数理解析研究所講究録
1069巻 1998年 119-139

パラケーラー等質空間とリー環の双偏極

上智大・理工　金行壮二 (Soji KANEYUKI)

§0. パラ複素構造なるもの

実数体$\mathbb{R}$上の(単位元をもつ)組成代数はHurwitzにより分類されていて，次の2つの系列に分かれる．

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R} \arrow[r] \arrow[dr] & \mathbb{C} \arrow[r] \arrow[dr] & \mathbb{H} \arrow[r] \arrow[dr] & \mathbb{O} & (\text{division 系列}), \\
 & \mathbb{C}' \arrow[r] & \mathbb{H}' \arrow[r] & \mathbb{O}' & (\text{split 系列}).
\end{tikzcd}$$

$\mathbb{C}'$, $\mathbb{H}'$, $\mathbb{O}'$は夫々パラ複素数環，パラ4元数環，パラ8元数環，又は対応するdivision系列のものに"splitした"という形容詞をつけて呼ばれる．周知の様にdivision系列の各々には幾何構造が対応している(複素構造，4元数構造…)．同様にsplit系列の各々にも幾何構造が対応する筈である．これはP. Libermann [10]により初めて考えられた．パラ複素構造とは$\mathbb{C}'$に対応する幾何構造である．Poincaréは著書「科学と仮説」の中で，2次元の三つの標準的幾何(楕円的，

ユークリッド的及び双曲的）の他に"オ4の幾何"—— 一葉双曲面上の $SL(2;\mathbb{R})$ の作用で与えられる幾何 —— を提唱している．これは勿論ローレンツ幾何であるが，この場合ローレンツ計量の null cone field は2つの直線場（~~母線族~~）に split しており，パラ複素幾何の2次元モデルになっている．

§1. 一葉双曲面上のパラ複素幾何

$\mathcal{H}$ を $\mathbb{R}^3$ 内で $x_1^2+x_2^2-x_3^2=1$ で定義される一様双曲面としよう．$\mathcal{H}$ は線織面で2つの母線族を持つ．$\mathcal{H}$ の開被覆 $\{U, \overline{U}\}$ を

$$U=\mathcal{H}-\{(x_1,0,x_3)\in\mathcal{H}\ ;\ x_1>0\},$$
$$\overline{U}=\mathcal{H}-\{(x_1,0,x_3)\in\mathcal{H}\ ;\ x_1<0\}$$

とする．

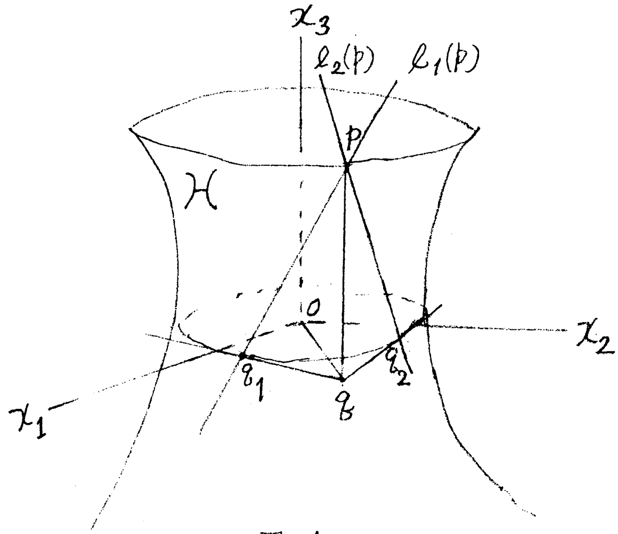


図 1

U の一点 $p=(x_1,x_2,x_3)$ から x_1x_2 平面に下した垂線の足を q とし，q から円周 $x_1^2+x_2^2=1$ へ引いた接線の接点を q_1, q_2 とする．この時 p を通る $\mathcal{H}$ の2つの母線 $\ell_1(p), \ell_2(p)$ は夫々 q_1, q_2 を通る．そして3つの線分 pq, qq_1, qq_2 は長さが等しい．半直線 $x_1>0$ を基線とする動径 $0q$ の

偏角をu，pのx_3座標をvとすると(u,v)はU上の局所座標系になり

$$\begin{cases} x_1 = \sqrt{1+v^2}\cos u \\ x_2 = \sqrt{1+v^2}\sin u \\ x_3 = v \end{cases}$$

が成立つ．同様に$\overline{U}$内の点$\overline{p}$の局所座標系$(\overline{u},\overline{v})$が定義される．この場合は半直線$x_1<0$を基線として動径$O\overline{g}$ ($\overline{g}$は$\overline{p}$から下した垂線の足）の偏角を計ることにする．

$$\begin{cases} x_1 = -\sqrt{1+\overline{v}^2}\cos \overline{u} \\ x_2 = -\sqrt{1+\overline{v}^2}\sin \overline{u} \\ x_3 = \overline{v} \end{cases}$$

が成立つ．$U\cap\overline{U}$上で$du\wedge dv = d\overline{u}\wedge d\overline{v}$が成立っているので$\mathcal{H}$上のシンプレクティック形式$\omega$を

$$\omega = \begin{cases} du\wedge dv & \text{on } U \\ d\overline{u}\wedge d\overline{v} & \text{on } \overline{U} \end{cases}$$

