ に対して

$$x_{n+1} = \beta_n x + (1 - \beta_n) W x_n \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

$$0 \leq \beta_n \leq 1, \quad \lim_{n \to \infty} \beta_n = 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |\beta_{n+1} - \beta_n| < \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n = \infty$$

で定義される点列 $\{x_n\}$ は $\cap_{i=1}^{r} C_i$ の点 z に強収束する．ここで, $Px = z$ とする, P は C から $\cap_{i=1}^{r} C_i$ の上へのサニー非拡大 retraction である．

この節の最後に, $\cap_{i=1}^{r} C_i = \phi$ の場合の定理を 2 つあげておく．

定理 5.9 E を 回帰的な Banach 空間とし, C は 正規構造をもつ E の閉凸集合とする．$C_1, C_2, \ldots, C_r$ を C の空でない有界な非拡大 retracts とし, $P_1, P_2, \ldots, P_r$ をそれぞれ

C から $C_1, C_2, \ldots, C_r$ の上への非拡大 retractions とする. $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ を $0 < \alpha_i < 1$ $(i = 1, 2, \ldots, r-1)$, $0 < \alpha_r \leq 1$ となる実数とし, W を $P_1, P_2, \ldots, P_r$ と $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ によって生成される W 写像とする. このとき, $F(W) \neq \phi$ である. さらに, E が狭義凸であり, $\cap_{i=1}^r C_i = \phi$ であれば, ある i $(1 \leq i \leq r)$ に対して, $F(W) \cap C_i = \phi$ となる.

$F(W) \neq \phi$ であることの証明には Kirk の不動点定理 [22] が用いられる. 上の定理は制約集合 $\cap_{i=1}^r C_i$ が空であっても, $F(W)$ は空でないことを主張している. つぎの定理を述べる前に 1 つの定義を与えておく. C, D を Banach 空間 E の空でない凸集合とする. このとき, C に関する D の開核 $i_C D$ をつぎのように定義する: $z \in i_C D$ であるとは, $z \in D$ であって, しかもどんな $x \in C$ に対しても, $\lambda x + (1-\lambda) z \in D$ となる $\lambda \in (0, 1)$ が存在するときをいう. また, C に関する D の境界 $\partial_C D$ も定義される: $z \in \partial_C D$ であるとは, $z \in D$ であって, しかも任意の $\lambda \in (0, 1)$ に対して, $\lambda x + (1-\lambda) z \notin D$ となる $x \in C$ が存在するときをいう.

定理 5.10 E を回帰的でかつ狭義凸な Banach 空間とし, C を E の閉凸集合で正規構造をもつものとする. $C_1, C_2, \ldots, C_r$ を C の空でない有界なサニー非拡大 retracts とし, $\partial_C C_i$ の元はすべて, C_i の端点となるものとする. $P_1, P_2, \ldots, P_r$ をそれぞれ C から $C_1, C_2, \ldots, C_r$ の上へのサニー非拡大 retractions とし, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ を $0 < \alpha_i < 1$ $(i = 1, 2, \ldots, r-1)$, $0 < \alpha_r \leq 1$ となる実数とする. W を $P_1, P_2, \ldots, P_r$ と $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ から生成される W 写像とし, $\cap_{i=1}^r C_i = \phi$ とする. このとき, $F(W)$ はただ一点からなる. さらに, E が一様凸であるならば, 任意の $x \in C$ に対して, $\{W^n x\}$ は $F(W)$ の点に弱収束する.

参考文献

1. S. Atsushiba and W. Takahashi, *A weak convergence theorem for nonexpansive semigroups by the Mann iteration process in Banach spaces*, to appear.
2. S. Atsushiba and W. Takahashi, *Strong convergence theorems for a finite family of nonexpansive mappings and applications*, to appear.
3. J. B. Baillon, *Un théorème de type ergodic pour les contraction non linéaires dans un espace de Hilbert*, C. R. Acad. Sci. Paris, 280 (1975), 1511-1514.
4. J. B. Baillon, *Quelques properiétès de convergence asymptotique pour les semigroupes de contractions impaìres*, C. R. Acad. Sci. Paris, 283 (1976), 75-78.
5. R. E. Bruck, *Properties of fixed-point sets of nonexpansive mappings in Banach spaces*, Trans. Amer. Math. Soc., 179 (1973), 251-262.
6. R. E. Bruck, *A common fixed point theorem for a commuting family of nonexpansive mappings*, Pacific J. Math., 53 (1974), 59-71.
7. R. E. Bruck, *A simple proof of the mean ergodic theorem for nonlinear contractions in Banach spaces*, Israel J. Math., 32 (1979), 107-116.
8. G. Crombez, *Image recovery by convex combinations of projections*, J. Math. Anal. Appl., 155 (1991), 413-419.
9. G. Das and J. P. Debata, *Fixed points of quasinonexpansive mappings*, Indian J. Pure Appl. Math., 17 (1986), 1263-1269.
10. M. M. Day, *Amenable semigroups*, Illinois J. Math., 1 (1957), 509-544.
11. M. Edelstein and R. C. O'Brien, *Nonexpansive mappings, asymptotic regularity and successive approximations*, J. London Math. Soc., 17 (1978), 547-554.

