数理解析研究所講究録
1070 巻 1998 年 123-137

ケーラー多様体上の正準変換群における マスロフフォーム [1]

慶應義塾大学理工学部　宮崎直哉 (Naoya Miyazaki)[2]

1 Introduction

シンプレクティック多様体 M における正準変換群 Symp(M) が適当な位相によって無限次元のリー群になることが知られている (cf.[Om])。そして、それらに関して知られている結果としては

1. コンパクト シンプレクティック多様体上の正準変換群は局所弧状連結である (cf.[We])
2. 上と同じ仮定のもとで、正準変換群は単純である (cf.[Ba])

等が挙げられるが、その代数的な構造や位相的構造は未だ十分に解明されているとは言えない。同じ無限次元リー群の例である基点付きのループ群 ΩG などには底空間 G の位相的な性質がホモトピー群に直接反映されるのに対して、

「底空間の代数的位相的性質が正準変換群の代数的あるいは位相的性質にどのように反映されるのか？」

と言った問題はかなり難しいと思われる。

ここでは、正準変換群の性質をより精しく調べるための第一歩として、**正準変換群上のノントリビアルなコサイクルの構成**について、底空間が具体的な例について説明したいと思う (cf.[Mi])。

詳しいことは次節以降で述べることとして、ここではそのようなコサイクルを構成するアイデアのみ述べておこう。そのために、通常のマスロフフォームの定義を思い出しておくとよい。そこでは、次の事実が主な役割を果たしている。

1. ラグランジアン部分多様体の接空間はラグランジアン部分空間になっている。
2. ラグランジアン部分空間全体の集まりとしてラグランジアン・グラスマニアン多様体と呼ばれる多様体が定義される。
3. ラグランジアン・グラスマニアン多様体からユニタリ群への写像 (Souriou map) が定義される。

これらを総合すればラグランジアン部分多様体からユニタリ群への写像が定義されることになり更に、行列式をとれば $S^1 = U(1)$ への写像ができる。これで $H^1(S^1, \mathbf{R})$ の生成元である $d\theta$ 引き戻してやることにより、ラグランジアン部分多様体上の閉１次形式が定義されるのであった。

[1] 京都大学数理解析研究所 研究集会「力学系と微分幾何学」（１９９８年９月２日-４日）における講演原稿
Keywords:Maslov-form, Symplectic topology, Infinite dimensional Lie group, etc
[2] Research Fellow of the Japan Society for the Promotion of Science
e-mail address: naoya@math.keio.ac.jp, miyazaki@ma.noda.sut.ac.jp

さて、正準変換群の上に閉1次形式を定義するためにはどうすればよいか？　そのためには、上の事実1を次の事実

1. 正準変換のグラフは積多様体におけるラグランジアン部分多様体を成している。

で置き換えてやればよい。そうすることによって、大雑把には正準変換群上の閉1次形式が定義されることになる。そこで、次に問題となるのは

(a) 得られた形式の取り扱いやすい表示法 (explicite formula) を見つけること
(b) それらが、自明ではないことを示すこと

等がある。以下では、シンプレクティック多様体が非コンパクトエルミート対称空間の場合について上記の (a)、(b) について考察を行う。

2 ラグランジアン・グラスマニアン多様体

いくつかの用語とそれにかんする事実を簡単に振り返っておく (cf. [Ar], [Fu])。
まず、ラグランジアン－グラスマニアン多様体について振り返っておこう。

（イ）$(x,y) \in \mathbf{R}^{2n} \to x + y\sqrt{-1} \in \mathbf{C}^n$　という同一視のもとで、$\mathbf{C}^n$ の標準的エルミート内積の虚部として定まるシンプレクティックフォームを σ とかく。
（ロ）$\mathbf{R}^{2n}$ の実部分空間 λ について
(a)$\lambda^\sigma = \{v \in \mathbf{R}^{2n} | \sigma(\lambda, v) = 0\}$
(b) λ:isotropic$\Longleftrightarrow \lambda \subset \lambda^\sigma \Longleftrightarrow \sigma|_{\lambda\times\lambda} = 0$
(c) λ:coisotropic$\Longleftrightarrow \lambda^\sigma \subset \lambda \Longleftrightarrow \lambda^\sigma$:isotropic
(d) λ:Lagrangian$\Longleftrightarrow \lambda = \lambda^\sigma \Longleftrightarrow \lambda$:isotropic, coisotropic
(e) λ:symplectic$\Longleftrightarrow \sigma|_{\lambda\times\lambda}$:nondegenerate
（ハ）ラグランジアン－グラスマニアン多様体を $\Lambda(n) = \{\lambda | \text{Lagrangian}\}$ で定義する。
（ニ）（事実1）ラグランジアン－グラスマニアン多様体にはユニタリ群 $U(n)$ が推移的に作用し $\lambda_{im} = \{x + y\sqrt{-1} | x = 0, y \in \mathbf{R}^n\}$ の等方部分群は $O(n)$。よって多様体としては $\Lambda(n) = U(n)/O(n)$ である。
（ホ）事実1により下の写像 (Souriou map) が定義される。

$$\begin{array}{rccc} W: & \Lambda(n) = U(n)/O(n) & \to & U(n) \\ & \lambda = U_\lambda \lambda_{im} & \to & U_\lambda \cdots U_\lambda^t \end{array} \tag{1}$$

（ヘ）（事実2）$\sigma = d\theta$ (local) とすると、ラグランジアン部分空間 λ の上では $d\theta|_\lambda = \sigma|_\lambda = 0$ だからポアンカレの補題により局所的には λ に依存する関数 S_λ が存在し、$\theta|_\lambda = dS_\lambda$ が成立する。この関数のことを以下では母関数 (generating function) とよぶ。更に、Souriou map と generating function は Cayley 変換で結ばれている。

$$W(\lambda) = \frac{1 - \sqrt{-1}\mathrm{Hess}S_\lambda}{1 + \sqrt{-1}\mathrm{Hess}S_\lambda} \tag{2}$$