により定義する事が出来る．つまり(u,v)，$(\overline{u},\overline{v})$は$\omega$のDarboux座標系である．シンプレクティック形式ωの別な得られ方を説明しよう．$\mathbb{R}^3$のミンコフスキー計量

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 - dx_3^2 \qquad (1)$$

を考えよう．これは群$SO(2,1)$の$\mathbb{R}^3$への自然な作用で不変である．(1)の定める$\mathbb{R}^3$上のnull cone fieldを$\widetilde{K}$としよう．

$\tilde{K}$はローレンツ錐 $x_1^2+x_2^2-x_3^2=0$ を$\mathbb{R}^3$の各点に平行移動して得られるcone fieldである．ds^2を$\mathcal{H}$上に制限して得られる$\mathcal{H}$上の擬リーマン計量$ds^2_{\mathcal{H}}$（$=g$と略記）は

$$ds^2_{\mathcal{H}} = (1+v^2)\,du^2 - (1+v^2)^{-1}\,dv^2 \tag{2}$$

で与へられる（$\overline{U}$上でも同じ型）．$ds^2_{\mathcal{H}}$のnull cone field Kはds^2のnull cone field $\tilde{K}$を$\mathcal{H}$上に制限したものであり，これは丁度$\mathcal{H}$の2つの母線族と一致している．この母線族$\mathcal{F}^{\pm}$の方程式$ds^2_{\mathcal{H}}=0$は(2)より

$$\mathcal{F}^{\pm}: \quad (1+v^2)\,du \mp dv = 0$$

で与へられる．$\mathcal{F}^{\pm}$をChevalleyの意味のdistributionと見る時は

$$\mathcal{F}^{\pm}: \quad \frac{\partial}{\partial u} \pm (1+v^2)\frac{\partial}{\partial v} \tag{3}$$

で与へられる．これより

$$g(\mathcal{F}^{\pm}, \mathcal{F}^{\pm}) = 0 \qquad (\text{複号同順}) \tag{4}$$

が示される．点$p=(u,v)\in U$に対して，$\mathcal{F}^{\pm}_p$上夫々± 1となる接平面$T_p\mathcal{H}$上の線型変換I_pは(3)より

$$I_p = \begin{pmatrix} 0 & (1+v^2)^{-1} \\ 1+v^2 & 0 \end{pmatrix} \tag{5}$$

で与へられる．かくて$\mathcal{H}$上に(1,1)型テンソル$I=(I_p)_{p\in M}$が定まる．$I^2=1$に注意．ωとgの関係は次の命題（(2),(3),(5)より従う）で与へられる．

命題1.1 $$\omega(X,Y)=g(X,IY), \tag{6}$$
但し X, Y は $\mathcal{H}$ 上の任意のベクトル場である.

(6)は，ケーラー計量と複素構造からケーラー形式を得る仕方と形式的に類似しているので，g をパラケーラー計量と呼ぶ. 次に群 $SL(2,\mathbb{R})$ の $\mathcal{H}$ 上の作用について述べよう. $SO(2,1)$ は2次形式 $x_1^2+x_2^2-x_3^2$ を保つから $\mathcal{H}$ に自然に作用する. $SO(2,1)$ の部分群

$$SO(2)\simeq\left\{\begin{pmatrix}\cos t & -\sin t & 0\\ \sin t & \cos t & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} ; t\in\mathbb{R}\right\} \tag{7}$$

は x_3 軸のまわりの回転であり，部分群

$$SO^0(1,1)\simeq\left\{\begin{pmatrix}\operatorname{ch} t & 0 & \operatorname{sh} t\\ 0 & 1 & 0\\ \operatorname{sh} t & 0 & \operatorname{ch} t\end{pmatrix} ; t\in\mathbb{R}\right\} \tag{8}$$

の，点 $(1,0,0)\in\mathcal{H}$ を通る軌道は双曲線

$$\{(x_1,0,x_3)\in\mathcal{H} ;\ x_1^2-x_3^2=1,\ x_1>0\}$$

である. これより $SO(2,1)$ の単位元の連結成分 $SO^0(2,1)$ は $\mathcal{H}$ に推移的に作用する. 点 $(1,0,0)$ での $SO^0(2,1)$ の固定部分群が $SO^0(1,1)$ に同型なことは容易にわかる. 従って，$\mathcal{H}$ は商空間として，

$$\mathcal{H} = SO^0(2,1)/SO^0(1,1) \tag{9}$$

と表わされる．$SL(2,\mathbb{R})$ から $SO^0(2,1)$ の上への被覆準同型は

$$SL(2,\mathbb{R}) \ni \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} ad+bc & ab-cd & ab+cd \\ ac-bd & \frac{1}{2}(a^2-b^2-c^2+d^2) & \frac{1}{2}(a^2-b^2+c^2-d^2) \\ ac+bd & \frac{1}{2}(a^2+b^2-c^2-d^2) & \frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2+d^2) \end{pmatrix}$$

$$\in SO^0(2,1) \tag{10}$$

で与へられる．これより簡単な計算から $\mathcal{H}$ は

$$\mathcal{H} = SL(2,\mathbb{R})/\mathbb{R}^* \tag{11}$$

と表わされる．但し $\mathbb{R}^*$ は $SL(2,\mathbb{R})$ の対角型部分群である．(11) は $\mathcal{H}$ の対称空間としての表示であることに注意しておこう．図1において円周 $x_1^2+x_2^2=1$ に反時計周りの向きを付けておく．x_1x_2 平面の上側で，この円周の接ベクトルと鋭角で交わる $\mathcal{H}$ の母線族を $\mathcal{L}_1$，鈍角で交わる母線族を $\mathcal{L}_2$ とする．

