数理解析研究所講究録
1069 巻 1998 年 113-118

一般の等質錐の閉包の軌道分解と Riesz 超函数の positivity

京大・理　伊師英之 (Hideyuki ISHI)

§1. 準備.

実 vector 空間 V の中の等質錐 Ω に分裂型可解 Lie 群 $H \subset \mathrm{GL}(V)$ が単純推移的に作用しているとする. このとき群 $G := V \rtimes H$ の Tube 型 Siegel 領域 $D := V + i\Omega \subset V_{\mathbb{C}}$ への作用を次のように定義する. すなわち $g = (a,t) \in G$ $(a \in V, t \in H)$ と $w = u + iv \in D$ $(u \in V, v \in \Omega)$ について $g \cdot w := a + t \cdot u + it \cdot v \in D$ とする. この作用は単純推移的であるから, 1 点 $iE \in D$ $(E \in \Omega)$ を固定することにより微分同相

$$G \ni g = (a,t) \mapsto g \cdot iE = a + it \cdot E \in D$$

が得られる. 群 H の Lie 代数を $\mathfrak{h} \subset \mathrm{End}(V)$, 群 G の Lie 代数 $\mathfrak{g} = V \rtimes \mathfrak{h}$ とすると上の写像を微分して線形同型

$$\mathfrak{g} \ni (x,T) \mapsto x + iT \cdot E \in T_{iE}D = V_{\mathbb{C}}$$

が得られるが, この同型によって接空間 $T_{iE}D$ 上の Bergman 計量を引き戻すことにより $\mathfrak{g}$ 上の内積 $(\cdot|\cdot)_{\mathfrak{g}}$ を定義する. この内積に関する $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}] \subset \mathfrak{g}$ の直交補空間を $\mathfrak{a}$ とすると, $\mathfrak{a}$ は $\mathfrak{h}$ の可換部分代数である. このとき等質 Siegel 領域と正規 j 代数に関する Pyatetskii-Shapiro の理論 ([5] 参照) を応用して $\mathfrak{a}$ による $\mathfrak{g} = V \oplus \mathfrak{h}$ の "root 分解" が考えられる. すなわち $\mathfrak{a}$ 上の線形形式 α について

$$\mathfrak{g}_{\alpha} := \{\, Y \in \mathfrak{g} \,|\, [C, Y] = \alpha(C)Y \text{ for all } C \in \mathfrak{a} \,\}$$

とすると, 次の命題が成り立つ.

命題 1. (i) ある $\mathfrak{a}$ の基底 $A_1, \ldots, A_r$ $(r := \dim \mathfrak{a})$ が存在して $(\{\alpha_1, \ldots, \alpha_r\} \subset \mathfrak{a}^*$ をその双対基底とする), $\mathfrak{h}$ と V は 次のように分解される：

$$\mathfrak{h} = \mathfrak{a} \oplus \left(\sum_{1 \le k < m \le r}^{\oplus} \mathfrak{g}_{(\alpha_m - \alpha_k)/2} \right),$$

$$V = \left(\sum_{k=1}^{r}{}^{\oplus} \mathbb{R}E_k \right) \oplus \left(\sum_{1 \le k < m \le r}^{\oplus} \mathfrak{g}_{(\alpha_m + \alpha_k)/2} \right), \tag{1}$$

ただし $E_k := A_k \cdot E \in V$.

(ii) $1 \le k, l \le r$ について $A_k \cdot E_l = \delta_{kl} E_l$, よって $\mathfrak{g}_{\alpha_k} = \mathbb{R}E_k$. また $E = E_1 + \cdots + E_r$.

この命題と関係式$[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \subset \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$ を基礎にして H の V への作用が詳しく研究できるが, その結果を次の節で述べる.

§2. 群作用の記述と $\overline{\Omega}$ の軌道分解.

正数 t_{kk} $(1 \le k \le r)$ と $T_{mk} \in \mathfrak{g}_{(\alpha_m-\alpha_k)/2}$ $(1 \le k < m \le r)$ について $T_{kk} := (2\log t_{kk})A_k$ $(1 \le k \le r)$, $L_k := \sum_{m>k} T_{mk}$ $(1 \le k \le r-1)$ とし,

$$\begin{pmatrix} t_{11} & & & \\ T_{21} & t_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ T_{r1} & T_{r2} & & t_{rr} \end{pmatrix} := \exp T_{11} \exp L_1 \exp T_{22} \dots \exp L_{r-1} \exp T_{rr} \in H \tag{2}$$

とする.

