数理解析研究所講究録
1071 巻 1998 年 112-115

STRONG CONVERGENCE THEOREM TO COMMON FIXED POINTS OF NONEXPANSIVE SEMIGROUPS $\{T(t):t\geq 0\}$ IN HILBERT SPACES

新潟大学大学院自然科学研究科 鈴木智成 (TOMONARI SUZUKI)

ABSTRACT. In this paper, we prove the following strong convergence theorem: Let C be a closed convex subset of a Hilbert space H. Let $\{T(t):t\geq 0\}$ be a strongly continuous semigroup of nonexpansive mappings on C such that $F(\mathcal{T})=\cap_{t\geq 0}F(T(t))\neq\emptyset$. Let $\{\alpha_{n}\}$ and $\{t_{n}\}$ be sequences of real numbers satisfying $0<\alpha_{n}<1$, $t_{n}>0$, $t_{n}\rightarrow 0$ and $\alpha_{n}/t_{n}\rightarrow 0$. Let $z\in C$ and let $\{u_{n}\}$ be a sequence of C defined by $u_{n}=(1-\alpha_{n})T(t_{n})u_{n}+\alpha_{n}z$. Then $\{u_{n}\}$ converges strongly to the element of $F(\mathcal{T})$ nearest to z in $F(\mathcal{T})$.

1. 序

C を Hilbert 空間 H の閉凸集合とする. C 上の写像 T が非拡大であるとは, $\|Tx-Ty\|\leq\|x-y\|$ $(x, y\in C)$ を満たすことである. 1967 年に F. E. Browder は次の定理を証明している. この定理は非拡大写像の不動点への強収束定理で, 非常にシンプルな定理である.

定理 1 (Browder [1]). C を Hilbert 空間 H の閉凸部分集合とし, T を C 上の非拡大写像で不動点集合 $F(T)$ は空でないとする. P を $F(T)$ の上への距離射影とする. $\{\alpha_{n}\}$ を $0<\alpha_{n}<1$ および $\alpha_{n}\rightarrow 0$ を満たす実数列とする. z を C の任意の元とし, $\{u_{n}\}$ を $u_{n}=(1-\alpha_{n})Tu_{n}+\alpha_{n}z$ によって一意に定義される C の点列とする. このとき, $\{u_{n}\}$ は Pz に強収束する.

N. Shioji と W. Takahashi は定理 1 に関連した定理 (定理 2) を証明している. 定理 2 を記述する前に, 定理 2 で使われている記号および概念について述べる.

S を半群とする. S 上の実数値有界関数全体からなる Banach 空間を $B(S)$ と表し, 通常の上限ノルムを入れる. 恒等的に 1 の値をとる S 上の関数を特に混乱のない限り, 1 で表す. $s\in S$ および $f\in B(S)$ に対して, $B(S)$ 上の写像 ℓ_{s} を $(\ell_{s}f)(t)=f(st)$ $(t\in S)$ と定義する. X は $B(S)$ の線形部分空間で $1\in X$ とする. $\mu\in X^{*}$ が X 上の mean であるとは, $\|\mu\|=\mu(1)=1$ が成り立つことである. 本論文では, $\mu\in X^{*}$ および $f\in B(S)$ に対して, $\mu(f)$ を $\mu_{t}(f(t))$ と書くことがある.

C を Hilbert 空間 H の閉凸部分集合とし, S を半群とする. 写像族 $\{T_{t}:t\in S\}$ が C 上の非拡大半群とは, すべての $t, s\in S$ に対して, T_{t} は C 上の非拡大写像で, $T_{ts}=T_{t}\circ T_{s}$ が成り立つことである. $\{T_{t}\}$ を, $\{T_{t}x:t\in S\}$ が有界になる $x\in C$ が存在する C 上の非拡大半群とする. X を $B(S)$ の線形部分空間で, 1 を含み, すべての $x\in C$ と

$y \in H$ に対して関数 $t \mapsto \|T_t x - y\|^2$ は X の元とする. このとき, X 上の mean μ および $x \in C$ に対して, $T_\mu x$ を, すべての $y \in H$ に対して $\langle T_\mu x, y\rangle = \mu_t \langle T_t x, y\rangle$ を満たす唯一の C の元として定義する ([3] を参照). T_μ は C 上の非拡大写像になっていることに注意する.