<u>命題 1.2.</u> $SL(2,\mathbb{R})$ の $\mathcal{H}$ 上の作用は母線族 $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$ の夫々の置換を引起す．即ち $a \in SL(2,\mathbb{R})$，$p \in \mathcal{H}$ に対して，

$$a(l_i(p)) = l_i(a(p)), \qquad i=1,2$$

が成立つ．

<u>証明</u>　$SL(2,\mathbb{R})$ の作用はローレンツ計量 g を保つから

g の null cone field を保つ. 前に注意した様に null cone field は母線族 $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$ である. □

$\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ の元 $e_\pm$ を

$$e_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

とすると, 母線 $l_i(1,0,0) \in \mathcal{L}_i$ $(i=1,2)$ は1径数部分群 $\exp te_\mp$ の $(1,0,0)$ を通る軌道である事が (10) よりわかる:

$$l_1(1,0,0) = (\exp te_-)(1,0,0),$$
$$l_2(1,0,0) = (\exp te_+)(1,0,0).$$

更に (10) より母線 $l_1(1,0,0)$ を保つ $SL(2,\mathbb{R})$ の部分群は

$$P_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & a^{-1} \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{R}) \right\},$$

$l_2(1,0,0)$ を保つ $SL(2,\mathbb{R})$ の部分群は

$$P_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{R}) \right\}$$

である事がわかる. これより次の命題を得る.

<u>命題1.3.</u> $\mathcal{H}$ の母線族 $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$ は商空間として次の様に表わされる:
$$\mathcal{L}_i = SL(2,\mathbb{R})/P_i \qquad (i=1,2)$$
$$\simeq P^1(\mathbb{R}) \ (= 1\text{次元実射影空間}).$$

次に$\mathcal{H}$をSL(2,IR)-同変コンパクト化する事を考えよう．命題1.3の母線族$\mathcal{L}_i$の商空間表示より$\mathcal{L}_i$は1次元実射影空間$P^1(\mathbb{R})=S^1$と同一視される．この同一視は図形的には，母線$l_i(p)\in\mathcal{L}_i$に対してそれが円周$x_1^2+x_2^2=1$と交わる点q_iを対応させる事により与へられる．$\mathcal{H}$から2次元トーラス$S^1\times S^1=T^2$への写像φを（図1を参照）

$$\varphi(p)=(l_1(p),l_2(p))=(q_1,q_2) \tag{12}$$

により定義する．φが単射なる事は容易にわかる．像$\varphi(\mathcal{H})$がT^2のどの部分を占めるかに興味がある．図1の状況をx_1x_2平面上に正射影すると図2の様になる．

