数理解析研究所講究録
1071 巻 1998 年 69-81

Existence Theorems for Two Variable Functions and Fixed Point Theorems
(2変数関数の存在定理と不動点定理)

高橋　渉 (Wataru Takahashi)
東京工業大学・大学院情報理工学研究科

1. はじめに

X をある与えられた集合とし，T を X から X への写像とするとき，$T(x_0) = x_0$ となる点 x_0 を T の不動点 (fixed point) という．いわゆる「うごかない点」である．不動点の存在は，写像 T の持つ性質と作用する空間 X の性質によって決まってくるが，不動点に関する定理がいわゆる不動点定理である．不動点定理は形が単純であるがゆえに幅広い応用をもち，いろいろな分野で有効に用いられている．とくに存在に関する定理は，この定理の特別な場合であることが多く，不動点定理を通して，自然科学や社会科学の世界を眺めることは興味深いことである．

つぎに挙げる 3 つの定理は，非線形作用素に関する不動点定理として非常に重要なものである．

定理(Caristi の不動点定理)　X を完備距離空間とし，ϕ を X から $(-\infty, \infty)$ に値をとる下に有界な下半連続関数とする．T を X から X への写像で

$$d(x, T(x)) \leq \phi(x) - \phi(T(x)), \quad \forall x \in X$$

を満たすものとする．このとき，T は X の中に不動点をもつ．

定理(Lim の不動点定理)　E を一様凸な Banach 空間とし，C を E の有界閉凸集合とする．T を C から C への集合値写像で，C の点 x を，C の空でない compact 集合 Tx にうつすものとする．もし

$$H(Tx, Ty) \leq ||x - y||, \quad \forall x, y \in C$$

ならば，$x_0 \in Tx_0$ となる点 x_0 が存在する．ただし，H は Hausdorff の距離である．

定理(Fan-Browder の不動点定理)　E を線形位相空間とし，X を E の compact で凸な E の部分集合とする．T を X から X への集合値写像で，つぎの条件を満たすものとする．

(1) 任意の $y \in X$ に対して，$T^{-1}y$ は空でない凸集合である;

(2) 任意の $x \in X$ に対して，Tx は開集合である．

このとき，$x_0 \in Tx_0$ となる $x_0 \in X$ が存在する．

ここではこれら3つの定理について，2変数関数の立場からその存在定理を議論してみたい.

X をある集合とする. このとき $X \times X$ から $[0,1]$ への 2 変数関数 $F(x,y)$ を考える. 2変数関数 F に対して, $F(z,z)=1$ となる X の点 z を F の不動点という. T を X から 2^X (X の部分集合の全体) への写像とするとき, X 上の 2 変数関数 F を

$$F(x,y) = 1_{Tx}(y)$$

とすれば, F の不動点 z は, 実際 $z \in Tz$ となり, T の不動点となる. ただし, 1_A は $A \subset X$ の特性関数である。ここではまず初めに, 完備距離空間上で 2 変数関数に対する不動点定理をを証明する: X を完備距離空間とし、 F を $X \times X$ から $[0,1]$ への 2 変数関数とする. また, $\phi : X \to (-\infty, \infty]$ を proper で下に有界な下半連続関数とする. このとき, 任意の $x \in X$ に対して

$$F(x,y) = 1, \quad \phi(y) + d(x,y) \leq \phi(x)$$

となる $y \in X$ が常に存在するならば, F の不動点, すなわち $F(z,z)=1$ となる点 $z \in X$ が存在する. これは Caristi の不動点定理 [3] の一般化になっている. 実際この定理から Ekeland の変分不等式 [5] や Nadler の不動点定理 [11] 等が証明される. つぎに局所凸線形位相空間上で 2 変数関数に対する不動点定理を証明する: X を局所凸線形位相空間 E のコンパクトな凸集合とし, F を $X \times X$ から $[0,1]$ への上半連続な 2 変数関数とする. このとき, 任意の $x \in X$ に対して, $F(x,y)=1$ となる $y \in X$ が常に存在するならば, F の不動点, すなわち $F(z,z)=1$ となる点 z が存在する. この後, この定理を用いて, いくつかの定理を得る. 最後に, Banach 空間における集合値写像の不動点定理 (Lim の不動点定理) を filter の議論を用いて証明する. Lim の定理は現在なお 2 変数関数の立場から議論されていないが, ここでの証明がその議論に役立てば幸いである.