ただし、ここで Hess はヘッシアンを意味する。

以上で、基本的な概念と事実の準備は終わったが、次にIntroductionで述べた方法による閉1次形式がどのような物であるかを単純な例

$$Sp(2n, \mathbf{R}) = \left\{ g = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \middle| g^t \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} g = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right\} \tag{3}$$

を通して考えてみる。

条件 $g^t \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} g = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ からすぐに次がわかる。

（ト）（事実３）g のグラフは $\mathbf{R}^{2n} \times \mathbf{R}^{2n}$ におけるラグランジアン部分空間である。

この（事実３）とSouriou mapを合わせれば次の写像が構成できる。

$$Sp(2n; \mathbf{R}) \to \Lambda(2n) \to U(2n) \to U(1), \tag{4}$$

ここで２番目の矢印がが Souriou map W であり、１番左の写像 $\tilde{\tau}$ は

$$\tilde{\tau}(g) = \lambda = \{(x, \xi, Ax + B\xi, Cx + D\xi) | x, \xi \in \mathbf{R}\} \tag{5}$$

で定義される写像である。また第３の写像は行列式を取る写像である。$g = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \in Sp(2n; \mathbf{R})$ であるから $\tilde{\tau}(g)$ は線形正準変換 g のグラフである。このダイアグラムを使って m_{sp} を以下で定義する。

$$m_{sp} = \frac{1}{2\pi}(\det \circ W \circ \tilde{\tau})^*(d\theta), \quad \theta \in S^1. \tag{6}$$

これを $Sp(2n; \mathbf{R})$ におけるマスロフフォームと呼んでおくことにする。このフォームについて以下の具体的な表示式が存在する。そしてこれは自明でないこともわかる。

Proposition 2.1 *1.* マスロフフォームは以下のような表示を持っている*:*

$$m_{sp} = \frac{1}{\pi} d \arg \det\{ -A - D - \sqrt{-1}(C - B)\}. \tag{7}$$

2. マスロフフォームは $Sp(2n; \mathbf{R})$ のド・ラームコホモロジーのノントリビアルなコサイクルを定義する。

詳細については [Mi] を参照。

次に、うえの Proposition 2.1 で得られた公式を複素構造の観点から見直してみよう。$z = x + y\sqrt{-1} \in \mathbf{C}^n$ として

$$dz = dx + dy\sqrt{-1}, \quad \partial_z = \frac{1}{2}\{\partial_x - \partial_y\sqrt{-1}\}$$

とおく。　また、正準変換 φ に対して

$$z' = \varphi(z)$$

とおく。これを用いて上の公式に現れた A, B, C, D を表してみよう。

$$\begin{aligned} \frac{\partial z'}{\partial z} &= \frac{1}{2}\left(\partial_x - \partial_y\sqrt{-1}\right)(dx' + dy'\sqrt{-1}) \\ &= -\frac{1}{2}\left(-\frac{\partial x'}{\partial x} - \frac{\partial y'}{\partial y} - i(\frac{\partial y'}{\partial x} - \frac{\partial x'}{\partial y})\right) \end{aligned}$$

ここで、

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

に注意すれば、

$$m_{sp} = \frac{1}{\pi} d \arg \det \left[\frac{\partial z'}{\partial z}\right] \tag{8}$$

を得る。

実はこれが非コンパクトエルミート対称空間における正準変換群におけるマスロフフォームの具体的表示のヒントを与えているのである。

3 非コンパクト対称空間上の正準変換群におけるマスロフフォーム

Introduction で述べたように、ここで扱う多様体 M は非コンパクトエルミート対称空間（非コンパクトエルミート多様体で、各点 p での測地的反転 σ_p が大域的な正則等長になっているようなもので結果的にはケーラー多様体にもなっている (cf. [He])）であるとする。

いよいよ、非コンパクト対称空間 M 上の正準変換群におけるマスフロフォームを定義しよう。そのためには、前節で用いたダイアグラム (4) を以下のダイアグラムに置き換えて用いれば良い。

$$\mathrm{Symp(M)} \to \Lambda(2\dim_{\mathbf{C}} M)) \to U(2\dim_{\mathbf{C}} M)) \to U(1), \tag{9}$$

ここで、第 1 の写像 $\tilde{\tau}$ は φ に φ のグラフ上の点 $(o, \varphi(o))$ における接空間 λ を対応させるという写像である。

このようなダイアグラムを用いることによって閉 1 次形式 m を以下のように定義する。

$$m = \frac{1}{2\pi}(\det \circ W \circ \tilde{\tau})^*(d\theta). \tag{10}$$

さて、この閉 1 次形式の具体的な表示を得るために、しばらく非コンパクトエルミート対称空間に関する事実を復習しておく。よく知られているように原点 o を固定すると、以下の事実が成立している。

1. （標準接続と呼ばれる特別な接続による）指数写像が接空間 M_o から M 自身への微分同相を与える。
2. M 上の正則等長変換群 $A(M)$ はコンパクト開位相に関して有限次元リー群である。
3. M 自身は単位元の連結成分 $G = A(M)_0$ と $K = \{g \in G | g(o) = o\}$ によって等質空間 G/K と表される。

4. この時、M_o はリー環 $Lie(A(M)_0)$ の部分空間とみなすことができ、群の作用 $\tau_{\exp X}$ $(X \in M_o)$ のプッシュフォワード $(\tau_{\exp X})_*$ が M_o から $M_{\exp X \cdot o}$ への（複素構造 J を保つ）平行移動を与える。