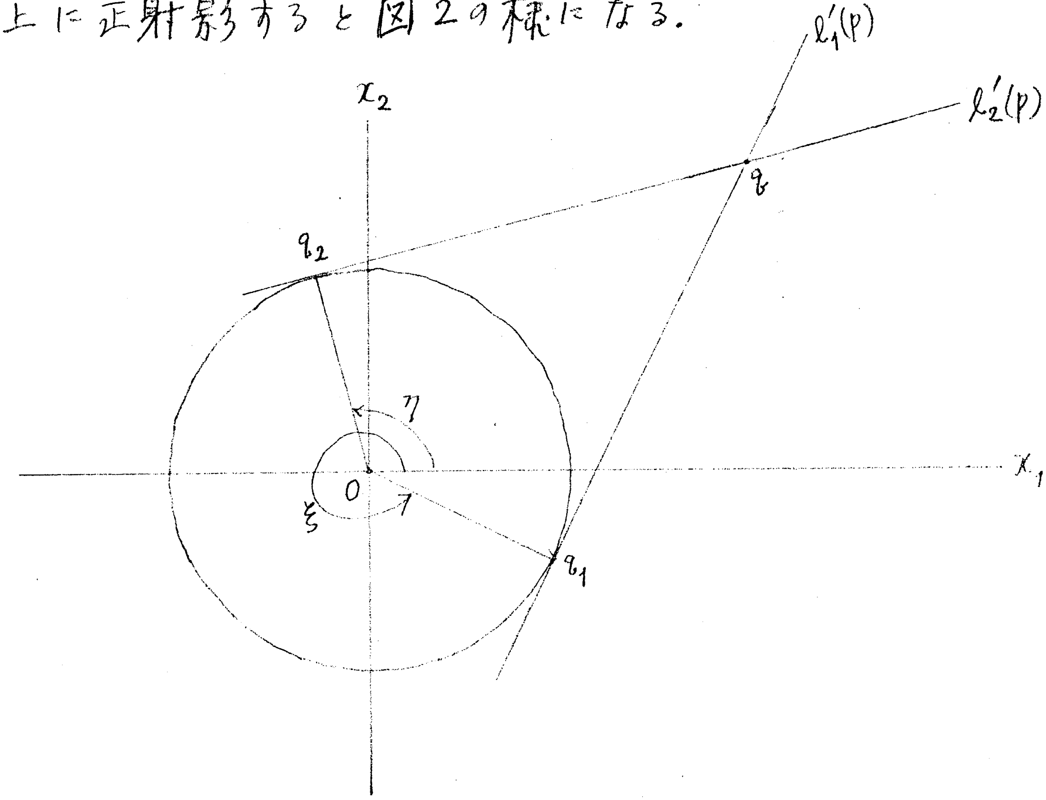


図2

点qは$p\in\mathcal{H}$の正射影，直線$l_i'(p)$は母線$l_i(p)$の正射影であ

る. 動径 Oz_1, Oz_2 の偏角を夫々 ξ, η とし，点 $(z_1, z_2) \in T^2$ を偏角の組 (ξ, η) で表わす. $\mathcal{H}$ の正射影の像は円 $x_1^2+x_2^2=1$ 上及びその外部である. 今点 $p \in \mathcal{H}$ が $\mathcal{H}$ 上で円 $x_1^2+x_2^2=1$ から限りなく遠ざかる時，点 z は原点 O から限りなく遠ざかり直線 $l_1'(p)$, $l_2'(p)$ は限りなく平行な位置に近づく. しかし $l_1'(p)$ と $l_2'(p)$ が平行になる点 p は $\mathcal{H}$ 上には存在しない. これより T^2 内での $\mathcal{H}$ に対する無限遠集合 (i.e. T^2 における $\varphi(\mathcal{H})$ の補集合) は

$$\{(\xi, \eta) \in T^2 : \xi - \eta = \pm \pi\} \tag{13}$$

で与へられる. この様子を $\xi\eta$ 平面に描くと図3の様になる.

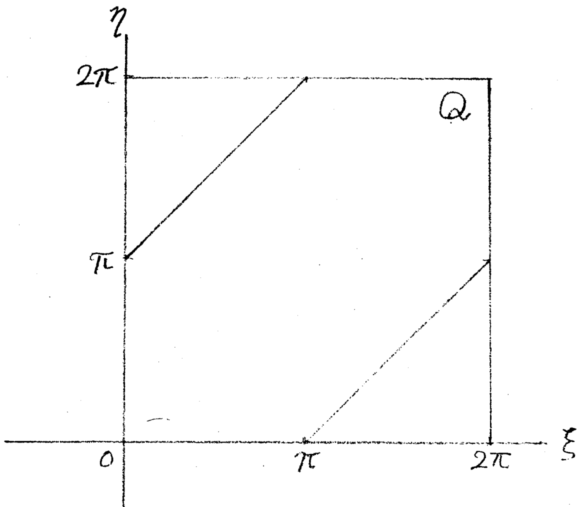


図3

正方形 Q は T^2 の展開図である. 無限遠集合(13)自身は T^2 上の単純閉曲線であり，その展開図は ξ 軸及 η 軸の π を通る勾配1の線分である. 円周 $x_1^2+x_2^2=1$ の展開図は線分 $\xi=\eta$ であり，母線族 $\mathcal{L}_1$ の展開図は直線群 $\xi=$ 定数であり，$\mathcal{L}_2$ の展開図は直線群 $\eta=$ 定数である. 埋込 $\varphi : \mathcal{H} \to T^2$ が $SL(2, \mathbb{R})$ 同変なことは命題1.3から従う. 以上から次の命題が得られる.

命題1.4. T^2 は $\mathcal{H}$ の $SL(2,\mathbb{R})$ 同変コンパクト化であり，埋込 g は $\mathcal{H}$ の母線族 $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$ を T^2 の直積構造の葉体にうつす．無限遠集合(13)は1つの $SL(2,\mathbb{R})$ 軌道である．$\mathcal{H}$ は T^2 内で図4の様な図形として埋込まれている．

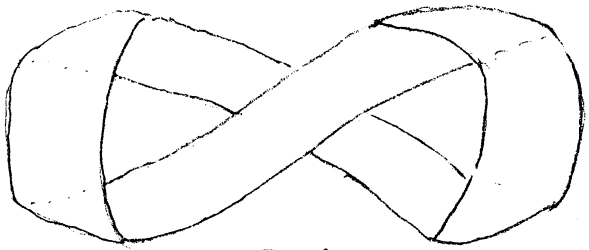


図4

次に Poincaré の双曲平面のパラ複素版を作る事を考えよう．$\mathcal{H}$ の局所座標系 (u,v) と (ξ,η) の間の変換則を求めると

$$\begin{cases} \xi = u - \cos^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{1+v^2}} \\[2ex] \eta = u + \cos^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{1+v^2}} \end{cases}$$

となり，$\mathcal{H}$ のパラケーラー計量 g は

$$g = \sec^2\left(\frac{\xi}{2} - \frac{\eta}{2}\right) d\xi d\eta$$

と表わされる．更に変数変換

$$x = \tan\frac{\xi}{2} \quad , \quad y = -\tan\frac{\eta}{2} \tag{14}$$

を行うと $\mathcal{H}$ の像は xy 平面から双曲線 $1-xy=0$ を除いた集合 $\mathcal{H}^*$ にうつされ，その上で g は

$$g = -\frac{4\,dx\,dy}{(1-xy)^2} \tag{15}$$

と表わされる．双曲線 $1-xy=0$ は無限遠集合(13)の像であ

3. $\mathcal{H}$上の作用とcompatibleな$\mathcal{H}^*$上の$SL(2,\mathbb{R})$の作用は次の様な1次分数変換で与へられる. $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{R})$, $(x,y) \in \mathcal{H}^*$に対して

$$A(x,y) = \left(\frac{dx+c}{bx+a}, \frac{ay+b}{cy+d} \right). \tag{16}$$

$(\mathcal{H}^*, g)$はパラ複素幾何の平面モデルであり, パラPoincaré平面とでもいうべきものである.