命題 2. (i) 任意の H の元は唯一通りに (2) の形に表示される.
(ii) 群 H の積公式は次のように記述される：

$$\begin{pmatrix} t_{11} & & & \\ T_{21} & t_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ T_{r1} & T_{r2} & & t_{rr} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t'_{11} & & & \\ T'_{21} & t'_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ T'_{r1} & T'_{r2} & & t'_{rr} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t''_{11} & & & \\ T''_{21} & t''_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ T''_{r1} & T''_{r2} & & t''_{rr} \end{pmatrix},$$

ただし

$$\begin{aligned} t''_{kk} &= t_{kk}t'_{kk} \quad (1 \le k \le r), \\ T''_{mk} &= t_{mm}T'_{mk} + \sum_{k<l<m} [T_{ml}, T'_{lk}] + t'_{kk}T_{mk} \quad (1 \le k < m \le r). \end{aligned}$$

この積公式は関係式 $\exp T_1 \cdot \exp T_2 = \exp[\mathrm{Ad}(\exp T_1)T_2] \cdot \exp T_1$ $(T_1, T_2 \in \mathfrak{h})$ を繰り返し使うことによって得られる. 以後とくに断らない限り, H の元 t は t_{kk}, T_{mk} によって (2) の形に表示されているものとする. 2^r 個の $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r) \in \{0,1\}^r$ について $E_\varepsilon := \sum_{k=1}^r \varepsilon_k E_k \in V$ とし, E_ε を通る V の中の H-軌道を $\mathcal{O}_\varepsilon$ とする ($\varepsilon = (1, \dots, 1)$ のとき $E_\varepsilon = E$, $\mathcal{O}_\varepsilon = \Omega$ であることに注意).

命題 3. 軌道 $\mathcal{O}_\varepsilon$ の元 $t \cdot E_\varepsilon \in V$ $(t \in H)$ を (1) に従って $t \cdot E_\varepsilon = \sum_{k=1}^r x_{kk}E_k + \sum_{m>k} X_{mk}$ $(x_{kk} \in \mathbb{R}, X_{mk} \in \mathfrak{g}_{(\alpha_m+\alpha_k)/2})$ と分解すると

$$\begin{aligned} x_{kk} &= \varepsilon_k(t_{kk})^2 + \sum_{i<k} \varepsilon_i \|T_{ki}\|^2 \quad (1 \le k \le r), \\ X_{mk} &= \varepsilon_k t_{kk} T_{mk} \cdot E_k + \sum_{i<k} \varepsilon_i T_{mi} T_{ki} \cdot E_i \quad (1 \le k < m \le r) \end{aligned}$$

が成り立つ．ただし

$$\|T_{ki}\|^2 := \frac{(T_{ki}|T_{ki})_{\mathfrak{g}}}{2(A_k|A_k)_{\mathfrak{g}}}.$$

V の元 $\sum x_{kk}E_k + \sum_{m>k} X_{mk}$ を

$$\begin{pmatrix} x_{11} & X_{21} & \dots & X_{r1} \\ X_{21} & x_{22} & & X_{r2} \\ \vdots & & \ddots & \\ X_{r1} & X_{r2} & & x_{rr} \end{pmatrix}$$

と対称行列で表すと，命題 3 は形式的に次のようにかける：

$$\begin{pmatrix} x_{11} & & X_{r1} \\ & \ddots & \\ X_{r1} & & x_{rr} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{11} & & \\ & \ddots & \\ T_{r1} & & t_{rr} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \varepsilon_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_{11} & & T_{r1} \\ & \ddots & \\ & & t_{rr} \end{pmatrix}$$

命題 2 及び命題 3 のように群演算や群作用を形式的に行列で表すことは Vinberg [6] からヒントを得た ([2] も参照). Vinberg の理論が V 上に定義される left-symmetric algebra とよばれる非結合的代数の構造を基礎にしているのに対し，Lie 代数 $V \rtimes \mathfrak{h}$ の構造を使った我々の定式化は比較的単純だといえる．

写像 $\pi_\varepsilon : H \to H$ を

$$\begin{pmatrix} t_{11} & & & \\ T_{21} & t_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ T_{r1} & T_{r2} & & t_{rr} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} (t_{11})^{\varepsilon_1} & & & \\ \varepsilon_1 T_{21} & (t_{22})^{\varepsilon_2} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ \varepsilon_1 T_{r1} & \varepsilon_2 T_{r2} & & (t_{rr})^{\varepsilon_r} \end{pmatrix}$$

で定義し，その像 $\pi_\varepsilon(H) \subset H$ を $H(\mathcal{O}_\varepsilon)$ とする．一般に π_ε は群準同型とは限らないが，$H(\mathcal{O}_\varepsilon)$ は常に H の部分群であることが命題 2 (ii) からわかる．