2. 完備距離空間での不動点定理

この節では, 2 変数関数に関する不動点定理を完備距離空間の場合で議論しよう. その前に, 最近, 加田-鈴木-高橋 [8] によって導入された距離空間上の新しい距離の概念 “弱距離” について述べておこう.

定義 (X,d) を距離空間とし, p を $X \times X$ 上で定義された非負の値をとる実数値関数とする. このとき, p がつぎの 3 つの条件 (1), (2), (3) を満たすならば X 上の w-distance といわれる.

(1) $p(x,z) \leq p(x,y) + p(y,z)$ が $x,y,z \in X$ についていえる;

(2) 任意の $x \in X$ に対し, $p(x,\cdot) : X \to [0,\infty)$ は下半連続である;

(3) 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $\delta > 0$ が存在して, $p(x,z) \leq \delta$, $p(x,y) \leq \delta$ ならば $d(z,y) \leq \varepsilon$ である.

距離空間 (X,d) の d は X 上の w-distance である. X 上の w-distance の例は他にもいろいろとあるが, ここでは4つの例をあげておこう.

例 1　X を線形ノルム空間とし, $p : X \times X \to [0,\infty)$ を

$$p(x,y) = ||y||, \quad \forall x,\ y \in X$$

で定義しよう. このとき, p は w-distance である.

例 2　(X,d) を距離空間とし, T を X から X への連続写像としよう. このとき

$$p(x,y) = \max\{d(Tx,y), d(Tx,Ty)\}, \quad \forall x,\ y \in X$$

で定義される p は X 上の w-distance である.

例 3　(X,d) を距離空間とし, $F \subset X$ を2点以上を含む有界な閉集合とする. $c \geq \delta(F)$ とし, p を

$$p(x,y) = \begin{cases} d(x,y), & \forall x,\ y \in F, \\ c, & \forall x \notin F \ or \ y \notin F \end{cases}$$

で定義すると, p は X 上の w -distance である. ただし, $\delta(F)$ は F の直径を表す.

例4を書く前に, 定義を1つしておこう. $\varepsilon > 0$ とする. 距離空間 (X,d) が ε-chainable であるとは, 任意の $x,\ y \in X$ に対して, X の有限集合 $\{u_0, u_1, \cdots, u_k\}$ が存在し

$$u_0 = x,\ u_k = y,\ d(u_i, u_{i+1}) < \varepsilon\ (i = 0, 1, \cdots, k-1)$$

となるときをいう. $\{u_0, u_1, \cdots, u_k\}$ を x, y の ε-chain という.

例 4　$\varepsilon > 0$ とし, 距離空間 (X,d) を ε-chainable であるとする. このとき, $p : X \times X \to [0,\infty)$ を $x,\ y \in X$ に対して

$$p(x,y) = \inf\left\{\sum_{i=0}^{k-1} d(u_i, u_{i+1}) : \{u_0, u_1, \cdots, u_k\} \text{ は } x, y \text{ の } \varepsilon\text{-chain}\right\}$$

で定義すると, p は X 上の w-distance である.

w-distance p を用いて述べられるつぎの定理 (定理 2.1) は Caristi の不動点定理を拡張したものである.

定理 2.1　X を完備距離空間とし, $F : X \times X \to [0,1]$ を2変数関数とする. $f : X \to (-\infty, \infty]$ を下から有界な proper で下半連続な関数とする. $p : X \times X \to [0,\infty)$ を w-distance とし

$$M(x) = \sup_{y \in X} F(x,y), \quad \forall x \in X$$

とする. このとき, 任意の $x \in X$ に対して

$$F(x,y) = M(x), \quad f(y) + p(x,y) \le f(x)$$

を満たす $y \in X$ が存在するならば

$$F(z,z) = M(z)$$

となる $z \in X$ が存在する.

定理 2.1 の直接の結果として, つぎの定理が証明できる.