§2. パラケーラー多様体

$2n$次元の滑らかな多様体M上に2つのn次元分布$F^\pm$が与へられ, Mの接ベクトル束TMがF^+とF^-のWhitney和になるならば$(M, F^\pm)$を概パラ複素多様体という. この場合Mの各接空間は$\mathbb{C}'$自由加群の構造をもつ. 更に分布$F^\pm$が完全積分可能ならば$(M, F^\pm)$をパラ複素多様体という. 更に$F^\pm$をラグランジュ部分束にする様なMのシンプレクティック形式ωが存在するならば$(M, F^\pm, \omega)$をパラケーラー多様体[10]という. 2つの同次元多様体の直積には勿論パラ複素構造が入るが, これは自明であるという. コンパクトな(非自明な)パラ複素多様体が偶数次元トーラス以外にも存在するか私は知らない. しかしコンパクトな概パラ複素多様体はかなり沢山存在する(松下[11]). 非自明なパラ複素多様体はパラケーラー多様体になるか?

反例はまだ構成されていない．

パラケーラー多様体$(M,F^\pm,\omega)$に対して$TM=F^+\oplus F^-$であるから，M上の$(1,1)$テンソル$I=(I_p)_{p\in M}$を

$$I_p=\begin{cases}+1 & \text{on } F_p^+\\ -1 & \text{on } F_p^-\end{cases} \tag{17}$$

と定義すると$I^2=1$となる．そして$g(X,Y):=\omega(X,IY)$とおくとgはM上の符号数(n,n)の擬リーマン計量になる．これを<u>パラケーラー計量</u>という．

§3. 等質パラケーラー多様体，パラエルミート対称空間

パラケーラー多様体$(M,F^\pm,\omega)$に対して次の2つの自己同型群が考へられる：

$$\mathrm{Aut}(M,F^\pm)=\{\varphi\in \mathrm{Diffeo}(M)\,;\ \varphi_*F^\pm=F^\pm\}, \tag{18}$$

$$\mathrm{Aut}(M,F^\pm,\omega)=\{\varphi\in \mathrm{Aut}(M,F^\pm)\,;\ \varphi^*\omega=\omega\}. \tag{19}$$

つまり(18)は分布$F^\pm$を夫々不変にするMの微分同型のなす群，(19)は更にωを不変にするという条件をも充たす微分同型のなす群である．群(19)は有限次元リー群になるが群(18)は一般には無限次元である．群(19)がMに推移的に働くとき，Mを<u>等質パラケーラー多様体</u>という．リー群Gがパラケーラー多様体$(M,F^\pm,\omega)$に推移的に作用しかつその作用が$F^\pm,\omega$を不変にさせるとき，$(M,F^\pm,\omega)$を<u>G等質パラケーラー多様体</u>という．パ

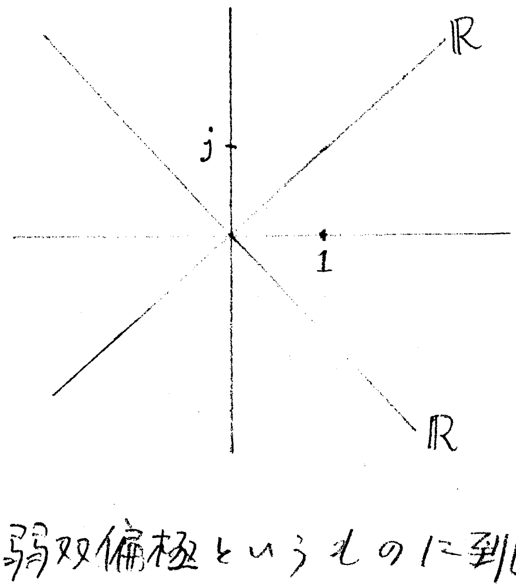
ラケーラー多様体$(M, F^{\pm}, \omega)$の各点$p \in M$に対してpを孤立不動点として持つ対称変換$s_p \in \mathrm{Aut}(M, F^{\pm}, \omega)$が存在する時，$(M, F^{\pm}, \omega)$をパラエルミート対称空間という([5])．これは等質パラケーラー多様体になる．§1の一葉双曲面$\mathcal{H}(= SL(2, \mathbb{R})/\mathbb{R}^*$はパラエルミート対称空間である．この場合群(18)はパラエルミート計量gの共形変換群と一致し無限次元である．ここで複素構造に伴ういくつかの幾何学的対象とそれの$\mathbb{C}'$類似物を提示して見よう：

複素構造	パラ複素構造
(擬)エルミート	パラエルミート
(擬)ケーラー	パラケーラー
正則自己同型群	$\mathrm{Aut}(M, F^{\pm})$
正則等長変換群	$\mathrm{Aut}(M, F^{\pm}, \omega)$
対称有界領域	パラエルミート対称空間
コンパクト双対	$M_0 \times M_0$ (M_0は対称R空間)
(半単純群の)楕円軌道	双曲軌道
シロフ境界(対称領域の)	最低次元の境界軌道
CR構造	部分的パラ複素構造
ケーラー・リー環	弱双偏極
ヨリー環	双偏極
等質ケーラー多様体	等質パラケーラー多様体