12. C. W. Groetsch, *A note on segmenting Mann iterates*, J. Math. Anal. Appl., 40 (1972), 369-372.
13. N. Hirano, K. Kido and W. Takahashi, *The existence of nonexpansive retractions in Banach spaces*, J. Math. Soc. Japan, 38 (1986), 1-7.
14. N. Hirano, K. Kido and W. Takahashi, *Asymptotic behavior of commutative semigroups of nonexpansive mappings in Banach spaces*, Nonlinear Analysis, 10 (1986), 229-249.
15. N. Hirano, K. Kido and W. Takahashi, *Nonexpansive retractions and nonlinear ergodic theorems in Banach spaces*, Nonlinear Analysis, 12 (1988), 1269-1281.
16. N. Hirano and W. Takahashi, *Nonlinear ergodic theorems for nonexpansive mappings in Hilbert space*, Kodai Math. J., 2 (1979), 11-25.
17. N. Hirano and W. Takahashi, *Nonlinear ergodic theorems for an amenable semigroup of nonexpansive mappings in Banach space*, Pacific J. Math., 112 (1984), 333-346.
18. S. Ishikawa, *Fixed points and iteration of a nonexpansive mapping in a Banach space*, Proc. Amer. Math. Soc., 59 (1976), 65-71.
19. O. Kada and W. Takahashi, *Nonlinear ergodic theorems of almost nonexpansive curves for commutative semigroups*, Topol. Methods Nonlinear Anal., 5 (1995), 305-324.
20. O. Kada and W. Takahashi, *Strong convergence and nonlinear ergodic theorems for commutative semigroups of nonexpansive mappings*, Nonlinear Analysis, 28 (1997), 495-511.
21. O. Kada, A. T. Lau and W. Takahashi, *Asymptotically invariant net and fixed point set for semigroup of nonexpansive mappings*, Nonlinear Analysis, 29 (1997), 539-550.
22. W. A. Kirk, *A fixed point theorem for mappings which do not increase distances*, Amer. Math. Monthly, 72 (1965), 1004-1006.
23. S. Kitahara and W. Takahashi, *Image recovery by convex combinations of sunny nonexpansive retractions*, Topol. Methods Nonlinear Analysis, 2 (1993), 333-342.
24. A. T. Lau, K. Nishiura and W. Takahashi, *Nonlinear ergodic theorems for semigroups of nonexpansive mappings and left ideals*, Nonlinear Analysis, 26 (1996), 1411-1427.
25. A. T. Lau, N. Shioji and W. Takahashi, *Existence of nonexpansive retractions for amenable semigroups of nonexpansive mappings and nonlinear ergodic theorems in Banach spaces*, to appear.
26. A. T. Lau and W. Takahashi, *Weak convergence and non-linear ergodic theorems for reversible semigroups of nonexpansive mappings*, Pacific J. Math., 126 (1987), 277-294.
27. A. T. Lau and W. Takahashi, *Invariant means and fixed point properties for non-expansive representations of topological semigroups*, Topol. Methods Nonlinear Anal., 5 (1995), 39-57.
28. A. T. Lau and W. Takahashi, *Invariant submeans and semigroups of nonexpansive mappings on Banach spaces with normal structure*, J. Functional Analysis. 142 (1996), 79-88.
29. G. Li, *Weak convergence and non-linear ergodic theorems for reversible semigroups of non-Lipschitzian mappings*, J. Math. Anal. Appl., 206 (1997), 451-464.
30. W. R. Mann, *Mean value methods in iteration*, Proc. Amer. Math. Soc., 4 (1953), 506-510.
31. N. Mizoguchi and W. Takahashi, *On the existence of fixed points and ergodic retractions for Lipschitzian semigroups in Hilbert spaces*, Nonlinear Analysis, 14 (1990), 69-80.
32. Z. Opial, *Weak convergence of the sequence of successive approximations for nonexpansive mappings*, Bull. Amer. Math. Soc., 73 (1967), 591-597.
33. S. Reich, *Weak convergence theorems for nonexpansive mappings in Banach spaces*, J. Math. Anal. Appl., 67 (1979), 274-276.
34. S. Reich, *Strong convergence theorem for resolvents of accretive operators*, J. Math. Anal. Appl., 75 (1980), 287-292.
35. G. Rodé, *An ergodic theorem for semigroups of nonexpansive mappings in a Hilbert space*, J. Math. Anal. Appl., 85 (1982), 172-178.