定理 2.2 X を完備距離空間とし, $F : X \times X \to [0,1]$ を 2 変数関数とする. $f : X \to (-\infty, \infty]$ を下に有界な proper で下半連続な関数とし, $p : X \times X \to [0,\infty)$ を w-distance とする. このとき, 任意の $x \in X$ に対して

$$F(x,y) = 1, \quad f(y) + p(x,y) \le f(x)$$

を満たす $y \in X$ が存在するならば

$$F(z,z) = 1$$

となる $z \in X$ が存在する.

定理 2.2 において, 特に $p = d$ とおくと, つぎの定理が得られる.

定理 2.3 X を完備距離空間とし, $f : X \to (-\infty, \infty]$ を下に有界な proper で下半連続な関数とする. $F : X \times X \to [0,1]$ を 2 変数関数とする. このとき, 任意の $x \in X$ に対して

$$F(x,y) = 1, \quad f(y) + d(x,y) \le f(x)$$

を満たす $y \in X$ が存在するならば

$$F(x_0,x_0) = 1$$

となる $x_0 \in X$ が存在する.

定理 2.3 を用いて, 完備距離空間上の定理として重要で, かつ よく知られているつぎの 2 つの定理を証明してみよう. その前に定義を 1 つ与えておく. (X,d) を距離空間とし, $CB(X)$ を空でない有界閉集合の全体とする. このとき, $CB(X)$ 上の Hausdorff の距離を

$$H(A,B) = \max\left\{\sup_{u\in A} d(u,B),\ \sup_{v\in B} d(v,A)\right\},\ \forall A,B \in CB(X)$$

で定義する. ただし, $d(x,A) = \inf\{d(x,y) \ : \ y \in A\}$ である.

系 2.4(Nadler)　X を完備距離空間とし, $T : X \to CB(X)$ をつぎの条件を満たす集合値写像とする.

$$H(Tx, Ty) \leq kd(x, y), \quad \forall x, y \in X$$

となる $k(0 \leq k < 1)$ が存在する. このとき, $x_0 \in Tx_0$ となる $x_0 \in X$ が存在する.

証明

$$F(x, y) = 1_{Tx}(y), \quad \forall x, y \in X$$

とし, ε を $0 < \varepsilon < \frac{1}{k} - 1$ となる実数としよう. ここで定理の結論を否定すると, すべての $x \in X$ に対して $d(x, Tx) > 0$ となる. これより 任意の $x \in X$ に対して

$$F(x, y) = 1, \quad d(x, y) \leq (1 + \varepsilon)d(x, Tx)$$

となる $y \in X$ の存在がいえる.

$$d(y, Ty) \leq H(Tx, Ty) \leq kd(x, y)$$

であるので

$$\begin{aligned} d(x, Tx) - d(y, Ty) &\geq \frac{1}{1+\varepsilon} d(x, y) - kd(x, y) \\ &= (\frac{1}{1+\varepsilon} - k) d(x, y) \end{aligned}$$

を得る. ここで

$$f(x) = (\frac{1}{1+\varepsilon} - k)^{-1} d(x, Tx)$$

とおくと, 上の不等式は

$$f(y) + d(x, y) \leq f(x)$$

となる. 定理 2.3 を用いると $F(x_0, x_0) = 1$, i.e., $x_0 \in Tx_0$ となる $x_0 \in X$ が存在する. これは矛盾であるので定理は証明されたことになる.　□

定理 2.5(Ekeland)　X を完備距離空間とし, $\varphi : X \to (-\infty, \infty]$ を下に有界な proper で下半連続な関数とする. このとき

$$\varphi(u) \leq \inf_{x \in X} \varphi(x) + \varepsilon$$

となる $\varepsilon > 0$ と $u \in X$ に対して, つぎの条件 (1), (2), (3) を満たす $x_0 \in X$ が存在する.

(1) $\varphi(x_0) \leq \varphi(u)$;

(2) $d(u, x_0) \leq 1$;

(3) $\varphi(w) > \varphi(x_0) - \varepsilon d(x_0, w)$ が $w \neq x_0$ となる任意の $w \in X$ について成り立つ.