命題 4. (i) 任意の $t \in H$ について $t \cdot E_\varepsilon = \pi_\varepsilon(t) \cdot E_\varepsilon$.
(ii) 群 $H(\mathcal{O}_\varepsilon)$ は H-軌道 $\mathcal{O}_\varepsilon$ に単純推移的に作用する．

命題 4 (ii) は写像 $H(\mathcal{O}_\varepsilon) \ni t \mapsto t \cdot E_\varepsilon \in \mathcal{O}_\varepsilon$ が微分同相であることを意味する．

この節の終わりに，我々の主結果の 1 つである $\overline{\Omega}$ の軌道分解について述べる．

定理 1. 等質錐 Ω の閉包 $\overline{\Omega}$ は $\overline{\Omega} = \bigsqcup_{\varepsilon \in \{0,1\}^r} \mathcal{O}_\varepsilon$ と H-軌道分解される．

§3. Riesz 超函数とその positivity.

パラメーター $s=(s_1,\cdots s_r)\in\mathbb{C}^r$ について H の 1 次元表現 χ_s を

$$\chi_s:\begin{pmatrix} t_{11} & & & \\ T_{21} & t_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ T_{r1} & T_{r2} & & t_{rr}\end{pmatrix}\mapsto (t_{11})^{2s_1}(t_{22})^{2s_2}\cdots(t_{rr})^{2s_r}.$$

によって定義し, Ω 上の函数 Δ_s を $\Delta_s(t\cdot E):=\chi_s(t)$ $(t\in H)$ で定める. 錐 Ω 上の H-不変測度を μ とし, $p_k:=\sum_{i=1}^{k-1}\dim\mathfrak{g}_{(\alpha_k-\alpha_i)/2}$ とする. V 上の 急減小函数 φ と $\Re s_k>p_k/2$ $(k=1,\ldots,r)$ となる $s\in\mathbb{C}^r$ について, 積分

$$\langle\mathcal{R}_s,\varphi\rangle:=\frac{1}{\prod_{k=1}^r\Gamma(s_k-p_k/2)}\int_\Omega\varphi(x)\Delta_s(x)\,d\mu(x)$$

は絶対収束するが, 右辺は s の整函数として $\mathbb{C}^r$ 全体に解析接続でき (積分の原点での singularity を Γ-factor が打ち消している), それによって任意の $s\in\mathbb{C}^r$ について緩増加超函数 $\mathcal{R}_s$ が定義できる. この $\mathcal{R}_s$ を Riesz 超函数とよぶ. 一般に Riesz 超函数は $\overline{\Omega}$ 上の複素測度と微分作用素との合成であり, H-相対不変性を持つ:

$$\langle\mathcal{R}_s,\varphi(t^{-1}\cdot)\rangle=\chi_s(t)\cdot\langle\mathcal{R}_s,\varphi\rangle\qquad(t\in H).\tag{3}$$

Riesz 超函数 $\mathcal{R}_s$ が正の測度となるようなパラメーター s の集合 (Gindikin-Wallach 集合) Ξ は Gindikin [3] によって決定されている. ただし Gindikin による Ξ の記述は大変複雑であり, $s\in\Xi$ のときの $\mathcal{R}_s$ の具体的な構造も positive であること以外はこれまで未知であった. この節では, 定理 1 で述べた $\overline{\Omega}$ の H-軌道分解と関連させて Ξ の構造を解明し, 同時に全ての positive な $\mathcal{R}_s$ の明示的な表示を与える.

まず $\varepsilon=(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_r)\in\{0,1\}^r$ について群 $H(\mathcal{O}_\varepsilon)$ の左 Haar 測度を orbit map $H(\mathcal{O}_\varepsilon)\ni t\mapsto t\cdot E_\varepsilon\in\mathcal{O}_\varepsilon$ によって移した $\mathcal{O}_\varepsilon$ 上の測度を μ_ε とし, 整数 $p_k(\varepsilon)$ $(k=1,\ldots,r)$ を $p_k(\varepsilon):=\sum_{i=1}^{k-1}\varepsilon_i\dim\mathfrak{g}_{(\alpha_k-\alpha_i)/2}$ で定める. 命題 2 (ii) の積公式から $H(\mathcal{O}_\varepsilon)$ の左 Haar 測度を計算することにより, 定数倍を除いて

$$d\mu_\varepsilon(t\cdot E_\varepsilon):=\prod_{\varepsilon_k=1}(t_{kk})^{-p_k(\varepsilon)-1}\,dt_{kk}\prod_{\varepsilon_k=1,\,m>k}dT_{mk}\quad(t\in H(\mathcal{O}_\varepsilon))$$

