数理解析研究所講究録
1069巻 1998年 140-148

球面の極小等質部分多様体の例

千葉大理　高木亮一 (R. Takagi)

対称空間の線形 isotropy 表現による軌道を R-空間という。R-空間の幾何学的構造は様々な角度から研究されてきた(例えば, [2], [4], [5], [6], [7], [8], [9], [10], [11])。特に [10] に球面の極小部分多様体の例がたくさん挙げられているが, ここではこれらとは異った型の球面の極小部分多様体の例を構成してみよう。

p, q $(2 \leq p \leq q)$ を正整数とし, $M_{p,q}(\mathbb{C})$ を $\mathbb{C}$ 上の $p \times q$ 行列の全体とする。これは標準的 Hermite 計量をもつ複素 Euclid空間 $\mathbb{C}^{pq}$ と同一視できる。$U(p)$ を p 次 Unitary 群とすると, Lie群 $G := S(U(p) \times U(q))$ は $\mathbb{C}^{pq}$ 上に次のように作用する:

$$(\sigma, \tau)X = \sigma X \tau^{-1}, \ (\sigma, \tau) \in G, \ X \in \mathbb{C}^{pq}.$$

従って, G は $U(pq)$ の Lie 部分群と見なせる. さらに, この作用は AIII 型の compact Hermite 対称空間

$SU(p+q)/S(U(p)\times U(q))$ の線形 isotropy 表現の作用に他ならない。従って，この対称空間の階数は p である．$S^{2pq-1}(r)$ を $\mathbb{C}^{pq}$ の半径 r の超球とすると，$\mathbb{C}^{pq}-\{0\}$ の $\forall$元 A に対して，G による A の軌道 $G(A)$ は $S^{2pq-1}(|A|)$ の compact 等質部分多様体となる。$\mathbb{C}^{pq}$ の正規直交独立ベクトル $e_1,\cdots,e_p$ として次のようなものを選んでおく。

$$e_i := \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} & & & \text{i-th} & & & \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & O \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{array}\right] \end{array}, \quad i=1,\cdots,p.$$

$\mathbb{R}$ 上 $e_1,\cdots,e_p$ が張るベクトル空間を $\mathfrak{a}$ で表す．対称空間 $SU(p+q)/S(U(p)\times U(q))$ と $\mathfrak{a}$ に関する正の制限 roots の全体を Δ で表し，$e_1,\cdots,e_p$ の双対基底を $\omega_1,\cdots,\omega_p$ とすると，Δ は次で与えられることが知られている (cf., [1], [3])：

(1) $\Delta = \{\omega_i,\ 2\omega_i,\ \omega_i \pm \omega_j\ ;\ 1\le i<j\le p\}$,

ここに，重複度は順に，$2(q-p)$，1，2 である。$\mathfrak{a}$ の元 $A = a_1e_1+\cdots+a_pe_p$ が $\omega(A)\neq 0$, $\omega\in\Delta$ を，すなわち

$a_i \neq 0$, $a_i^2 \neq a_j^2$, $1\le i<j\le p$

をみたすとき，A は正則であるという。以下は次のことを示すのが目標である。

(2) ($\mathfrak{a}$ の正則な元 A で $G(A)$ が Sで 極小となるようなもの が存在する。

そこで、以下 A は $\mathfrak{a}$ の正則な元とする。$S^{2pq-1}(|A|)$ の部分多様体としての軌道 $G(A)$ の単位法ベクトル N に対して、$G(A)$ の N 方向の平均曲率は

$$(3) \qquad \sum_{\lambda\in\Delta}\frac{\lambda(N)}{\lambda(A)}$$

で与えられることが知られている（[11]）。ただし、(3) の和は重複度に応じてとるものとする。特に、$G(A)$ が $S^{2pq-1}(|A|)$ で極小となるための条件は

$$(4) \qquad \sum_{\lambda\in\Delta}\frac{\lambda(N_i)}{\lambda(A)}=0,\quad N_i=a_ie_p-a_pe_i \quad (i=1,\cdots,p-1)$$

以下, $i,j,k=1,\cdots,p-1$ と約束しよう。すると (4) は次のようになる。

$$(5) \qquad \frac{2q-2p+1}{2}\left(\frac{a_i}{a_p}-\frac{a_p}{a_i}\right) + \sum_{j}^{j\neq i}\frac{a_i}{a_p+a_j} + \frac{a_i-a_p}{a_p+a_i} - \sum_{j}^{j\neq i}\frac{a_p}{a_i+a_j} + \sum_{j}^{j\neq i}\frac{a_i}{a_p-a_j} + \frac{a_i+a_p}{a_p-a_i} - \sum_{j}^{j\neq i}\frac{a_p}{a_i-a_j} = 0.$$