証明 $\varphi(u) \leq \inf_x \varphi(x) + \varepsilon$ となる $\varepsilon > 0$ と $u \in X$ に対して

$$X' = \{x \in X : \varphi(x) \leq \varphi(u) - \varepsilon d(u, x)\}$$

とおく. このとき, X' は 閉であり, $X' \ni u$ である. $x \in X'$ に対して

$$Sx = \{y \in X : y \neq x, \varphi(y) \leq \varphi(x) - \varepsilon d(x, y)\}$$

とおくと, $y \in Sx$ ならば $y \in X'$ である. ここで 2 変数関数 $F : X' \times X' \to [0, 1]$ をつぎのように定義する:

$$Sx = \phi \text{ のとき}, \quad F(x, y) = \begin{cases} 0 & (y \neq x) \\ 1 & (y = x), \end{cases}$$

$$Sx \neq \phi \text{ のとき}, \quad F(x, y) = \begin{cases} 0 & (y \notin Sx) \\ 1 & (y \in Sx). \end{cases}$$

すると, 任意の $x \in X'$ に対して

$$F(x, y) = 1, \quad \varphi(y) + \varepsilon d(x, y) \leq \varphi(x)$$

となる $y \in X'$ が存在する. ここで 定理 2.3 を用いると $F(x_0, x_0) = 1$ となる $x_0 \in X'$ の存在がわかる. すなわち $Sx_0 = \phi$ となる $x_0 \in X'$ の存在がいえる. だから

$$\varphi(w) > \varphi(x_0) - \varepsilon d(x_0, w), \quad \forall w \in X (w \neq x_0)$$

である. また $x_0 \in X'$ であるので

$$\varphi(x_0) \leq \varphi(u) - \varepsilon d(u, x_0) \leq \varphi(u)$$

がいえる. さらに

$$\varepsilon d(u, x_0) \leq \varphi(u) - \varphi(x_0) \leq \varphi(u) - \inf_x \varphi(x) \leq \varepsilon$$

であるので $d(u, x_0) \leq 1$ もわかる. □

w-distance を用いて, Nadler の不動点定理を拡張する不動点定理が得られる. 定理を述べる前に, 定義を 1 つ与えておく. (X, d) を距離空間とし, T を X から X への集合値写像とする. このとき, T が weakly contractive または p-contractive であるといわれる

ためには，ある w-distance p と r $(0 \le r < 1)$ が存在し，任意の $x_1, x_2 \in X$ と $y_1 \in Tx_1$ に対して，$p(y_1, y_2) \le rp(x_1, x_2)$ となる $y_2 \in Tx_2$ がつねに存在するときをいう．

定理 2.6　(X, d) を完備距離空間とし，T を X から X への p-contractive な集合値写像で，任意の $x \in X$ に対して Tx は空でない閉集合とする．このとき，$Tx_0 \ni x_0$ かつ $p(x_0, x_0) = 0$ となる $x_0 \in X$ が存在する．

この定理を用いると，Nadler の不動点定理と Edelstein の不動点定理を同時に拡張するつぎの定理 (定理 2,7 [14]) が得られる．定理を述べる前に定義を 1 つ与えておく．(X, d) を距離空間とし，T を X から $CB(X)$ への写像とする．このとき $\varepsilon > 0$ に対して T が (ε, σ)-uniformly locally contractive であるといわれるためには，ある $\sigma \in [0, 1)$ が存在し，$d(x, y) < \varepsilon$ となる $x, y \in X$ に対して

$$H(Tx, Ty) \le \sigma d(x, y)$$

が成り立つときをいう．

定理 2.7　$\varepsilon \in (0, \infty]$ とする．(X, d) を ε-chainable な完備距離空間とし，T を X から $CB(X)$ への (ε, σ)-uniformly locally contractive な写像とする．このとき，$Tx_0 \ni x_0$ となる $x_0 \in X$ が存在する．

定理 2.7 において $\varepsilon = \infty$ の場合が Nadler の不動点定理であり，T が一価の場合が Edelstein の不動点定理である．

3. 線形位相空間での不動点定理

つぎに, 局所凸線形位相空間での 2 変数関数の不動点定理を述べることにしよう.

定理 3.1　E を局所凸線形位相空間とし, X を E のコンパクトで凸な集合とする. $F : X \times X \to [0, 1]$ を上半連続な 2 変数関数とし, 任意の $x \in X$ に対して, $y \mapsto F(x, y)$ は quasi-concave を満たすものとする. さらに

$$M(x) = \sup\{F(x, y) : y \in X\}, \quad \forall x \in X$$

で定義される関数 $M : X \to [0, 1]$ は下半連続を満たすものとする. このとき

$$F(x_0, x_0) = M(x_0)$$

となる $x_0 \in X$ が存在する.