<u>部分的パラ複素構造</u>とはパラ複素構造 $F^{\pm}$ の定義において、$TM=F^{+}\oplus F^{-}$ の代りに $TM \supsetneq F^{+}\oplus F^{-}$ としたものである。例へば24次元の実旗多様体 $F_4/Spin(8)$ は互いに横断的な8次元の2つの完全積分可能な分布 $F^{\pm}$ を持つ。その葉体は共に8次元球面 S^8 である。単純リー群のパラエルミート対称空間は表現論に屢々現われるケーリー型対称空間を含んでいることに注意しておこう。

§4. リー環の弱双偏極と双偏極

パラ複素数環 $\mathbb{C}'=\{a+bj : j^2=1\}$ は $\mathbb{R}\oplus\mathbb{R}$ に同型である。この同型対応は $a+bj \longmapsto \frac{1}{2}(a+b)(1+j)\oplus\frac{1}{2}(a-b)(1-j)\in\mathbb{R}\oplus\mathbb{R}$ で与へられる。これを $\mathbb{C}'$ の split property という。等質ケーラー多様体の研究はケーラーリー代数というリー環の研究に帰着された(Vinberg-Gindikin)。同様に等質パラケーラー多様体に対してパラケーラリー代数が作れる。しかしこの場合 $\mathbb{C}'$ の split property によりもっと簡単な弱双偏極というものに到達する。



<u>定義</u>([8]). リー環 $\mathfrak{g}$ の2つの部分環 $\mathfrak{g}^{\pm}$ と $\mathfrak{g}$ 上の交代双

1次形式 ρ に対して $\{\mathfrak{g}^{\pm}, \rho\}$ が $\mathfrak{g}$ の弱双偏極とは，

WD1) $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^{+} + \mathfrak{g}^{-}$,

WD2) $\mathfrak{g}^{+} \cap \mathfrak{g}^{-} = \mathfrak{g}^{\rho}\ (:= \{X \in \mathfrak{g} : \rho(X, \mathfrak{g}) = 0\})$,

WD3) $\rho(\mathfrak{g}^{\pm}, \mathfrak{g}^{\pm}) = 0$ （複号同順），

WD4) リー環のコホモロジーの意味で $d\rho = 0$.

定義([8]). リー環 $\mathfrak{g}$ の部分環 $\mathfrak{g}^{\pm}$ と $\mathfrak{g}$ 上の1次形式 f に対して $\{\mathfrak{g}^{\pm}, f\}$ が $\mathfrak{g}$ の双偏極とは

D1) $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^{+} + \mathfrak{g}^{-}$,

D2) $\mathfrak{g}^{+} \cap \mathfrak{g}^{-} = \mathfrak{g}^{f}\ (:= \{X \in \mathfrak{g} : f([X, \mathfrak{g}]) = 0\})$,

D3) $f([\mathfrak{g}^{\pm}, \mathfrak{g}^{\pm}]) = 0$ （複号同順）.

上の2つの定義において，$\mathfrak{g}$ の定義体は $\mathbb{R}$ 又は $\mathbb{C}$ とする．$\{\mathfrak{g}^{\pm}, f\}$ が双偏極なら $\{\mathfrak{g}^{\pm}, df\}$ は弱双偏極になる．従って $\mathfrak{g}$ が半単純ならば，任意の弱双偏極は双偏極である．

定義([15]). リー環 $\mathfrak{g}$ の部分環 $\mathfrak{m}$ と $\mathfrak{g}$ 上の1次形式 f に対して，$\{\mathfrak{m}, f\}$ が $\mathfrak{g}$ の偏極とは

P1) $f([\mathfrak{m}, \mathfrak{m}]) = 0$,

P2) $\mathfrak{m}$ は(P1)を充たす $\mathfrak{g}$ の部分空間のうち極大である．

次の命題は簡単だが有用である．

命題4.1([3, 4]). $\{\mathfrak{g}^{\pm}, f\}$ がリー環 $\mathfrak{g}$ の双偏極である為

の必要十分条件は

1) $\{\mathfrak{g}^+, f\}$, $\{\mathfrak{g}^-, f\}$ は $\mathfrak{g}$ の偏極である，

2) $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^+ + \mathfrak{g}^-$.

この命題により双偏極の性質を調べるのに偏極についての種々の結果が使える事になる．扨，等質パラケーラー構造と弱双極化の関係は次の定理で与へられる．

定理4.2.([8]). G を連結リー群，H を G の閉部分群とし，$\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}\, G$, $\mathfrak{h} = \mathrm{Lie}\, H$ とする．このは次の (i), (ii) が成立つ．

(i) 商空間 $M = G/H$ が G 等質パラケーラー多様体ならば，$\mathfrak{g}$ の弱双偏極 $\{\mathfrak{g}^{\pm}, \rho\}$ が存在して，$\mathfrak{g}^+ \cap \mathfrak{g}^- = \mathfrak{h}$ が成立つ．