さて, 定理 2 を記述する. この定理の適用範囲は広く, また mean を使っているという特徴がある.

定理 2 (Shioji and Takahashi [2]). 次の事柄を仮定する: C は Hilbert 空間 H の閉凸部分集合である; S は半群である; $\{T_t : t \in S\}$ は C 上の非拡大半群で共通不動点集合 $F(\mathcal{S}) = \bigcap_{t\in S} F(T_t)$ は空でない; X は $B(S)$ の線形部分空間で, 1 を含み, すべての $s \in S$ に対して $\ell_s(X) \subset X$ が成り立ち, すべての $x \in C$ と $y \in H$ に対して関数 $t \mapsto \|T_t x - y\|^2$ は X に属する; $\{\mu_n\}$ はすべての $s \in S$ に対して $\|\mu_n - \ell_s^* \mu_n\| \to 0$ を満たす X 上の mean の列である; P は $F(\mathcal{S})$ の上への距離射影である. $\{\alpha_n\}$ を $0 < \alpha_n < 1$ および $\alpha_n \to 0$ を満たす実数列とする. z を C の任意の元とし, $\{u_n\}$ を $u_n = (1-\alpha_n) T_{\mu_n} u_n + \alpha_n z$ によって一意に定義される C の点列とする. このとき, $\{u_n\}$ は Pz に強収束する.

本論文では, 定理 1 および定理 2 に関連して, 非線形写像からなる 1 パラメータ強連続半群 $\{T_t : t \geq 0\}$ に関する強収束定理について証明する.

2. 結果

C を Hilbert 空間 H の閉凸部分集合とする. 写像族 $\{T(t) : t \geq 0\}$ が C 上の非拡大写像からなる強連続半群とは, 以下の 4 条件を満たすことである:

(i) $T(0)x = x$ がすべての $x \in C$ に対して成立する;
(ii) $\|T(t)x - T(t)y\| \leq \|x - y\|$ がすべての $x, y \in C$ とすべての $t \geq 0$ に対して成立する;
(iii) $T(t+s) = T(t) \circ T(s)$ がすべての $t, s \geq 0$ に対して成立する;
(iv) 写像 $t \mapsto T(t)x$ がすべての $x \in C$ に対して連続である.

次の定理が本論文の主結果である.

定理 3. C を Hilbert 空間 H の閉凸部分集合とする. $\{T(t) : t \geq 0\}$ を C 上の非拡大写像からなる強連続半群で共通不動点集合 $F(\mathcal{T}) = \bigcap_{t\geq 0} F(T(t))$ は空でないとする. P を $F(\mathcal{T})$ の上への距離射影とする. $\{\alpha_n\}$ および $\{t_n\}$ を $0 < \alpha_n < 1$, $t_n > 0$, $t_n \to 0$ および $\alpha_n / t_n \to 0$ を満たす実数列とする. z を C の任意の元とし, $\{u_n\}$ を $u_n = (1 - \alpha_n) T(t_n) u_n + \alpha_n z$ によって一意に定義される C の点列とする. このとき, $\{u_n\}$ は Pz に強収束する.

Proof. 任意の $n \in \mathbf{N}$ に対して,

$$\begin{aligned}\|u_n - Pz\| &= \|(1-\alpha_n)T(t_n)u_n + \alpha_n z - Pz\| \\ &\leq (1-\alpha_n)\|T(t_n)u_n - Pz\| + \alpha_n \|z - Pz\| \\ &\leq (1-\alpha_n)\|u_n - Pz\| + \alpha_n \|z - Pz\|,\end{aligned}$$

