数理解析研究所講究録
1070 巻 1998 年 154-164



# 共形平坦な4次元多様体上のゼロモードスピノールの極と留数

郡　敏昭 ( Tosiaki KORI )　　早稲田大理工

## 1

リーマン面は2次元共形平坦な多様体である。　その局所座標は C の領域と考えられるので古典関数論の諸結果を大域化しリーマン面上の関数論を得る。　正則関数は共形写像と同じであり、1次元ディラック作用素 $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ の斉次解（ゼロ解）である。、　リーマン面上の関数論は　このディラック作用素の斉次解の積分表現や、特異性、すなわち有理型関数、を調べる理論である。　次に、4次元共形平坦な多様体 $M$ を考える。　その局所座標は $\mathrm{C}^2$ の領域となるので古典関数論の拡張をここで考えてみよう。　2次元ディラック作用素を考えるので $M$ はスピン構造を持つと仮定する。　正則関数（共形写像）に対応するのは斉次スピノールである。そこで、4次元共形平坦多様体の上の共変なディラック作用素の斉次解（スピノール）の積分表現や、特異性、すなわち有理型スピノールを調べよう。

これは二つの興味を引く問題である。一つは言うまでもなく、古典関数論の解析多様体（多変数複素構造）論以外の方向への一般化または継承としての、$\mathrm{C}^2$ 上の（そして4次元共形平坦多様体上の）スピノール関数論を展開することであり、もう一つは、解析的曲面論やドナルドソンの理論（筆者はそれを知らないが）以外の第3の4次元多様体論を提案することになる。単連結4次元共形平坦多様体は $S^4$ であるが、4次元共形平坦多様体の基本群が何か、単連結でない4次元共形平坦多様体の例にどんなものがあるのか、4次元のポワンカレ（定負曲率）球体を何か離散群で割ってそんな例が得られるのか、についても筆者は（今日は）なにも知らない。こんなことができるのなら、筆者の展開したスピノール関数論と合わせて、まさに4次元リーマン面の理論（共形理論）ができてることになる。

**定義.** リーマン多様体 $(M, g)$ が共形平坦であるとは、$\forall p \in M$ に対して $U \ni p$ と, $u \in C^\infty(U)$ が存在して, $e^{2u}g$ が平坦な距離となること。

$\dim M \geq 4$ なら　ワイルテンソル $W = 0$ が必要十分条件

4次元共形平坦多様体 $M$ 上には次の local coordinate system が存在する；

$$(U_\lambda, \chi_\lambda) \cong \left(G_\lambda = \chi_\lambda(U_\lambda) \subset \mathrm{C}^2, \{z_1^\lambda, z_2^\lambda\}\right)$$

は位相同型で transition function $f_{\mu\lambda} = \chi_\mu \chi_\lambda^{-1}$ は $\mathrm{C}^2$ の共形変換になる、i.e.

$$f_{\mu\lambda}^*\left(dz_1^\mu d\bar{z}_1^\mu + dz_2^\mu d\bar{z}_2^\mu\right) = e^{2u_{\mu\lambda}}\left(dz_1^\lambda d\bar{z}_1^\lambda + dz_2^\lambda d\bar{z}_2^\lambda\right),$$

ここに $u_{\mu\lambda}$ は smooth function on $G_\mu \cap G_\lambda$.

いまから $\mathrm{C}^2$ 上のスピノール関数論を展開する。　そして登場するいろいろな概念や量、たとえば有理型スピノールの留数、が$\mathrm{C}^2$ の共形変換で不変または共変であることを示す。　すると　それらは上の張り合わせにより 4次元共形平坦多様体上に拡張され、4次元共形平坦多様体上の有理型スピノールの留数が定義される。

## 2

### 2.1.

スピノールの説明は略して、4成分スピノール

$$\varphi = \begin{pmatrix} \phi \\ \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$$