ここで $a_p=1$ とおき，(5) を $2a_i$ で割ると，次を得る。

(6) $$s\left(1-\frac{1}{a_i^2}\right)+\frac{2}{1-a_i^2}+\sum_j^{j\neq i}\frac{1}{1-a_j^2}-\sum_j^{j\neq i}\frac{1}{a_i^2-a_j^2}=0,$$

ここに，$s=(2q-2p+1)/4$ とおいた。さらに，$n:=p-1$，$x_i:=a_i^2$ とおき，領域 $0<x_1<\cdots<x_n<1$ を D で表そう。関数 $f_i:D\to\mathbb{R}$ を

$$f_i(x_1,\cdots,x_n)=s\left(1-\frac{1}{x_i}\right)+\frac{2}{1-x_i}+\sum_j^{j\neq i}\frac{1}{1-x_j}-\sum_j^{j\neq i}\frac{1}{x_i-x_j}$$

で定義し，$F:=(f_1,\cdots,f_n)$ とおく。すると，方程式 (5) は

(7) 「写像 F の像が原点 0 を含む。」

と同値であることがわかる。そこで以下 (7) を示そう。まず $f_{i,j}:=\partial f_i/\partial x_j$，$a_i:=s/x_i^2\ (>0)$，$b_i:=1/(1-x_j)^2$，$c_{ij}:=1/(x_i-x_j)^2$ とおけば，次が成立つ。

$$f_{i,j}=\begin{cases}a_i+2b_i+\sum_k^{k\neq i}c_{ik} & (j=i)\\ b_j-c_{ij} & (j\neq i)\end{cases}$$

以下，次を示そう。

(8) $\det(f_{i,j})>0$ everywhere on D,

(9) ∂Dの点に収束するDの${}^\forall$点列$\{r_n\}$に対して，

$$\lim_{m\to\infty} |F(r_m)| = \infty.$$

これを示せば，(7)が示されたことになる。なぜなら，仮りに$U := \mathbb{R}^n - F(D) \neq \phi$とする。${}^\forall r \in \partial U$に対して，$D$の点列$\{s_m\}$を$F(s_m) \to r\ (m \to \infty)$なるようにとると，$\{s_m\}$の部分列$\{s_{m_i}\}$で$\overline{D}$のある点($s_0$としよう)に収束するようなものがある。もし，$s_0 \in D$なら(8)に矛盾し，もし$s_0 \in \partial D$なら(9)に矛盾するからである。

(9)は明らかだから，以下(8)を示そう。$\det(f_{i,j})$がa_i, b_j, $c_{kl}\,(= c_{lk})$についての多項式であることに注目して，nに関する帰納法で証明しよう。$n=1$のときは明らか。$\deg F < n$のとき正しいとする。最初にFの$a_{i_1} \cdots a_{i_r}\ (1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq n,\ 1 \leq r \leq n)$の係数$A$が正であることを示す。一般性を失うことなく，$i_1 = 1, \cdots, i_r = r$としてよい。$r = n$のときは明らかだから，$r < n$とする。このとき，$A$は$(n-r)$次行列

$$(f_{i,j})_{r+1 \leq i,j \leq n}$$

の行列式において形式的に$a_{r+1} = \cdots = a_n = 0$とおいたも

ものに等しく，かつ(8)と同じ型だから，帰納法の仮定より正である。

次に，$a_1,\dots,a_n$ に関する定数項 B が正であることを示そう。これは $\det(f_{ij})$ において形式的に $a_1=\dots=a_n=0$ とおいたものと等しいから，以下 $a_1=\dots=a_n=0$ としよう。

$0\le r\le n$, $1\le i_1<\dots<i_r\le n$ に対して，$b_{i_1}\cdots b_{i_r}$ の係数が0以上であることを示そう。$r=0$ のときは明らかに正しい。よって，$1\le r\le n$ としてよい。また，$i_1=1,\dots,i_r=r$ としてよい。行列式の性質より次のことが容易にわかる。

$$(10)\qquad B=\det\left(\begin{array}{cccc|c} 2&1&\cdots&1& \\ 1&\ddots&\ddots&\vdots& \\ \vdots&\ddots&\ddots&1& \\ 1&\cdots&1&2& g_{ij}\\ \cline{1-4} 1&\cdots&\cdots&1& \\ &\cdots&& & \\ 1&\cdots&\cdots&1& \end{array}\right),$$

ここに，$g_{ij}=\begin{cases}\displaystyle\sum_{k}^{k\neq i} c_{ik} & (i=j)\\ -c_{ij} & (i\neq j)\end{cases}$.