定理 3.1 より, つぎの定理がただちに得られる.

定理 3.2　E を局所凸線形位相空間とし, X を E のコンパクトで凸な集合とする. $F : X \times X \to [0, 1]$ を上半連続な 2 変数関数とし, 任意の $x \in X$ に対して, $y \mapsto F(x, y)$ は quasi-concave を満たすものとする. さらに, 任意の $x \in X$ に対して, $F(x, y) = 1$ となる $y \in X$ が存在するならば, $F(x_0, x_0) = 1$ となる $x_0 \in X$ が存在する.

定理 3.1 を用いると, Fan[7] によって証明されたつぎの 2 つの結果も得られる.

系 3.3(Fan)　E を線形ノルム空間とし, X を E のコンパクトで凸な集合とする. もし $T : X \to E$ を連続な写像とするならば

$$\|x_0 - Tx_0\| = \min_{y \in X} \|y - Tx_0\|$$

となる $x_0 \in X$ が存在する.

証明

$$M = \sup\{\|y - Tx\| : x, y \in X\},$$

$$F(x, y) = 1 - \|y - Tx\|/M, \quad \forall x, y \in X$$

とする. このとき, $F : X \times X \to [0, 1]$ は連続であり, 任意の $x \in X$ に対して $y \mapsto F(x, y)$ は concave となる. また $M(x) = \sup_{y \in X} F(x, y)$ は下半連続となる. ここで定理 3.1 を用いると $F(x_0, x_0) = M(x_0)$ となる $x_0 \in X$ が存在する. これは

$$1 - \frac{\|x_0 - Tx_0\|}{M} = 1 - \inf_{y \in X} \frac{\|y - Tx_0\|}{M}$$

を意味するので, $\|x_0 - Tx_0\| = \inf_{y \in X} \|y - Tx_0\|$ を得る.　□

上の系 3.3 で, $T : X \to X$ とすると, 有名な Schauder の不動点定理が得られる.

系 3.4(Fan)　E を局所凸線形位相空間とし, X を E のコンパクトで凸な集合とする. $T : X \to E$ を連続な写像とするとき, つぎの (1) または (2) が成立する.

(1) $Ty_0 = y_0$ となる $y_0 \in X$ が存在する;

(2) $0 < p(x_0 - Tx_0) = \min_{y \in X} p(y - Tx_0)$ となる $x_0 \in X$ と E 上の連続なセミノルム p が存在する.

証明　任意の $x \in X$ に対して, $Tx \neq x$ を仮定しよう. $x \in X$ に対して $Tx \neq x$ なので $p_x(x - Tx) > 0$ となる連続なセミノルム p_x が存在する. ここで

$$Gx = \{y \in X : p_x(y - Ty) > 0\}, \quad \forall x \in X$$

とおくと, $\{Gx : x \in X\}$ は X の開被覆となる. X はコンパクトなので, X の開被覆 $\{Gx_1, Gx_2, \ldots,$
$Gx_n\}$ がとれる. この開被覆に対応する 1 の分解を $\{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n\}$ とし, この 1 の分解を使って

$$M = \sup_{x, y \in X} \sum_{i=1}^{n} \beta_i(x) p_{x_i}(y - Tx)$$

を定義する．また，$x, y \in X$ に対して

$$F(x,y) = 1 - \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} \beta_i(x) p_{x_i}(y - Tx),$$

$$M(x) = \sup_{y \in X} F(x,y)$$

とすると，定理 3.1 より $F(x_0, x_0) = M(x_0)$ となる $x_0 \in X$ の存在がわかる．ここで

$$p = \sum_{i=1}^{n} \beta_i(x_0) p_{x_i}$$

とおくと

$$0 < p(x_0 - Tx_0) = \inf_{y \in X} p(y - Tx_0)$$

を得る．　□

つぎの定理は集合値写像に関する Fan-Browder の不動点定理である．

定理 3.5　X を線形位相空間 E (Hausdorff は仮定する) のコンパクト凸集合とする．A をつぎの条件 (1) と (2) を満たす X から X への集合値写像とする．