より, $\|u_n - Pz\| \le \|z - Pz\|$ を得る. したがって, $\{u_n\}$ が有界であることが分かる. $\{u_{n_i}\}$ を $\{u_n\}$ の任意の部分列とする. $\{u_n\}$ の有界性より, C のある元 x に弱収束する $\{u_{n_i}\}$ の部分列 $\{u_{n_{i_j}}\}$ が存在する. 以降 $x_j = u_{n_{i_j}}$, $\beta_j = \alpha_{n_{i_j}}$, $s_j = t_{n_{i_j}}$ と置く. さて, x が共通不動点であることを示そう. $t > 0$ を任意に固定すると, $\{\alpha_n\}$ および $\{t_n\}$ の条件式から

$$\limsup_{j\to\infty} \left(\|x_j - T(t)x\|^2 - \|x_j - x\|^2 \right) \le 0$$

が示せる. この式と,

$$\|T(t)x - x\|^2 = \|x_j - T(t)x\|^2 - \|x_j - x\|^2 - 2\langle T(t)x - x, x - x_j \rangle$$

より, $\|T(t)x - x\|^2 \le 0$ を得る. $t > 0$ は任意であるので, $x \in F(\mathcal{T})$ が言える. 次に, $\{x_j\}$ が Pz へ強収束することを示そう.

$$\begin{aligned} \beta_j \|x_j - Pz\|^2 &+ (1-\beta_j)\langle (x_j - T(s_j)x_j) - (Pz - T(s_j)Pz), x_j - Pz \rangle \\ &= \beta_j \langle z - Pz, x_j - Pz \rangle \end{aligned}$$

および

$$\begin{aligned} &\langle (x_j - T(s_j)x_j) - (Pz - T(s_j)Pz), x_j - Pz \rangle \\ &\qquad \ge \|x_j - Pz\|^2 - \|T(s_j)x_j - T(s_j)Pz\| \cdot \|x_j - Pz\| \ge 0 \end{aligned}$$

より, $\|x_j - Pz\|^2 \le \langle z - Pz, x_j - Pz \rangle$ を得る. 距離射影の性質から $\langle z - Pz, x - Pz \rangle \le 0$ が言えるが, これを用いて,

$$\begin{aligned} \|x_j - Pz\|^2 &\le \langle z - Pz, x_j - Pz \rangle \\ &= \langle z - Pz, x_j - x \rangle + \langle z - Pz, x - Pz \rangle \\ &\le \langle z - Pz, x_j - x \rangle \end{aligned}$$

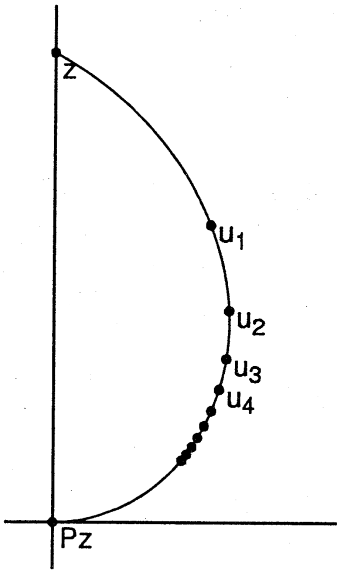
を得る. したがって, $\{x_j\}$ は Pz に強収束していることが示せた. $\{u_{n_i}\}$ は $\{u_n\}$ の任意の部分列であるから, $\{u_n\}$ 自身も Pz に強収束する. □

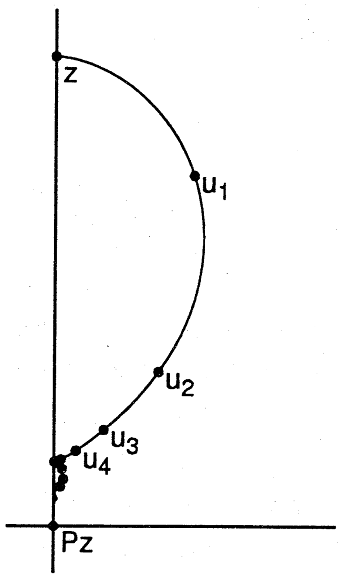
次に, 定理 2 と定理 3 を比較する. 直接比較できないので, 定理 2 から導かれる次の定理と比較する.