とは４成分のベクトル場 $\varphi$ に「上下２成分ごとのスピノール」を入れ替える$4 \times 4$ matrix $\gamma = \begin{pmatrix} 0 & * \\ * & 0 \end{pmatrix}$ （カイラル作用素）がともなっているものと思えばよいことにしょう。$\mathrm{C}^2$ 上では適当にframe を取り

$$\gamma = \frac{1}{|z|} \begin{pmatrix} & & z_1 & z_2 \\ \multicolumn{2}{c}{0} & -\overline{z}_2 & \overline{z}_1 \\ \overline{z}_1 & -z_2 & & \\ \overline{z}_2 & z_1 & \multicolumn{2}{c}{0} \end{pmatrix}$$

となる。

上の２成分$\phi$をeven spinor, 下の２成分$\psi$をodd spinorと呼ぶ。even ( odd ) spinor の全体を $S^{\pm}$ と書く。

$\gamma_+ = \gamma | S^+ = \frac{1}{|z|} \begin{pmatrix} \overline{z}_1 & -z_2 \\ \overline{z}_2 & z_1 \end{pmatrix}$ , $\gamma_- = \gamma | S^- = \frac{1}{|z|} \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -\overline{z}_2 & \overline{z}_1 \end{pmatrix}$

と書く。

### 2.2.

ディラック作用素はスピノールに次のように作用する一階の微分作用素である。それは $\mathcal{D} = c \cdot d : C^\infty(S) \longrightarrow C^\infty(S)$ と定義される。ここに、$d$ は外微分（一般には共変微分）で、$c\cdot$ はClifford multiplicationである。　座標で書くと、

$$\mathcal{D} = \begin{pmatrix} 0 & D^\dagger \\ D & 0 \end{pmatrix}; C^\infty(\mathrm{C}^2, S^+ \oplus S^-) \longrightarrow C^\infty(\mathrm{C}^2, S^+ \oplus S^-)$$

$$D^{\dagger} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \overline{z}_1} & \frac{\partial}{\partial \overline{z}_2} \\ -\frac{\partial}{\partial z_2} & \frac{\partial}{\partial z_1} \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial z_1} & -\frac{\partial}{\partial \overline{z}_2} \\ \frac{\partial}{\partial z_2} & \frac{\partial}{\partial \overline{z}_1} \end{pmatrix}.$$

**2.3.**

コーシー核 $\mathcal{K} : C^{\infty}(S) \longrightarrow C^{\infty}(S)$ は次のように定義される。　ふつうは、$z$ がある領域 $G$ 内に、$\zeta$ がその境界 $\partial G$ の上にある。$(z, \zeta)$ , $\zeta \neq z$, に対して、

$$\mathcal{K} = \begin{pmatrix} 0 & K^{\dagger} \\ K & 0 \end{pmatrix}; C^{\infty}(\mathrm{C}^2, S^+ \oplus S^-) \longrightarrow C^{\infty}(\mathrm{C}^2, S^+ \oplus S^-)$$

$$K^{\dagger}(z, \zeta) = \frac{1}{|\zeta - z|^3}\gamma_+(\zeta - z), \qquad K(z, \zeta) = \frac{1}{|\zeta - z|^3}\gamma_-(\zeta - z)$$

とする。

$$D_z K^{\dagger}(z, \zeta) = 0, \qquad D_z^{\dagger} K(z, \zeta) = 0$$

が計算すればすぐわかる。

**( Integral formula ).**

$G \subset \mathrm{C}^2$ , $\quad \varphi \in C^{\infty}(\overline{G}, S^+)$.

$$\varphi(z) = -\frac{1}{2\pi^2}\int_G K^{\dagger}(z, \zeta) D\varphi(\zeta) dV(\zeta) + \frac{1}{2\pi^2}\int_{\partial G} K^{\dagger}(z, \zeta)(\gamma\varphi)(\zeta) d\sigma(\zeta)$$

$$z \in G$$

ここに $\gamma = \gamma_{\partial G}|S^+$ は$\partial G$ への外法線の *Clifford multiplication* $\sigma$ は $\partial G$ の面積要素.