(ii) $\mathfrak{g}$ の弱双偏極 $\{\mathfrak{g}^{\pm}, \rho\}$ が存在して，

a. $\mathfrak{g}^+ \cap \mathfrak{g}^- = \mathfrak{h}$,

b. $(\mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}} H)\mathfrak{g}^{\pm} \subset \mathfrak{g}^{\pm}$,

c. ρ は $\mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}} H$ 不変である，

を満足すれば，$M = G/H$ は G 等質パラケーラー多様体になる．

H が連結ならば上の b, c は不要であることに注意しておこう．

§5. 半単純リー群の等質パラケーラー多様体

$\mathfrak{g}$を半単純リー環，$\{\mathfrak{g}^\pm, f\}$を$\mathfrak{g}$の双偏極とする．$\mathfrak{g}$のキリング形式Bに対して，$B(Z, X) = f(X)$, $^\forall X \in \mathfrak{g}$で定義される元$Z \in \mathfrak{g}$を$\{\mathfrak{g}^\pm, f\}$の特性元という．特性元$Z$は双偏極を調べる際に非常に大切で，$Z$によって$\{\mathfrak{g}^\pm, f\}$が再構成される．部分環$\mathfrak{g}^f$は$Z$の$\mathfrak{g}$での中心化環$\mathfrak{c}(Z)$と一致することに注意しておこう．Dixmier [15] と尾関-腸本 [13] を用いて次の命題を示す事ができる．

命題5.1([4])．$\mathfrak{g}$と実半単純リー環，$\{\mathfrak{g}^\pm, f\}$を$\mathfrak{g}$の双偏極とする．この時，特性元Zは$\mathfrak{g}$の半単純元である．$\mathfrak{g}^\pm$は$\mathfrak{g}$の放物型部分環であり，中心化環$\mathfrak{c}(Z)$は$\mathfrak{g}^\pm$のLevi部分環である．

半単純階別リー環$\mathfrak{g} = \sum_{k=-\nu}^{\nu} \mathfrak{g}_k$が$\alpha_0$型であるとは，$\sum_{k<0} \mathfrak{g}_k$が$\mathfrak{g}_{-1}$で生成されることである．扨$\mathfrak{g}$を半単純リー環とする．$\mathfrak{g}$の双偏極$\{\mathfrak{g}^\pm, f\}$が$\mathfrak{g}$の階別付から来るとは，$\mathfrak{g}$のある階別リー環としての表示$\mathfrak{g} = \sum_{k=-\nu}^{\nu} \mathfrak{g}_k$が存在して$\mathfrak{g}^\pm = \sum_{k=0}^{\nu} \mathfrak{g}_{\pm k}$が成立つ事である．半単純階別リー環$\mathfrak{g} = \sum_{k=-\nu}^{\nu} \mathfrak{g}_k$に対して$\mathfrak{g}$の元$Z_0$が存在して，各$\mathfrak{g}_k$は$\mathrm{ad}\, Z_0$の固有値$k$の固有空間になる．この元$Z_0$をこの階別リー環の特性元という．

定理5.2([8, 4])．半単純階別リー環$\mathfrak{g} = \sum_{k=-\nu}^{\nu} \mathfrak{g}_k$の特

性元をZ_0とし，キリング形式に関するZ_0の双対1次形式をf_0とする．$\mathfrak{g}^{\pm}=\sum_{k=0}^{\nu}\mathfrak{g}_{\pm k}$とおくと$\{\mathfrak{g}^{\pm}, f_0\}$は$\mathfrak{g}$の双偏極である．逆に$\mathfrak{g}$の任意の双偏極は$\alpha_0$型の$\mathfrak{g}$の階別付から来る．

上の定理により半単純リー環$\mathfrak{g}$の双偏極$\{\mathfrak{g}^{\pm}, f\}$と$\mathfrak{g}$の$\alpha_0$型階別付は$f$を無視すると1対1に対応する事がわかる．この定理を用いて等質パラケーラー多様体の商空間としての特徴付が得られる．

<u>定理5.3</u>([4])．Gを連結半単純リー群，Hを閉部分群とする．この時次の3つは同値である．

(i) 商空間$M=G/H$はG等質パラケーラー多様体である．

(ii) HはGの放物型部分群のレビ部分群の閉部分群である．

(iii) Mは$\mathfrak{g}=\mathrm{Lie}\,G$の半単純双曲元の$\mathrm{Ad}G$軌道の$G$同変被覆多様体である．

<u>注意</u>(i)ある種の可解リー環に双偏極が構成されている([12,1])．その他にエルミート型単純リー環の岩沢部分環内に双偏極が構成される．可解リー環の双偏極については未だよく知られていない．

(ii)コンパクトリー環$\mathfrak{g}$が弱双偏極を持てば可換リー環になってしまう．これを用いると，コンパクトリー群の等質パラケ

ーラー多様体は偶数次元トーラスに限る事が示される([3]).