定理 4. C を Hilbert 空間 H の閉凸部分集合とする. $\{T(t) : t \ge 0\}$ を C 上の非拡大写像からなる強連続半群で共通不動点集合 $F(\mathcal{T}) = \bigcap_{t\ge 0} F(T(t))$ は空でないとする. P を $F(\mathcal{T})$ の上への距離射影とする. $\{\alpha_n\}$ および $\{t_n\}$ を $0 < \alpha_n < 1$, $\alpha_n \to 0$, $t_n > 0$, および $t_n \to \infty$ を満たす実数列とする. $\{\mu_n\}$ を $C([0,\infty))$ 上の mean の列で, $(\mu_n)_t(f(t)) = (1/t_n)\int_0^{t_n} f(t)dt$ と定義する. ここで, $C([0,\infty))$ は $[0,\infty)$ 上の有界連続関数全体からなる空間とする. z を C の任意の元とし, $\{u_n\}$ を $u_n = (1-\alpha_n)T_{\mu_n}u_n + \alpha_n z$ によって一意に定義される C の点列とする. このとき, $\{u_n\}$ は Pz に強収束する.

定理 3 と定理 4 の最も大きな相違点は, 定理 3 では $t_n \to 0$ であるのに対して, 定理 4 では $t_n \to \infty$ となっていることである. 具体的な場合について収束の違いを見てみよう. $C = H = \mathbf{R}^2$, $T(t)(x,y) = (\cos t \cdot x + \sin t \cdot y, -\sin t \cdot x + \cos t \cdot y)$, $z = (0,1)$ とする. 定理 3 にお

いて, $\alpha_n = 1/(n+1)$, $t_n = 1/\sqrt{n+1}$ とした場合の $\{u_n\}$ は, 下図左のような点列になる. 一方, 定理 4 において, $\alpha_n = 1/(n+1)$, $t_n = n$ とした場合の $\{u_n\}$ は, 下図右のような点列になる.





最後に, 定理 3 を Banach 空間に拡張した結果を証明抜きで述べる. ここに現れる概念については [4] 等を参照のこと.

定理 5. E を一様に Fréchet 微分可能なノルムを持つ Banach 空間, もしくは一様に Gâteaux 微分可能なノルムを持つ一様凸 Banach 空間とし, C を E の閉凸部分集合とする. $\{T(t) : t \geq 0\}$ を C 上の非拡大写像からなる強連続半群で共通不動点集合 $F(\mathcal{T}) = \bigcap_{t\geq 0} F(T(t))$ は空でないとする. P を $F(\mathcal{T})$ の上への sunny かつ非拡大なレトラクションとする. $\{\alpha_n\}$ および $\{t_n\}$ を $0 < \alpha_n < 1$, $t_n > 0$, $t_n \to 0$ および $\alpha_n/t_n \to 0$ を満たす実数列とする. z を C の任意の元とし, $\{u_n\}$ を $u_n = (1-\alpha_n)T(t_n)u_n + \alpha_n z$ によって一意に定義される C の点列とする. このとき, $\{u_n\}$ は Pz に強収束する.

参考文献

[1] F. E. Browder: *"Convergence of approximates to fixed points of nonexpansive nonlinear mappings in Banach spaces"*, Arch. Rational Mech. Anal., **24** (1967), 82–90.

[2] N. Shioji and W. Takahashi: *"Strong convergence theorems for asymptotically nonexpansive semigroups in Hilbert spaces"*, Nonlinear Anal., **34** (1998), 87–99.

[3] W. Takahashi: *"A nonlinear ergodic theorem for an amenable semigroup of nonexpansive mappings in a Hilbert space"*, Proc. Amer. Math. Soc., **81** (1981) 253–256.

[4] 高橋渉: "非線形関数解析学", 近代科学社 (1988).

DEPARTMENT OF MATHEMATICS AND INFORMATION SCIENCE, GRADUATE SCHOOL OF SCIENCE AND TECHNOLOGY, NIIGATA UNIVERSITY, NIIGATA 950–2181, JAPAN

E-mail address: `tomonari@math.sc.niigata-u.ac.jp`