この平行移動を利用して原点における (正則) ユニタリーフレーム $\partial_{z_1}|o, \cdots, \partial_{z_n}|_o$ を各点に散布して得られる大域的なフレームを $\theta_1, \cdots, \theta_n$ と記すことにすると、

$$X_1 = (\theta_1 - \bar{\theta}_1),\ Y_1 = \sqrt{-1}(\theta_1 + \bar{\theta}_1), \cdots,\ X_n = (\theta_n - \bar{\theta}_n),\ Y_n = \sqrt{-1}(\theta_n + \bar{\theta}_n) \qquad (11)$$

はシンプレクティックフレームにもなっている。そこで前節の最後で見たことを参考にして（無限次元リー群である）正準変換群 Symp(M) 上に次のような閉 1 次形式を考えることが出来る。

Definition 3.1

$$m' = \frac{1}{\pi} d \arg(\langle \varphi^*(\theta_1^* \wedge \cdots \wedge \theta_n^*), \theta_1 \wedge \cdots \wedge \theta_n \rangle|_o) \qquad (\varphi \in Symp(M)) \qquad (12)$$

天下りに定義を与えてしまったが、実はこれが前節で述べたように、正準変換のグラフを（積多様体における）ラグランジアン部分多様体と考えた時のマスロフフォームの類似物と思えるのである。もちろん通常のマスロフフォームはラグランジアン部分多様体が固定されているのだが、今の場合はそれに相当する正準変換 φ が変数として動き回っているのである。そこで以下では直前で定義された閉 1 次形式と Introduction で概説した方法で定義された閉 1 次形式が一致していることを見よう。

Proposition 3.2

$$m = \frac{1}{\pi} d \arg(\langle \varphi^*(\theta_1^* \wedge \cdots \wedge \theta_n^*), \theta_1 \wedge \cdots \wedge \theta_n \rangle|_o) \qquad (13)$$

ただし $\theta = (\theta_1, \cdots, \theta_n)$ は上記のように定義されたシンプレクティックフレームで、$\theta^* = (\theta_1^*, \cdots, \theta_n^*)$ は θ のデュアルフレームであるとする。

Proof. φ を正準変換群 Symp(M) の元とし、非コンパクト対称空間上の関数系 $\mathbf{H}$ を以下のように定める。

$$\begin{aligned} H^i(\varphi, x, \xi, \bar{x}, \bar{\xi}) &= \bar{x}^i - \varphi^{(\bar{x}),i}(x, \xi) \quad (i = 1, \cdots, n), \\ H_i(\varphi, x, \xi, \bar{x}, \bar{\xi}) &= \bar{\xi}_i - \varphi_i^{(\bar{\xi})}(x, \xi) \quad (i = 1, \cdots, n), \end{aligned} \qquad (14)$$

ここで $(x^1, \cdots, x^n; \xi_1, \cdots, \xi_n)$ は (X, Ξ) に同伴している標準的なダルブー座標系で $\varphi(x, \xi) = (\varphi^{(\bar{x}),i}(x, \xi), \varphi_i^{(\bar{\xi})}(x, \xi))_{i=1,\cdots,n}$ は M における正準変換の局所表示であるとする。このとき、等位面 $\mathbf{H} = \mathbf{0}$ は、正準変換 φ のグラフと一致している。ここで、話を簡単にするために接空間 $T_{o,\varphi(o)}\mathrm{Graph}(\varphi)$ が $\lambda_{Re} = \{(0, \xi, \bar{x}, 0) | \xi, \bar{x} \in \mathbf{R}^n\}$ と横断的であるとする。そうすると (φ) のグラフ上の点 p の周りは座標近傍 $((x, \bar{\xi}), U \subset \lambda_{im})$ でパラメトライズされるとして良い。この場合 $\lambda_{im} = \{(x, 0, 0, \bar{\xi}) \mid x,\ \bar{\xi}\ \in \mathbf{R}^n\}$ である。なぜなら我々はいま 空間 $\mathbf{R}^{4n}$ を $\begin{bmatrix} J & 0 \\ 0 & -J \end{bmatrix}$ をシンプレクティック構造とするシンプレクティック空間と思ってい

るからである。故に第２節で述べたように generating function $S(x,\bar{\xi})$ が φ のグラフの $(o,\varphi(o))$ の近傍で得られることになる。

ここで $\mathbf{H}(x,\bar{\xi},\partial_{(x,\bar{\xi})}S(x,\bar{\xi}))=0$, なので、すぐに

$$\partial^2_{(x,\bar{\xi})}S(x,\bar{\xi}) = -\begin{bmatrix} \partial_{\xi_j}H^i & \partial_{\bar{x}^j}H^i \\ \partial_{\xi_j}H_i & \partial_{\bar{x}^j}H_i \end{bmatrix}^{-1}_{ij} \begin{bmatrix} \partial_{x^j}H^i & \partial_{\bar{\xi}_j}H^i \\ \partial_{x^j}H_i & \partial_{\bar{\xi}_j}H_i \end{bmatrix}_{ij} \tag{15}$$

であることがわかる。ただし i (resp.j) は行 (resp. 列) の添え字を意味している。

一方、$\mathbf{H}$ の定義式 (14) より

$$\partial_{(x,\bar{\xi})}\mathbf{H} = \begin{bmatrix} -\partial_x\varphi^{(\bar{x})} & 0 \\ -\partial_x\varphi^{(\bar{\xi})} & 1_n \end{bmatrix}, \quad \partial_{(\xi,\bar{x})}\mathbf{H} = \begin{bmatrix} -\partial_\xi\varphi^{(\bar{x})} & 1_n \\ -\partial_\xi\varphi^{(\bar{\xi})} & 0 \end{bmatrix} \tag{16}$$