## 3

### 3.1.

1 変数関数論で $\frac{\partial}{\partial z} = e^{i\theta}\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{i}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\right)$ と極分解され、$|z|=1$ 上の接ディラック作用素 $-i\frac{\partial}{\partial\theta}$ の固有値問題は $-i\frac{\partial}{\partial\theta}e^{\pm in\theta} = ne^{\pm in\theta}$ と解けて非負固有値の固有関数 $e^{in\theta}$ は $z^n$ として C 上に正則に、すなわちディラック作用素 $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ のゼロモードとして延長され、負固有値の固有関数 $e^{-in\theta}$ は $z^{-n}$ として $\mathrm{C}\setminus 0$ 上にディラック作用素 $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ のゼロモードとして延長される。　　これの全くの類似を示すことができる。、

$\mathrm{C}^2$ で、$|z|=1$ 上の極分解は

$$D = \gamma_+\left(\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial n} - \partial\!\!\!/\right).$$

次の性質を持つスピノールの族 $\phi_{(\alpha,p)}(z) \in C^\infty(\mathrm{C}^2, S^+)$, $\phi_{-(\alpha,p)}(z) \in C^\infty(\mathrm{C}^2\setminus 0, S^-)$ が存在する。

(1)

$\{|z|=1\} \simeq S^3$ 上で

$$\partial\!\!\!/\,\phi_{(\alpha,p)} = \frac{n}{2}\,\phi_{(\alpha,p)}, \qquad \partial\!\!\!/\,\phi_{-(\alpha,p)} = -\frac{n+3}{2}\,\phi_{-(\alpha,p)}, \qquad |\alpha| = n$$

(2)

$\{|z|=1\} \simeq S^3$ 上で $\phi_{\pm(\alpha,p)}$ は $\partial\!\!\!/$ の固有値の完全正規直交形をなす。

(3)

$\mathrm{C}^2$ で $D\phi_{(\alpha,p)} = 0$, 　　$\mathrm{C}^2\setminus 0$ で $D\phi_{-(\alpha,p)} = 0$,

(4)

$|z| \longrightarrow 0$ または $\infty$ で

$$\phi_{(\alpha,p)} \sim O(|z|^{|\alpha|}), \qquad \phi_{-(\alpha,p)} \sim O(|z|^{-(|\alpha|+3)}).$$

### 3.2. 一番重要な命題.

Szöge 核は

$$2\pi^2 A^+(z,\zeta) = \sum_r \sum_{p=0}^{r+1} \sum_{|\alpha|=r} \overline{\phi_{(\alpha,p)}(\zeta)} \otimes \phi_{(\alpha,p)}(z)$$

で定義されて、

$$A^+ : L^2(|z|=1, S^+) \longrightarrow C^\infty(|z|<1, S^+)$$

$$A^+\phi(z) = \int_{|\zeta|=1} A^+(z,\zeta)\phi(\zeta)\sigma(d\zeta).$$

だが、

**Proposition 1.** $|\zeta|=1$ , $|z|<1$ に対して

$$2\pi^2 A^+(z,\zeta) = K^\dagger(z,\zeta)\cdot\gamma_+(\zeta-c) = \frac{1}{|\zeta-z|^3}\gamma_-(\zeta-z)\cdot\gamma_+(\zeta).$$

が成り立つ。

同様に外側 Szöge 核は

$$2\pi^2 A^-(z,\zeta) = \sum_r \sum_{p=0}^{r+1} \sum_{|\alpha|=r} \overline{\phi^{-(\alpha,p)}(\zeta)} \otimes \phi^{-(\alpha,p)}(z)$$

で、

$$A^-\phi(z) = \int_{|\zeta|=1} A^-(z,\zeta)\phi(\zeta)d\sigma(\zeta), \qquad |z|>1$$

$$A^- : L^2(|z|=1, S^+) \longrightarrow C^\infty(|z|>1, S^+)$$

だが、

**Proposition 2.** $|\zeta|=1$ , $|z|>1$ に対して

$$2\pi^2 A^-(z,\zeta) = -K^\dagger(z,\zeta)\cdot\gamma_+(\zeta).$$

が成り立つ。

**3.3.Laurent 展開.**

$0 \le r < |z-c| < R \le \infty$ とし、$\varphi \in \mathcal{E}(r < |z-c| < R, S^+)$ が $D\varphi = 0$ を満たす。 このとき

$$\varphi(z) = \sum_{(\alpha,p)} C_{(\alpha,p)}\, \phi^{(\alpha,p)}(z-c) + \sum_{(\alpha,p)} C_{-(\alpha,p)}\, \phi^{-(\alpha,p)}(z-c), \qquad r < |z-c| < R, .$$