(10)で第$1,\dots,n-1$行をすべて第n行に加えると

$$(11)\qquad B = (n+1)\det\left[\begin{array}{c|c} \text{同上} & \text{同上} \\ \hline 1 \cdots 1 & 0 \cdots 0 \end{array}\right].$$

(11)で $1 \le i \le r$, $r+1 \le j \le n$ に対し、第 i 行を c_{ij} 倍して第 j 行に加えると

$$(12)\qquad B = (n+1)\det \begin{array}{cc} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & & 0 & \\ & \ddots & & 0 \\ 0 & & 1 & \\ \hline & 0 & & g_{ij} \\ \hline 1 & \cdots & 1 & \sum_{j=1}^{r} c_{ij} \end{array}\right] & \begin{array}{l} \updownarrow r \\ \\ \\ \\ \end{array} \\ \underleftrightarrow{\quad r \quad} & \end{array}$$

$$= (n+1)\det\left[\begin{array}{c} g_{ij} \\ \hline \sum_{j=1}^{r} c_{ij} \end{array}\right], \quad \begin{array}{l} r+1 \le i \le n-1 \\ r+1 \le j \le n \end{array}.$$

これが正であることを示すには、次を示せばよい。

<u>Lemma</u>. n 次実正方行列 (a_{ij}) が次をみたすとする。

(イ) $a_{n,1}, \cdots, a_{n,n} > 0$.

(ロ) $1 \le i \le n-1$, $1 \le j \le n$, $i \ne j$ ならば、$a_{ij} < 0$.

(ハ) $1 \leq i \leq n-1$ のとき, $a_{1i} + \cdots + a_{n-1,i} - a_{ni} > 0$.
このとき, $\det(a_{ij}) > 0$.

証明. nに関する帰納法による。$\det(a_{ij})$ を第n列について展開すれば, 2つの帰納法の仮定（このLemma自身最初の帰納法の途中にあることに注意）によって正であることがわかる。 q.e.d.

以上によって主張(2)が証明された。

注意(1). $\mathfrak{a}$ の $\forall$ Weyl chamber W に対して, $W \cap S^{2pq-1}(r)$ の中に唯一つの極小軌道があることがわかったわけである。

(2). 同じ論法で他のHermite対称空間に対しても同じ結果が得られることが容易にわかる。他の対称空間に対しても同じことが成立つことが予想されるが, 目下検討中である。もし, これが正しいなら, 別の統一的証明があるように思われる。

(3). [10]で扱われている軌道$G(A)$はすべてAが正則でない場合である。

(4). $P^{pq-1}(\mathbb{C})$を複素射影空間とし, πを$S^{2pq-1}(\mathbb{C})$から$P^{pq-1}(\mathbb{C})$への標準射影とすると, $\pi(G(A))$も$P^{pq-1}(\mathbb{C})$の極小等質部分多様体になることはすぐわかる。

References

[1] S. Araki, On root systems and an infinitisimal classification of a irreducible symmetric spaces, J. Math. Osaka City Univ., 13(1962), 1-34.

[2] Y-W. Choe, U-Hang Ki and R. Takagi, Compact minimal generic submanifolds with parallel normal section in a complex projective space, to appear.

[3] S. Helgason, Differential Geometry, Lie Groups and Symmetric Spaces, Academic Press(1978).

[4] Y. Kitagawa and Y. Ohnita, On the mean curvature of R-spaces, Math. Ann., 262(1983), 239-243.

[5] S. Kobayashi, Isometric imbeddings of compact symmetric spaces, Tôhoku Math. J., 20(1968), 21-25.

[6] T. Nagano, Transformation groups on compact symmetric spaces, Trans. Amer. Math. Soc., 118(1965), 428-453.

[7] Y. Ohnita, On differential geometrical properties of the standard imbeddings of R-spaces, Report at the Conference of Math. Soc. Japan(April, 1982), in Japanese.

[8] Y. Shimizu, On a construction of homogeneous CR-submanifolds in a complex projective spaces, Comm. Math. Univ. Sancti Pauli, 32(1983), 203-2-7.

[9] R. Takagi, Real hypersurfaces in a complex projective space with constant principal curvatures I, II, J. Math. Soc. Japan, 27(1975), 43-53 and 507-516.

[10] M. Takeuchi and S. Kobayashi, Minimal imbeddings of R-spaces, J. Differ. Geom., 2(1968), 203- 215.

[11] R. Takagi and T. Takahashi, On the principal curvatures of homogeneous hypersurfaces in a sphere, in Differential Geometry ; in honor of K. Yano, Kinokuniya, Tokyo(1972), 469-481.