が成り立つことがわかる. 測度 μ_ε は次のような H-相対不変性を持つ: 任意の $t\in H$ と $x\in\mathcal{O}_\varepsilon$ について

$$d\mu_\varepsilon(t\cdot x)=\prod_{\varepsilon_k=0}(t_{kk})^{p_k(\varepsilon)}\cdot d\mu_\varepsilon(x).\tag{4}$$

軌道 $\mathcal{O}_\varepsilon$ 上の函数 Δ_s^ε ($s \in \mathbb{C}^r$, ただし $\varepsilon_i = 0$ のとき $s_i = 0$) を $\Delta_s^\varepsilon(t{\cdot}E_\varepsilon) := \chi_s(t)$ ($t \in H(\mathcal{O}_\varepsilon)$) で定義すると

$$\Delta_s^\varepsilon(t \cdot x) = \prod_{\varepsilon_k=1} (t_{kk})^{2s_k} \cdot \Delta_s^\varepsilon(x) \quad (t \in H,\, x \in \mathcal{O}_\varepsilon) \tag{5}$$

が成り立つ. (4) と (5) から, $\varepsilon_k = 0$ のとき $s_k = p_k(\varepsilon)/2$ となる $s \in \mathbb{C}^r$ について

$$\Delta_{\varepsilon \cdot s}^\varepsilon(t \cdot x)\, d\mu_\varepsilon(t \cdot x) = \chi_s(t) \cdot \Delta_{\varepsilon \cdot s}^\varepsilon(x)\, d\mu_\varepsilon(x) \qquad (t \in H,\, x \in \mathcal{O}_\varepsilon) \tag{6}$$

であることがわかり (ただし $\varepsilon \cdot s := (\varepsilon_1 s_1, \dots, \varepsilon_r s_r) \in \mathbb{C}^r$), しかも軌道 $\mathcal{O}_\varepsilon$ 上の任意の H-相対不変測度はこのような $\Delta_{\varepsilon \cdot s}^\varepsilon\, d\mu_\varepsilon$ の定数倍という形で表される.

パラメーター s の集合 $\Xi(\varepsilon)$ ($\varepsilon \in \{0,1\}^r$) を

$$\Xi(\varepsilon) := \{\, s \in \mathbb{R}^r \mid s_k > p_k(\varepsilon)/2 \ (\text{if } \varepsilon_k = 1),\ s_k = p_k(\varepsilon)/2 \ (\text{if } \varepsilon_k = 0) \,\}$$

によって定めると, 我々の結論は次のように述べられる.

定理 2. (i) $s \in \Xi(\varepsilon)$ のとき $\mathcal{R}_s$ は次のように記述される $\mathcal{O}_\varepsilon$ 上の H-相対不変測度である：

$$d\mathcal{R}_s = \frac{c_\varepsilon}{\prod_{\varepsilon_k=1} \Gamma(s_k - p_k(\varepsilon)/2)} \Delta_{\varepsilon \cdot s}^\varepsilon\, d\mu_\varepsilon, \tag{7}$$

ただし c_ε は測度 μ と μ_ε の normalization のみに依存する定数である.
(ii) Gindikin-Wallach 集合 Ξ は $\Xi = \bigsqcup_{\varepsilon \in \{0,1\}^r} \Xi(\varepsilon)$ と分解される. すなわち Riesz 超函数 $\mathcal{R}_s$ が正の測度となる必要十分条件は, いずれかの軌道 $\mathcal{O}_\varepsilon$ 上の測度として (7) の形に表されることである.

定数 c_ε は μ と μ_ε の normalization を適当に定めれば, 具体的に計算できる.

最後に $\Xi(\varepsilon)$ の意味について触れておく. まず (3) と (6) からわかるように, 条件 $s_k = p_k(\varepsilon)/2$ (if $\varepsilon_k = 0$) は (7) の両辺が同一の H-相対不変性をもつことを示す. そして条件 $s_k > p_k(\varepsilon)/2$ (if $\varepsilon_k = 1$) は右辺の定める超函数の原点における regularity のために必要である.

参考文献

[1] J. Faraut and A. Korányi, Analysis on symmetric cones, Oxford Mathematical Monographs, Clarendon Press, Oxford, 1994.

[2] S. G. Gindikin, Analysis in homogeneous domains, Russian Math. Surveys, **19** (1964), 1–89.

[3] —, Invariant generalized functions in homogeneous domains, Funct. Anal. Appl., **9** (1975), 50–52.

[4] H. Ishi, Positive Riesz distributions on homogeneous cones, preprint, 1998.

[5] I. I. Pyatetskii-Shapiro, Automorphic functions and the geometry of classical domains, Gordon and Breach, New York, 1969.

[6] E. B. Vinberg, The theory of convex homogeneous cones, Trans. Moscow Math. Soc., **12** (1963), 340–403.