この式を (2)、すなわち今の場合

$$\frac{d}{2\pi}\arg\det\frac{1_{2n}-\sqrt{-1}\partial^2_{(x,\bar{\xi})}S(x,\bar{\xi})}{1_{2n}+\sqrt{-1}\partial^2_{(x,\bar{\xi})}S(x,\bar{\xi})} = \frac{d}{2\pi}\arg\frac{\det(1_{2n}-\sqrt{-1}\partial^2_{(x,\bar{\xi})}S(x,\bar{\xi}))}{\det(1_{2n}+\sqrt{-1}\partial^2_{(x,\bar{\xi})}S(x,\bar{\xi}))} \tag{17}$$

に代入して、更にこの式において分母は分子の複素共役であることに注意すれば

$$\begin{aligned} &(10) \\ &= \tfrac{d2}{2\pi}\arg\det\{1_{2n}-\sqrt{-1}\partial^2_{(x,\bar{\xi})}S(x,\bar{\xi})\} \\ &= \tfrac{d}{\pi}\arg\det\{1_{2n}+\sqrt{-1}\partial_{(\xi,\bar{x})}\mathbf{H}^{-1}(x,\bar{\xi},\partial_{(x,\bar{\xi})}S(x,\bar{\xi}))\cdot\partial_{(x,\bar{\xi})}\mathbf{H}(x,\bar{\xi},\partial_{(x,\bar{\xi})}S(x,\bar{\xi}))\} \\ &= \tfrac{d}{\pi}\arg\det\left\{\begin{bmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & 1_n \end{bmatrix} + \sqrt{-1}\begin{bmatrix} -\partial_x\varphi^{(\bar{x})} & 0 \\ -\partial_x\varphi^{(\bar{\xi})} & 1_n \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} -\partial_\xi\varphi^{(\bar{x})} & 1_n \\ -\partial_\xi\varphi^{(\bar{\xi})} & 0 \end{bmatrix}\right\} \end{aligned} \tag{18}$$

ここで $\det\begin{bmatrix} -\partial_x\varphi^{(\bar{x})} & 0 \\ -\partial_x\varphi^{(\bar{\xi})} & 1_n \end{bmatrix}$ が実数であることから

$$\begin{aligned} &(18) \\ &= \tfrac{d}{\pi}\arg\det\left\{\begin{bmatrix} -\partial_x\varphi^{(\bar{x})} & 0 \\ -\partial_x\varphi^{(\bar{\xi})} & 1_n \end{bmatrix} + \sqrt{-1}\begin{bmatrix} -\partial_\xi\varphi^{(\bar{x})} & 1_n \\ -\partial_\xi\varphi^{(\bar{\xi})} & 0 \end{bmatrix}\right\} \\ &= \tfrac{d}{\pi}\arg\det\begin{bmatrix} -\partial_x\varphi^{(\bar{x})}-\sqrt{-1}\partial_\xi\varphi^{(\bar{x})} & \sqrt{-1}1_n \\ -\partial_x\varphi^{(\bar{\xi})}-\sqrt{-1}\partial_\xi\varphi^{(\bar{\xi})} & 1_n \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{19}$$

が得られる。あとは基本変形によって主張が示されたことになる。一般の場合はルジャンドル変換を用いれば示すことができる。詳しくは [Yo] を参照。

さて、このように定義された閉１次形式はノントリビアルなコサイクルを定めているのであろうか？　これについては次のことが証明できる。

Proposition 3.3 $M=D_{p,q}(\mathbf{C})=\{Z\in M_{q,p}|1_p-Z^*Z>0\}$ すなわちＩ型の対称有界領域の時 m は正準変換群のノントリビアルコサイクルを定める。

Proof 方針としては、 $SU^0(p,q;\mathbf{C})$ の１次分数変換（ハミルトン作用になっている）で適当な周期的フローを探し出してやることによって証明されるのであるが、以下では必要となる記号の説明も加えて少し詳しく説明する。まず最初にI型の対称有界領域 $D_{p,q}(\mathbf{C})$ は対称空間対による等質空間 $SU^0(p,q)/(U(q)\times U(p))$ と同一視されることに注意する。リー群 $SU^0(p,q)$ は $D_{p,q}(\mathbf{C})$ に以下のように作用している ([He] を参照): いま、$A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\in SU^0(p,q)$ と $Z\in D_{p,q}(\mathbf{C})$ に対して、作用が

$$A\cdot Z=(cZ+d)(aZ+b)^{-1} \tag{20}$$

で定義され、この作用は推移的であり、複素構造とエルミート構造を保つ。

以下の議論では、次のような座標を用いて計算することにする:

$$\mathcal{U}=\left\{P(Z)=\left[\begin{array}{cc} \frac{1_n}{1_n-Z^*Z} & \frac{1_n}{1_n-Z^*Z}\cdot Z^* \\ Z\cdot\frac{1_n}{1_n-Z^*Z} & Z\cdot\frac{1_n}{1_n-Z^*Z}\cdot Z^* \end{array}\right]\middle|\ Z\in M(q,p;\mathbf{C})\right\}. \tag{21}$$

$P(Z)\in D_{p,q}(\mathbf{C})$ であることはすぐわかる。

この座標系を用いるとケーラー構造は次のようになる。

$$\Omega=\sqrt{-1}\mathrm{Tr}PdP\wedge dP=\sqrt{-1}\mathrm{Tr}\left\{\frac{1_p}{1_p-Z^*Z}dZ^*\wedge\frac{1_q}{1_q-ZZ^*}dZ\right\}$$