§6. 等質パラケーラー多様体の同変コンパクト化

定理5.2, 5.3より半単純リー群の等質パラケーラー多様体を考へるには半単純階別リー環 $\mathfrak{g}=\sum_{k=-\nu}^{\nu}\mathfrak{g}_k$ から出発する事が出来る。その特性元を Z_0, $G=\mathrm{Ad}\,\mathfrak{g}$ とし, Z_0 の G での中心化群を $C(Z_0)$ とする. このは $M=G/C(Z_0)$ は G 等質パラケーラー多様体である. M のパラ複素構造は, $\mathfrak{g}$ のべき零部分環 $\mathfrak{m}^{\pm}=\sum_{k=1}^{\nu}\mathfrak{g}_{\pm k}$ が定める M 上の完全積分可能な分布 $F^{\pm}$ である. G の放物型部分群 $U^{\pm}=C(Z_0)\exp\mathfrak{m}^{\pm}$ を考へる. 商空間 $M^{\pm}=G/U^{\pm}$ は複多様体である. §1のコンパクト化の構成をモデルにして M のコンパクト化を構成しよう. 積多様体

$$\tilde{M}=M^{-}\times M^{+}$$

には $G\times G$ が作用している. 従って $G\times G$ の diagonal 部分群として G は $\tilde{M}$ に作用している. 容易にわかる様に $F^{\pm}$ の葉体のなす空間 $M/F^{\pm}$ は $M^{\pm}=G/U^{\pm}$ に一致する. 即ち $F^{\pm}$ の葉体は二重束

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, "F^{-}"'] \arrow[dr, "F^{+}"] & \\ M^{-} & & M^{+} \end{tikzcd}$$

のファイバーになっている.

定理6.1([8,9]). $M, M^{\pm}$ の原点を $o, o^{\pm}$ とすると

$$\varphi : g\cdot o \longmapsto (go^{-}, go^{+}),\qquad g\in G$$

は等質パラケーラー多様体 $M=G/C(Z_0)$ のコンパクト多様体 $\tilde{M}$ への G 同変かつ開稠密埋込である(特に $\tilde{M}$ は M のコンパクト化である). 更に φ は $F^{\pm}$ を $\tilde{M}$ の積構造にうつす.

$M=G/C(Z_0)$ がパラエルミート対称空間ならば $\nu=1$ である. 即ち与えられた階別は第1種である. この場合は $\tilde{M}$ の G 軌道分解は完全に決定される([6]). 扱対称対 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_0)$ の分裂ルート系は BC型又はC型である. BC型の場合は $\tilde{M}$ 内の最小次元の G 軌道 M_r 上に, $\tilde{M}$ の積構造の制限として部分的パラ複素構造が入る. これに関する田中[14]の結果を用いて自己同型群 $\mathrm{Aut}(M, F^{\pm})$ が決定できる. 分裂ルート系がC型の場合は M_r は M^{-} と一致する. この場合は M_r 上の部分的パラ複素構造は自明になってしまう. しかし $\tilde{M}$ 内の特異 G 軌道の合併が $M_r=M^{-}$ 上に一般化された共形構造を induce し, [2]の結果に持込んでこの場合も $\mathrm{Aut}(M, F^{\pm})$ を決定する事が出来る. 詳しくは [9,16] を参照されたい.

文 献

1. S.Deng and S.Kaneyuki, An example of nonsymmetric dipolarizations in a Lie algebra, Tokyo J. Math. 16(1993),509-511.
2. S.Gindikin and S.Kaneyuki, On the automorphism group of the generalized conformal structure of a symmetric R-space, Differential Geom. Appl. 8(1998),21-33.
3. Z.Hou,S.Deng and S.Kaneyuki, Dipolarizations in compact Lie algebras and homogeneous parakaehler manifolds, Tokyo J. Math. 20(1997),381-388.
4. Z.Hou,S.Deng,S.Kaneyuki and K.Nishiyama, Dipolarizations in semisimple Lie algebras and homogeneous parakaehler manifolds, to appear in J.Lie Theory.
5. S.Kaneyuki and M.Kozai, Paracomplex structures and affine symmetric spaces, Tokyo J. Math. 8(1985),81-98.
6. S.Kaneyuki, On orbit structure of compactifications of parahermitian symmetric spaces, Japan.J.Math. 13(1987),333-370.
7. S.Kaneyuki,On a remarkable class of homogeneous symplectic manifolds, Proc. Japan Acad. 67,Ser.A(1991),128-131.
8. S.Kaneyuki, Homogeneous symplectic manifolds and dipolarizations in Lie algebras, Tokyo J. Math. 15(1992),313-325.
9. S.Kaneyuki, On the automorphism groups of parahermitian symmetric spaces, in preparation.
10. P.Libermann, Sur le problème d'équivalence de certaines structures infinitesimales, Ann.Mat.Pur Appl. 36(1954),27-120.
11. Y.Matsushita, Fields of 2-planes and two kinds of almost complex 4-dimensional manifolds, Math.Z. 207(1991),281-291.
12. D.Meng,S.Deng and S.Kaneyuki, A remarkable class of nonsymmetric dipolarizations in Lie algebras, Yokohama Math. J. 43(1995),117-123.
13. H.Ozeki and M.Wakimoto, On polarizations of certain homogeneous spaces, Hiroshima Math.J. 2(1972),445-482.
14. N.Tanaka, On affine symmetric spaces and the automorphism groups of product manifolds, Hokkaido math.J. 14(1985),277-351.
15. J.Dixmier, Algèbres Enveloppantes, Gauthier-Villars, 1974.
16. S.Kaneyuki, Graded Lie algebras,related geometric structures and pseudo-Hermitian symmetric spaces, Analysis and Geometry of Complex Homogeneous Domains,(G.Roos and W.Yin,eds), Science Press, Beijing, China, to appear.