36. J. Schu, *Weak and strong convergence to fixed points of asymptotically nonexpansive mappings*, Bull. Austral. Math. Soc., 43 (1991), 153-159.
37. T. Shimizu and W. Takahashi, *Strong convergence to common fixed points of families of nonexpansive mappings*, J. Math. Anal. Appl., 211 (1997), 71-83.
38. N. Shioji and W. Takahashi, *Strong convergence of approximated sequences for nonexpansive mappings in Banach spaces*, Proc. Amer. Math. Soc., 125 (1997), 3641-3645.
39. N. Shioji and W. Takahashi, *Strong convergence theorems for continuous semigroups in Banach spaces*, to appear in Math. Japonica.
40. N. Shioji and W. Takahashi, *Strong convergence theorems for asymptotically nonexpansive semigroups in Banach spaces*, to appear.
41. W. Takahashi, *Fixed point theorem for amenable semigroups of non-expansive mappings*, Kōdai Math. Sem. Rep., 21 (1969), 383-386.
42. W. Takahashi, *Recent results in fixed point theory*, SEA Bull. Math., 4 (1981), 59-85.
43. W. Takahashi, *A nonlinear ergodic theorem for an amenable semigroup of nonexpansive mappings in a Hilbert space*, Proc. Amer. Math. Soc., 81 (1981), 253-256.
44. W. Takahashi, *Fixed point theorems for families of nonexpansive mappings on unbounded sets*, J. Math. Soc. Japan., 36 (1984), 543-553.
45. W. Takahashi, *A nonlinear ergodic theorem for a reversible semigroup of nonexpansive mappings in a Hilbert space*, Proc. Amer. Math. Soc., 96 (1986), 55-58.
46. W. Takahashi, *Nonlinear Functional Analysis (Japanese)*, Kindai-kagakusha, Tokyo, 1988.
47. W. Takahashi, *Fixed point theorem and nonlinear ergodic theorem for nonexpansive semigroups without convexity*, Can. J. Math., 44 (1992), 880-887.
48. W. Takahashi, *Fixed point theorems and nonlinear ergodic theorems for nonlinear semigroups and their applications*, Nonlinear Analysis, 30 (1997), 1283-1293.
49. W. Takahashi and D. H. Jeong, *Fixed Point theorem for nonexpansive semigroups on Banach space*, Proc. Amer. Math. Soc., 122 (1994), 1175-1179.
50. W. Takahashi and G. E. Kim, *Approximating fixed points of nonexpansive mappings in Banach spaces*, Math. Japonica, 48 (1998), 1-9.
51. W. Takahashi and J. Y. Park, *On the asymptotic behavior of almost orbits of commutative semigroups in Banach spaces*, in Nonlinear and Convex Analysis (B. L. Lin and S. Simons, Eds.), Lecture Notes in Pure and Appl. Math., Marcel Dekker, Inc., New York, 1987, 271-293.
52. W. Takahashi and K. Shimoji, *Convergence theorems for nonexpansive mappings and feasibility problems*, to appear in Mathematical and Computer Modelling.
53. W. Takahashi and T. Tamura, *Limit theorems of operators by convex combinations of nonexpansive retractions in Banach spaces*, J. Approximation Theory, 91 (1997), 386-397.
54. W. Takahashi and T. Tamura, *Convergence theorems for a pair of nonexpansive mappings*, J. Convex Analysis, 5 (1998), 45-56.
55. W. Takahashi and Y. Ueda, *On strong convergence theorem for resolvents of accretive operators*, J. Math. Anal. Appl., 104 (1984), 546-553.
56. K. K. Tan and H. K. Xu, *Approximating fixed points of nonexpansive mappings by the Ishikawa iteration process*, J. Math. Anal. Appl., 178 (1993), 301-308.
57. R. Wittmann, *Approximation of fixed points of nonexpansive mappings*, Arch. Math., 58 (1992), 486-491.