任意の元 $\sqrt{-1}X=\sqrt{-1}\begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{bmatrix}\in su(p,q)$ (ここで X_{11} は $p\times p$-行列, X_{12} は $p\times q$-行列, X_{21} は $q\times p$-行列, X_{22} は $q\times q$-行列 に対して

$$\begin{bmatrix} \alpha(t) & \beta(t) \\ \gamma(t) & \delta(t) \end{bmatrix}=\exp(-t\sqrt{-1}X) \tag{22}$$

とすると $Z(P_0)=Z_0$ となるような任意の点 $P_0\in D_{p,q}(\mathbf{C})$ に対して

$$Z(\Phi(\exp(-t\sqrt{-1}X)\ P_0))=(\delta(t)Z_0+\gamma(t))\cdot(\beta(t)Z_0+\alpha(t))^{-1} \tag{23}$$

となる。特にもし $X=\mathrm{diag}\lambda$ $(\lambda=(\lambda_1,\cdots,\lambda_p,\lambda_{p+1},\cdots,\lambda_{p+q}))$ なら

$$\begin{aligned} & Z(\Phi(\exp(-t\sqrt{-1}X)\ P_0)) \\ = \ & \exp(-t\sqrt{-1}\mathrm{diag}(\lambda_{p+1},\cdots,\lambda_{p+q}))\cdot Z_0\cdot\exp(t\sqrt{-1}\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_p)) \end{aligned} \tag{24}$$

である。以下ではこのようなフローを φ_λ と記すことにする。更に、$\lambda\in\mathbf{Z}$ の場合には φ_λ は $D_{p,q}(\mathbf{C})$ 上の周期的なハミルトンフロー、すなわち φ_λ が正準変換群 $\mathrm{Symp}(D_{p,q}(\mathbf{C}))$ 内のサイクルを定めることになる。

このサイクル φ_λ に対して、m とのペアリングを考える。

$$
\begin{aligned}
&\int_{\varphi_\lambda} m \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{\varphi_\lambda} d\arg\det\frac{\partial\varphi_\lambda^{\mathrm{hol}}(Z,Z^*)}{\partial Z} \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{d}{dt}(\arg\det\frac{\partial}{\partial Z}\{\exp(-t\sqrt{-1}\mathrm{diag}(\lambda_{p+1},\cdots,\lambda_{p+q}))\cdot \\
&\qquad\qquad Z_0\cdot\exp(t\sqrt{-1}\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_p))\})dt \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{d}{dt}\{\arg(\det\exp(-t\sqrt{-1}\mathrm{diag}(\lambda_{p+1},\cdots,\lambda_{p+q}))^p\cdot \\
&\qquad\qquad \det\exp(t\sqrt{-1}\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_p))^q\}dt \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{d}{dt}(\arg\exp(-p\mathrm{Tr}(\sqrt{-1}t\mathrm{diag}(\lambda_{p+1},\cdots,\lambda_{p+q}))\cdot \\
&\qquad\qquad \exp(q\mathrm{Tr}\sqrt{-1}t\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_p)))dt \\
&= q\sum_{i=1}^{p}\lambda_i - p\sum_{p+1}^{p+q}\lambda_j. \qquad (25)
\end{aligned}
$$

これは、閉１次形式の非自明性を与えている。

4　２次特性類の例 (Godbillon-Vey class)

次に正準変換群 Symp(M) 上により一般的に閉形式を定義することを考えよう。そのために最初に Godbillon-Vey class 及び ベーシックコネクション の定義とそれらの間の関係を簡単に振り返っておこう。

$\mathcal{F}$ で（適当な性質を持った）余次元１のフォリエーションを表すこととして、$\mathcal{F}$ を定めるパッフィアンを θ とすれば θ は決して零にはならず、$\mathcal{F}_x = \{X : \theta_x(X) = 0\}$ が成立している。更に、フロベニウスの定理を用いることによって、ある（１の分解を用いれば大域的な）１次形式 η が存在して

$$d\theta = \theta\wedge\eta \quad (\eta\in A^1(M)) \qquad (26)$$

を満たしている。この η を用いて Godbillon-Vey class が次のように定義されるのであった。

$$[\eta\wedge d\eta]\in H^3_{DR}(M;\mathbf{R}) \qquad (27)$$

以下では well-defined になっていることを見ておく。

1. $d(\eta\wedge d\eta)=0$ より閉３次形式なのは良い。
2. $d\theta=\theta\wedge\eta'$ つまり $\eta'=\eta+f\cdot\theta$ とすると

$$
\begin{aligned}
f\theta\wedge d(f\theta) &= f\theta\wedge df\wedge\theta + f^2\theta\wedge d\eta + f\theta\wedge d(f\theta) \\
\theta\wedge d\eta &= \theta\wedge d\eta - \theta\wedge\eta\wedge\eta \qquad (28)\\
&= d(-\theta\eta)
\end{aligned}
$$

に注意すれば

$$\begin{aligned} \eta' \wedge d\eta' &= \eta \wedge d\eta + \eta \wedge d(f\cdot\theta) + f\cdot\theta \wedge d\eta + f\cdot\theta\wedge d(f\cdot\theta) \\ &= \eta\wedge d\eta - d(\eta\wedge f\cdot\theta) \end{aligned} \tag{29}$$