係数は $r < \rho < R$ なる任意の $\rho$ に対して

$$C_{\pm(\alpha,p)} = \frac{1}{2\pi^2}\int_{B_\rho(c)} < \gamma_+(\zeta-c)\varphi(\zeta)\,,\, \psi^{\pm(\alpha,p)}(\zeta-c) > \sigma(d\zeta)$$

$$\psi^{-(\alpha,p)}(z) \in \mathcal{E}(\mathrm{C}^2, S^-), \qquad \psi^{(\alpha,p)}(z) \in \mathcal{E}(\mathrm{C}^2 \setminus \{0\}, S^-)$$

は

$$D^\dagger \psi^{-(\alpha,p)}(z) = 0, \qquad z \in \mathrm{C}^2, \qquad D^\dagger \psi^{(\alpha,p)}(z) = 0 \qquad z \in \mathrm{C}^2 \setminus \{0\}$$

$$\psi^{-(\alpha,p)} \sim O(|z|^{|\alpha|}), \qquad \phi^{(\alpha,p)} \sim O(|z|^{-(|\alpha|+3)}).$$

を満たす。$\phi^{\pm(\alpha,p)}$ を無限遠から（ $w = -\frac{\bar{z}}{|z|^2}$ で）見たものである。

証明. どんなにふつうの関数論とそっくりかを見るため証明を書いてみよう。

$s, t$ を $r < s < t < R$ととる。integration formula を領域 $s < |z-c| < t$ に適用して、

$$\begin{aligned}\varphi(z) = & \\ & \frac{1}{2\pi^2}\int_{B_t(c)} K^\dagger(z,\zeta)\gamma_+(\zeta-c)\varphi(\zeta)\sigma(d\zeta) \\ & - \frac{1}{2\pi^2}\int_{B_s(c)} K^\dagger(z,\zeta)\gamma_+(\zeta-c)\varphi(\zeta)\sigma(d\zeta),\end{aligned}$$

$$s < |z-c| < t.$$

となるが Proposition 1より

$$\frac{1}{2\pi^2}\int_{B_t(c)} K^\dagger(z,\zeta)\gamma_+(\zeta-c)\varphi(\zeta)\sigma(d\zeta) = \int_{B_t(c)} A_c^+(z,\zeta)\varphi(\zeta)\sigma(d\zeta)$$

$$= \sum_{(\alpha,p)} C_{(c,t)}^{(\alpha,p)}\, \phi^{(\alpha,p)}(z-c).$$

同様に Proposition 2 より、

$$-\frac{1}{2\pi^2}\int_{B_s(c)} K^\dagger(z,\zeta)\gamma_+(\zeta-c)\varphi(\zeta)\sigma(d\zeta)=\sum_{(\alpha,p)} C_{(c,s)}^{-(\alpha,p)}\,\phi^{-(\alpha,p)}(z-c).$$

定理に言う展開が得られた。さて $C_{(c,t)}^{(\alpha,p)}$ は

$$C_{(c,t)}^{(\alpha,p)}=\frac{1}{2\pi^2}\int_{B_t(c)} <\gamma_+(\zeta-c)\varphi(\zeta)\,,\,\psi^{(\alpha,p)}(\zeta-c)\ >\sigma(d\zeta).$$