よって、

$$[\eta'\wedge d\eta'] = [\eta\wedge d\eta] \tag{30}$$

が成立する。

以上の Godbillon-Vey class をより系統的に記述するためにベーシックコネクションについて振り返っておく。

ノーマルバンドル $Q = TM/\mathcal{F}$ に対して、

$$\theta(Z) = 1,\quad d\theta(Z) = 0 \tag{31}$$

を満たすようなセクション $Z \in \Gamma(Q)$ が存在する。Z を用いるとベーシックコネクションと呼ばれる接続が以下のように定義される。

$$\nabla_X Z = \eta(X) Z \tag{32}$$

で定める。ここで η は $d\theta = \theta\wedge\eta$ を満たすような大域的な 1 次形式であった。

話の順番が前後したが、ここで一般のベーシックコネクションの定義与えておこう。

Definition 4.1 まず、TM にリーマン計量 g を与えておく。一般に可積分な余次元 q の分布 E に対して、g に関する直交補束 Q とし、ベクトル場 X の E, Q への分解を X_E, X_Q と書くことにする。このとき、ベーシックコネクションを

$$\nabla_X Z = \pi[X_E, Z] + \nabla^g_{X_Q} Z \quad (Z \in \Gamma(Q)) \tag{33}$$

と定義する。ただし、$\pi : TM \to Q = TM/E$ は射影、∇^g は Q 上の g を保つ接続。

先のコネクションはこのように定義された意味でのベーシックコネクションの例となっている。実際次がなりたつ ([Bo])。

Lemma 4.2 上記の η はベーシックコネクションの接続形式になっている。

Proof

$$\nabla_X Z = \varphi(X)\cdot Z \tag{34}$$

で接続形式が定まるので φ と η が一致することを示せば良い。

$$\begin{aligned} -\tfrac{1}{2}\eta(X) &= (\theta\wedge\eta)(X, Z) \\ &= d\theta(X, Z) \\ &= -\tfrac{1}{2}\theta([X, Z]) + \tfrac{1}{2}X(\theta(Z)) - \tfrac{1}{2}Z(\theta(X)) \\ &= -\tfrac{1}{2}\theta([X, Z]) = -\tfrac{1}{2}\theta(\pi([X, Z])) \\ &= -\tfrac{1}{2}\theta(\nabla_X Z) = -\tfrac{1}{2}\theta(\varphi(X)\cdot Z) \\ &= -\tfrac{1}{2}\varphi(X) \end{aligned} \tag{35}$$

正確な定義は後ほど述べることにして (cf. Definition 5.1)、大雑把に言うと Bott homomorphism とはいくつか（いまは n としておく）の接続 ∇_i のアファイン結合 $\sum_{i=1,\cdots,n} t_i\nabla_i$ を考え、それをチャーン多項式のような不変多項式に代入して得られたものを単体 Δ^n で積分したもの（平均したもの）である。

以下では Godbillon-Vey class をこのような観点から表示し直すことを考えよう。まず、∇_1 をベーシックコネクション、∇_0 を計量を保つ接続とする。そして、$\Delta^1 \times M$ 上のアファイン結合を

$$\phi = (1-t)(\text{connection form of } \nabla_0) + t(\text{connection form of } \nabla_1) \tag{36}$$

と置くことにする。すると $\Delta^1 \times M$ における曲率が

$$\begin{aligned} \Omega &= d\phi + \phi \wedge \phi \\ &= dt \wedge \eta + td\eta + (t\eta \wedge t\eta) \end{aligned} \tag{37}$$

となり、つぎが成立する。

$$\begin{aligned} \lambda(\nabla_0, \nabla_1) &:= \textstyle\int_{\Delta^1} \Omega \wedge \Omega \\ &= \textstyle\int_0^1 \ 2tdt\eta \wedge d\eta \\ &= \eta \wedge d\eta \end{aligned} \tag{38}$$

ここで、λ が次節で正確な定義を与える Bott homomorohism である。

故に、言葉で言えば

$$\begin{aligned} \text{Godbillon-Vey class} \ &= \ \text{a cohomology class of the image of} \\ & \quad x^2 \text{ by Bott homomorphism via basic connection} \\ & \quad \text{and Levi-Civita connection} \end{aligned} \tag{39}$$

となる。

5 正準変換群上の二次特性類

さてここで一般の Bott homomorphism の定義を正確に与えておこう。r 次元単体

$$\Delta^r = \{(t_0, t_1, \cdots, t_r) \in \mathbf{R}^{r+1} | t_i \geq 0, \ \sum_{i=0}^{r} t_i = 1\} \tag{40}$$

と主 G 束 $P \to M$ 上の接続 ∇_i $(i = 0, \cdots, r)$ に対して $P \times \Delta^r \to M \times \Delta^r$ 上の接続 $\tilde{\omega}$ を $\tilde{\omega} = \sum_{i=0}^{r} t_i \cdot \omega_i$ で定める。また、リー環 $\mathcal{G}$ 上の不変多項式

$$\begin{aligned} f \ &: \mathcal{G} \times \cdots \times \mathcal{G} \to \mathbf{R} \\ & \text{s.t. symmetric multi-linear} \\ & \text{and } (ad\gamma)^* f = f \end{aligned} \tag{41}$$

と定義する。

Definition 5.1 Bott homomorphism とは

$$\lambda(\nabla_0, \nabla_1, \cdots . \nabla_r) f = (-1)^{[\frac{r+1}{2}]} \int_{\Delta^r} f(\Omega, \Omega, \cdots, \Omega) \tag{42}$$

で定義される写像

$$\lambda(\nabla_0, \nabla_1, \cdots, \nabla_r) : I^k(G) \to \wedge^{2k-r}(M) \tag{43}$$

のことである。ここで $\tilde{\Omega}$ は $\tilde{\omega}$ の曲率であり、$I^k(G)$ が不変多項式全体のなす集合を表している。