で与えられるが $r<|\zeta-c|<R$ において $D\varphi=0$ 、$D^\dagger\psi_c^{(\alpha,p)}=0$ だから Stokes' formulaより、$s<\rho<t$ に対し

$$\int_{B_t(c)} <\gamma_+(\zeta-c)\varphi(\zeta)\,,\,\psi_c^{(\alpha,p)}(\zeta)\ >\sigma(d\zeta)=\int_{B_\rho(c)} <\ \gamma_+(\zeta-c)\varphi(\zeta)\,,\,\psi_c^{(\alpha,p)}(\zeta)\ >$$

で $t$に依存しない。同じく $C_{(c,s)}^{-(\alpha,p)}$ は $s$ に依存しない。任意の $s<\rho<t$について

$$C_{(c,s)}^{-(\alpha,p)}=\frac{1}{2\pi^2}\int_{B_\rho(c)} <\ \gamma_+(\zeta-c)\varphi(\zeta)\,,\,\psi_c^{-(\alpha,p)}(\zeta)\ >\ d\sigma,$$

**3.4.**有理型スピノール**.**

$0<|z-c|<r$ 上のゼロモードスピノール $\varphi\in C^\infty(E_r(c)\setminus\{c\},S^+)$ , $D\varphi=0$ のローラン展開での第二項;

$$\sum_{(\alpha,p)} C_{-(\alpha,p)}\,\phi_c^{-(\alpha,p)}$$

を $c$における $\varphi$ の主要部という。

$G$ を $\mathrm{C}^2$ の領域、$E$ を discrete subset とする。$G\setminus E$ 上の zero mode spinor $\varphi$ の各点 $c\in E$ での展開の主要部に有限個の項しか現れないとき $\varphi$ を $E$ を極とする有理型スピノールという。

vector

$$\begin{pmatrix} -C_{-((0,0),1)} \\ C_{-((0,0),0)} \end{pmatrix},$$

を$z=c$ での $\varphi$ の留数といい、$Res.\varphi(c)$ と書く。$Res.\varphi(c)$ は$O(\frac{1}{|z-c|^3})$なる項の係数である。

**Proposition.** 十分小さな $\epsilon > 0$に対して

$$Res.\varphi(c) = \frac{1}{2\pi^2}\int_{B_\epsilon(c)} \gamma(z-c)\varphi(z)\sigma(dz),$$

**Theorem.** $\varphi$ $G' \subset \mathrm{C}^2$ 上の $E = \{p_1, p_2, \cdots, p_n\}$ を極とする有理型スピノールとし、$E$ は境界 $\partial G$ を持つ部分領域 $G \subset \overline{G} \subset G'$ に含まれる。このとき、

(4-2-4) $$\frac{1}{2\pi^2}\int_{\partial G} (\gamma_{\partial G}\,\varphi)\, d\sigma = \sum_{i=1}^{n} Res.\varphi(p_i).$$

**4**

これまでの理論が共形変換で不変になることを見よう。$g = dz_1 \otimes d\overline{z}_1 + dz_2 \otimes d\overline{z}_2$ とする。$\mathrm{R}^4$ 上のもう一つの距離を $g'$ とする。$f : U \longrightarrow \mathrm{R}^4$ が平坦な共形変換であるとは、$U$上の関数 $u$ に対して$f^*g' = e^{2u}g$ となることである。$f$ の微分 $f_*$ は $SO(4)-$frame bundles の間のequivariant mapを与え、$f_*$ は $Spin(4)-$principal bundles の間の $Spin(4)-$equivalent map $f_\flat$ を導く、$Spin(4)-$representation $\Delta$ をひとつfixして、スピノールバンドルのユニタリ変換 $f' : S \longrightarrow S'$ が定まる。, [ Hitchin, Michelsson-Lawson ]

$\mathrm{R}^4$ の平坦な共形変換は、$O(4)-$変換、平行移動、相似拡大・縮小と Kelvin inversions $\frac{z}{|z|^2}$, $\frac{\overline{z}}{|z|^2}$ の合成になることが知られている。たとえば、inversion $f(z) = \frac{z}{|z|^2}$ に対し、$f_*$ は$T_z\mathrm{C}^2$内の $\begin{pmatrix} z \\ \overline{z} \end{pmatrix}$ に垂直な平面に関する鏡映と相似拡大$v \longrightarrow \frac{1}{|z|^2}v$の合成で、${f'}_z = \gamma(z)$ また、conformal factor は $\log|z|^2$ となる。Dirac operator はonformally covariant [ H , L-M ], すなわち、metric $g'$のDirac operatorを $D'_w$ とすると、

$$D'_w = F \cdot D_z \cdot F^{-1}, \qquad w = f(z),$$

ここに

$$F = e^{-\frac{3}{2}u} f'.$$

$F$ は $|z| = 1$ で、

$$\partial\!\!\!/_w = \pm F\, \partial\!\!\!/_z\, F^{-1} = \pm f'\, \partial\!\!\!/_z\, (f')^{-1}, \quad w = f(z)$$

を満たす。したがって$\partial\!\!\!/$の固有値は向きを変えない共形変換で不変で、$-\frac{n+3}{2}$, $\frac{n}{2}$、 向きを変える変換では符号を変え、$\frac{n+3}{2}$, $-\frac{n}{2}$となる。固有スピノールは$f'\phi_{\pm(\alpha,p)}$で与えられ、$F\phi_{\pm(\alpha,p)}$により $\mathrm{C}^2 \setminus 0$ に延長される。

$\varphi$ を有理型スピノールとする。 $O(4)-$変換、平行移動、相似拡大・縮小の共形変換で、$z$ での $\varphi$ のローラン展開の係数と、$f(z)$ での $f'\varphi$ のローラン展開の係数とが同じであることはすぐわかるだろう。Kelvin inversions $\frac{z}{|z|^2}$, $\frac{\overline{z}}{|z|^2}$ によっては 0が $\infty$ に移るので無限遠点を中心とするローラン展開を見なければならない。次の節でこれを解説しょう。

するとすべての共形変換に対して、有理型スピノールの極の位数は不変で、ローラン展開の係数は符号を変えるだけ、したがって留数は不変ということがわかり、1節の議論より有理型スピノールの極の位数や留数は、共形平坦な多様体の上の大域的な（局所座標によらない）概念として定義される。

## 5

**5.1.**無限遠点**.**

$\mathrm{C}^2$ と$\widehat{\mathrm{C}}^2$を

$$v:\ \mathrm{C}^2\setminus 0 \longrightarrow \widehat{\mathrm{C}}^2\setminus 0$$

$$z \longrightarrow w = v(z) = -\frac{\overline{z}}{|z|^2}.$$

で張り合わせて $S^4$ と位相同型な多様体を得る。 対応するスピノールの変換は

$$e^{-\frac{3}{2}u}v' = |z|^3\overline{\gamma}_0,$$

である。スピノールバンドル $S^{\pm}$は

$$\mathrm{C}^2\times\Delta^{\pm}\ni(z,\xi)\longleftrightarrow\Big(w=v(z),\hat{\xi}(w)=\overline{|w|^{-3}\gamma_{\pm}\xi}(v^{-1}w)\Big)\in\widehat{\mathrm{C}}^2\times\Delta^{\mp}.$$

なる張り合わせで得られる。したがって、$S^4$ の部分領域 $U$ 上のスピノールとは $\phi\in\mathcal{E}(U\cap\mathrm{C}^2\times\Delta^+)$ と $\widehat{\phi}\in\mathcal{E}(U\cap\widehat{\mathrm{C}}^2\times\Delta^-)$ を

$$w=v(z)\text{に対して}\widehat{\phi}(w)=\overline{|z|^3(\gamma_+\cdot\phi)(z)}$$

で同一視したものである。

$\widehat{\mathrm{C}}^2$ 上のカイラル作用素 $\gamma$ は

$$\gamma_+=\gamma|\Delta^-=\frac{1}{|w|}\begin{pmatrix} w_1 & w_2\\ -\overline{w}_2 & \overline{w}_1\end{pmatrix},\qquad \gamma_-=\gamma|\Delta^+=\frac{1}{|w|}\begin{pmatrix}\overline{w}_1 & -w_2\\ \overline{w}_2 & w_1\end{pmatrix}.$$