いよいよ、以下では Godbillon-Vey class のように Bott homomorphism を用いて正準変換群 Symp(M) 群の上の閉形式を定義することを考えていこう。(以下では M は非コンパクトエルミート対称空間であるとするが、考えにくい場合はユークリッド空間としてかまわない。) 正準変換 φ のグラフを考えるとこれはその定義から、$M \times M$ のラグランジュ部分多様体になっている。今考えている空間が非コンパクトエルミート対称空間であることから、原点における接空間 M_o と M とは指数写像で同一視 $\exp : M_o \to M$ される。このことを利用してグラフのターゲット成分だけをずらして次のような葉層構造を考えよう。

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_X(\varphi) &= \{(p, \exp_X \cdot \varphi(p)) | p \in M\} \\ \mathcal{F}(\varphi) &= \{\mathcal{F}_X(\varphi)\}_{X \in \mathcal{M}} \end{aligned} \tag{44}$$

さらにその接空間を考えることにより接分布を作るが、それによって $T(M \times M)$ におけるラグランジュ部分束を構成している。

さて、$M \times M$ には自然に $\hat{J} = J \ominus J$ が定義される。そしてエルミート内積が $\hat{g} = g \oplus g$ (故にケーラー構造は $\omega \ominus \omega$) で定義される。構造群はユニタリー群 $U(n \times n)$ である。

さて、$\varphi \in$ Symp(M) とすると φ はエルミート内積は保たないが、

$$\hat{g}|_{\mathrm{Graph}(\varphi)} = \varphi_*^t g \varphi_* + g > 0 \tag{45}$$

となるので、任意の正準変換 (故に $\mathcal{F}(\varphi)$) に対して、$g \oplus g$ は positive compatible metric になっていることがわかる。よって、ラグランジュ部分束の $\hat{g}$ に関する正規直交枠 $e_1, \cdots, e_n$ を考える。さらに、$\hat{J}$ によって $\hat{J}e_1, \cdots, \hat{J}e_n$ を付け足せばユニタリーフレーム

$$\epsilon_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 - \sqrt{-1}\hat{J}e_1), \cdots, \epsilon_n = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_n - \sqrt{-1}\hat{J}e_n) \tag{46}$$

が構成できる。($(e_1, \cdots, e_n, \hat{J}e_1, \cdots, \hat{J}e_n)$ を **R**-ユニタリーフレームと呼んで区別をすることにする。) 故に構造群がユニタリー群から直交群へと簡約されたことになる。このような状況で接続を考えれば、得られる接続形式は反対称な実成分行列値の 1 形式である。さらにこれが $\varphi \in$ Symp(M) に依存していることを考慮すると、この接続は Symp(M) $\times (M \times M)$ 上の接続となっている。　さて、次にこの形式を主 G 束 $\mathcal{P} \to$ Symp(M) $\times (M \times M)$ 上の接続形式と見直すことを考えよう。そのためには局所的な自明化とそこにおけるセクションを固定すれば良い。$TM \times M$ における **R**− ユニタリーフレームを

$$[X_1, \cdots, X_n, Y_1, \cdots, Y_n, X'_1, \cdots X'_n, Y'_1, \cdots, Y'_n] \tag{47}$$

$Id \in \mathrm{Symp(M)}$ に対応するラグランジュ部分束のラグランジュフレームを

$$\langle\lambda_{im}\rangle = [X_1, \cdots, X_n, Y_1', \cdots Y_n'] \tag{48}$$

とすれば $\varphi \in \mathrm{Symp(M)}$ に対応するラグランジュ部分束のラグランジュフレームは

$$U(\varphi, p, X)\langle\lambda_{im}\rangle \quad (\text{up to } O(2n)) \tag{49}$$

このようにして得られた局所的なセクション $U(\varphi, p, X)\langle\lambda_{im}\rangle$ を用いると $\mathcal{P}$ における接続形式は

$$\omega_0(\varphi) = \omega(\varphi) + U(\varphi, p, X)^{-1} dU(\varphi, p, X) \tag{50}$$

が定義される。

以上のようにして定義された $\mathcal{P}$ 上の接続を用いて、その Bott homomorphism による像を考えよう。

$$\lambda(\omega_0(\varphi), \omega_0(Id))f = \int_{\Delta^1} f(\tilde{\Omega}(\varphi, Id), \cdots, \tilde{\Omega}(\varphi, Id)) \tag{51}$$

ここで $f \in I^k(G)$ であり、

$$\begin{aligned} \tilde{\Omega} &= \text{curvature of } t\omega_0(\varphi) + (1-t)\omega_0(Id) \\ &= d(t\omega_0(\varphi) + (1-t)\omega_0(Id)) \\ &\quad + (t\omega_0(\varphi) + (1-t)\omega_0(Id)) \wedge (t\omega_0(\varphi) + (1-t)\omega_0(Id)) \end{aligned} \tag{52}$$

である。また d は $\Delta_1 \times \mathrm{Symp(M)} \times (M \times M)$ における外微分。

Proposition 5.2 奇数次の不変多項式 f について、$\int_{\Delta^1} f(\tilde{\Omega})$ は閉形式である。

Proof $f(X) = Tr\ X^{2k-1}$ だと仮定して一般性を失わない。ファイバーに関する積分のガウス・ストークスの公式を適用して、主 $O(2n)$ 束の接続の曲率テンソルが歪対称であることと Bianchi の公式を使えば証明できる。

Definition 5.3 以上の議論から奇数次の不変多項式 c_{2k-1} に対する Bott homomorphism の像が閉形式であることがわかったが、これを (4k-3) 次の**2次特性形式**と呼んでおく。また対応するコホモロジーの元を**2次特性類**と呼び、$\mathcal{M}^{4k-3}(\mathrm{Symp(M)})$ と記すことにする。

以下では f が、1次チャーン多項式 c_1 の場合を考えよう。

Proposition 5.4

$$\lambda(\omega_0(\varphi), \omega_0(Id))c_1 = d \log \det\langle\varphi^*(\epsilon^*), \epsilon\rangle \tag{53}$$

ここで ϵ はユニタリーフレームを意味している。また、ϵ^* はそのデュアルフレームを意味する。

Proof 直接計算で

$$左辺 = d\log\left\{\frac{\det(U(\varphi)\cdot U(\varphi)^t)}{\det(U(Id)\cdot U(Id)^t)}\right\} \tag{54}$$

まで持っていってから Proposition 3.2 の Proof を参考にして最終的な形に持っていけば良い。

故に、

Corollary 5.5 *1次チャーン多項式の Bott homomorphism の像(の正準変換群への制限)はマスロフフォームに一致している*

ことがわかった。

6 展望

また、ラグランジアン部分多様体からラグランジアン-グラスマニアン多様体 $U(n)/O(n)$ への写像を利用してユニタリー群上の閉形式を引き戻せば高階のフォームを同様に定義する事もできる。

一方、無限次元グラスマン多様体についてもアナロジーが効くと思われるが作用素論における微妙な問題を完全にはクリアーしきれていないのでこの場では述べないでおく。

さて極めて大切な例であるカラビ・ヤウ多様体についてもまったく触れていないが定義をするだけなら非コンパクトエルミート対称空間よりやさしいくらいである。しかし、そこの上のハミルトンフローについては良くわかっていないので、ここではこれ以上触れないことにする。

最後に研究の発表の場を与えて下さった京都大学の岩井敏洋教授にこの場をかりて感謝の意を表します。

参考文献

[AM] R. Abraham and J. E. Marsden, *Foundations of Mechanics.* Second Edition (1978) Addison-Wesley.

[ABKLM] B. Aebischer, M. Borer, M. Kälin, Ch. Leuenberger and H. M. Reimann. *Symplectic Geometry*, Progress in Mathematics 24 (1994), Birkhäuser Verlag, Basel· Boston· Berlin

[Ar] V. I. Arnol'd, *On a characteristic class entering in quantization conditions*, Func.Anal.Appl. 1 (1967), pp. 1-13.

[Ba] A. Banyaga, *Sur la structre du groupe des difféomorphismes qui préservent une forme symplectique*, Comm. Math. Helv. 53, (1978), pp.174-227

[Bo] R. Bott, *Lectures on characteristic classses and foliations,* In: Lectures on algebraic and differential topology, Lecture Notes in Mathematics, 279, Springer, Berlin-Newyork, (1972), pp.1-94

[CS] S. S. Chern and J.Simons, *characteristic forms and geometric invariants,* Ann. Math. 99 (1974) pp. 48-69

[Fu] D. Fujiwara, *Asymptotic methods in Linear Partial Differential Equations*, Iwanami, Tokyo, (1977) (in Japanese)

[GS] V. Guillemin and S. Sternberg, *Symplectic techniques in physics*, Cambridge University Press, (1984)

[GV] C. Godbillon and J. Vey, *Un invarinar des feuilletages de codimension un*, C. R. Acad. Sci. Paris 273 A (1971), pp. 92-95

[He] S. Helgason, *Differential Geometry, Lie groups, and Symmetric spaces*, Academic Press, (1978)

[Ho] L. Hörmander, *Fourier integral operators I*, Acta. Math. 127 (1971) pp. 79-183

[KN] S. Kobayashi and K. Nomizu, *Foundations of differential geometry I, II,* Intersc. Publ., New-York, 1963, 1969

[Ler] J. Leray, *Analyse lagrangienne et mechanique quantique*, Seminaire du College de France 1976-1977; R.C.P.25, Strasbourg, (1978).

[LR] R. G. Littlejohn and J. M. Robbins, *New way to compute Maslov index*, Phys. Rev. A, 36, No. 6, (1987), pp. 2953-2961.

[Ma] V. P. Maslov, *Theory of Perturbations and Asymptotic Methods*, izd. MGU (1965).

[Mi] N. Miyazaki, *A remark on the Maslov form on the group generated by invertible Fourier integral operators*, Lett. Math. Phys. 42, (1997), pp.35-42

[Mi2] N. Miyazaki, *Maslov form on the group of symplectic diffeomorphisms on bounded symmetric domain*, in preparation.

[Mo] H. Moriyoshi, *The Euler and Godbillon-Vey Forms and Symplectic Structures on* $Diff^{\infty}_{+}(S^1)/SO(2)$ In: Symplectic geometry and Quantization, (Y. Maeda, H. Omori, A. Weinstein Editors) Contemporary Mathematics 179 (1994) pp. 193-203

[MR] J. E. Marsden and T. S. Ratiu, *Introduction to Mechanics and Symmetry*, Springer-Verlag, (1994)

[MS] D.Mcduff and D.Salamon, *Introduction to Symplectic Topology*, Oxford Science Publications, (1995).

[Om] H. Omori, *Theory of infinite dimensional Lie groups*, Amer. Math. Soc. Trans., (1996).

[Om2] H. Omori, *Infinite Dimensional Lie Transformation Groups,* Lecture Notes in Mathematics, 427, Springer-Verlag, Berlin· Heidelberg· NewYork, (1974).

[We] A.Weinstein, *Symplectic manifolds and their Lagrangian submanifolds*, Advances in Mathematics, 6, (1971), pp. 329-346.

[Yo] A.Yoshioka, *Maslov Quantization Conditions for the Bounded States of the Hydrogen Atom*, Tokyo Journal of Math. 9, (1986). pp. 415-437.