$\widehat{\mathbb{C}}^2$ 上のディラック作用素は

$$\widehat{D} = \widehat{\mathcal{D}}|S^+ = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \overline{w}_1} & \frac{\partial}{\partial \overline{w}_2} \\ -\frac{\partial}{\partial w_2} & \frac{\partial}{\partial w_1} \end{pmatrix}$$

これは張り合わせの共形変換で共変；

$$\widehat{D}\widehat{\phi} = \widehat{D\phi}, \qquad \widehat{D}^\dagger \widehat{\psi} = \widehat{D^\dagger \psi}.$$

**5.2.**積分公式**.**

コーシー核は

$$\widehat{K}^\dagger(w,\eta) = \frac{1}{|\eta - w|^3}\gamma_-(\eta - w) = \frac{1}{|\eta - w|^4}\begin{pmatrix} \overline{\eta}_1 - \overline{w}_1 & -\eta_2 + w_2 \\ \overline{\eta}_2 - \overline{w}_2 & \eta_1 - w_1 \end{pmatrix}.$$

となり変換式

$$\widehat{K}^\dagger(w,\eta) = -\overline{|z|^3 \gamma_+(z) K^\dagger(z,\zeta)\gamma_+(\zeta)}, \qquad w = \upsilon(z),\ \eta = \upsilon(\zeta).$$

が示されるので, やはり張り合わせの共形変換で共変；

$$\widehat{K}^\dagger \widehat{\phi} = \widehat{K^\dagger \phi}.$$

積分公式は

$$\widehat{\varphi}(w) = \frac{1}{2\pi^2}\int_{\partial G} \widehat{K}^\dagger(w,\eta)(\gamma_+ \widehat{\varphi})(\eta)\sigma(d\eta)$$

**5.3.**無限遠点でのローラン展開**.**

$\{w \in \widehat{\mathbb{C}}^2;\ 0 < |w| < \frac{1}{R}\}$ におけるローラン展開を $|z| > R$ で書き直してつぎの展開を得る。

**Theorem.** $\varphi$ を $\{z;\ R < |z|\}$上のスピノールで $D\varphi = 0$とすると、

$$\varphi(z) = \sum_{(\alpha,p)} \widehat{B}_{-(\alpha,p)}\, \phi^{(\alpha,p)}(z) + \sum_{(\alpha,p)} \widehat{B}_{(\alpha,p)}\, \phi^{-(\alpha,p)}(z), \qquad R < |z|$$

係数は任意の $\rho > \frac{1}{R}$ に対して

$$\widehat{B}_{\mp(\alpha,p)} = -\frac{1}{2\pi^2}\int_{B_\rho(0)} < \gamma_+\varphi(z), \psi^{\pm(\alpha,p)}(z) > d\sigma(z)$$

無限遠点を含む領域における有理型スピノールと無限遠点での留数 $Res.\varphi(\infty)$ も定義される。

**Theorem.** $\varphi$ を $S^4$ 上の有理型スピノールで、極を $c_1, c_2, \cdots, c_m, \in S^4$ とする. このとき

$$\sum_{k=1}^{m} Res.\varphi(c_k) = 0.$$

**5.3..**

$\mathcal{N}^\dagger$ で zero mode odd spinorsの芽の層とする. Let $\mathcal{L}_E$ で $E$ でゼロとなるzero mode odd spinorsの芽のなす $\mathcal{N}^\dagger$ の部分層とする. 完全列

$$0 \longrightarrow \mathcal{L}_E \longrightarrow \mathcal{N}^\dagger \longrightarrow \mathcal{N}^\dagger/\mathcal{L}_E \longrightarrow 0.$$

がある。

**Theorem.** $M$ を *compact*共形平坦 4 次元リーマン多様体とし、$E = \{c_i\}_i$ を $M$ の有限集合.

$$H^1(M, \mathcal{L}_E) = 0.$$

と仮定する。$\varphi$ を $E$に極を持つ有理型スピノールとすると、

$$\sum_i Res\,\varphi(c_i) = 0.$$