(1) 任意の $y \in X$ に対して，$A^{-1}y$ は開集合である；

(2) 任意の $x \in X$ に対して，Ax は空でない凸集合である．

このとき，$x_0 \in Ax_0$ となる $x_0 \in X$ が存在する．

これを 2 変数関数 F を用いて書き表すとつぎのようになる．

定理 3.6　X を線形位相空間のコンパクトな凸集合とし，F をつぎの条件 (1),(2),(3) を満たす $X \times X$ 上の実数値関数とする．

(1) 任意の $y \in X$ に対して，x の関数 $F(x,y)$ は上半連続である；

(2) 任意の $x \in X$ に対して，y の関数 $F(x,y)$ は quasi-convex である；

(3) $F(x,x) \geq 0$ $(\forall x \in X)$ となるような実数 c が存在する．

このとき，$F(x_0, y) \geq 0$ $(\forall y \in X)$ となるような $x_0 \in X$ が存在する．

定理 3.1 は Fan の集合値写像の不動点定理 [6] を 2 変数関数で表現したものであるが，Fan-Browder の不動点定理 (定理 3.5) を 2 変数関数の不動点定理の形で表現したらどのようになるだろうか．興味のあることである．

4. Banach 空間での不動点定理

この節では，集合値写像に関する Lim の不動点定理を中心に議論する．X を空でない集合とし，$\mathbb{F}$ を X の部分集合からなる空でない族とする．このとき，$\mathbb{F}$ が X 上の filter であるとは，つぎの 3 つの条件を満たすときである．

(1) $\phi \notin \mathbb{F}$ である；

(2) $A \subset B$ でかつ $A \in \mathbb{F}$ ならば $B \in \mathbb{F}$ である；

(3) $A, B \in \mathbb{F}$ ならば $A \cap B \in \mathbb{F}$ である．

$\mathbb{F}_1$，$\mathbb{F}_2$ が X 上の filters で，$\mathbb{F}_1 \subset \mathbb{F}_2$ を満たすならば，$\mathbb{F}_2$ は $\mathbb{F}_1$ より finer であるといわれる．X 上の filter $\mathbb{A}$ は，$\mathbb{A}$ 以外に $\mathbb{A}$ を含む X 上の filter が存在しないとき ultrafilter であるといわれる．X の部分集合からなる空でない族 $\mathbb{B}$ が X 上の filterbase であるとは，つぎの 2 つの条件を満たすときである．

(1) $\phi \notin \mathbb{B}$ である；

(2) $A_1, A_2 \in \mathbb{B}$ に対して，$A_3 \subset A_1 \cap A_2$ となる $A_3 \in \mathbb{B}$ が存在する．

$\mathbb{B}$ が X 上の filterbase であるとき，$\mathbb{F} = \{A \subset X \ : \ B \subset A,\ B \in \mathbb{B}\}$ は X の filter になる．このとき，$\mathbb{B}$ は $\mathbb{F}$ の base であるといわれる．X を位相空間とし，$\mathbb{B}$ を X 上の filterbase としよう．$\mathbb{B}$ が X の点 x に収束するとは，x の任意の近傍 V に対して，$A \subset V$ となる $\mathbb{B}$ の元 A が存在することである．$\mathbb{A}$ がコンパクト集合 X 上の ultrafilter であるとき，$\mathbb{A}$ は X のある点に収束することが知られている．また $\mathbb{A}$ が集合 X 上の ultrafilter で，P が X から D への写像であるなら $P(\mathbb{A})$ は D 上の filterbase になる．さらに，この $P(\mathbb{A})$ は D 上の ultrafilter を生成する．実際，$\mathbb{A}$ が X 上の ultrafilter であるから，$P(\mathbb{A})$ が D 上の filterbase となることは明らかである．

$$\mathbb{B} = \{B \subset D \ : \ P(A) \subset B \text{ for some } A \in \mathbb{A}\}$$

とし，$\mathbb{K}$ を $\mathbb{K} \supset \mathbb{B}$ となる D 上の filter としよう．$K \in \mathbb{K}$ なら $P^{-1}K \in \mathbb{A}$ または $P^{-1}K^c \in \mathbb{A}$ である．$A = P^{-1}K^c \in \mathbb{A}$ とすると，$P(A) = P(P^{-1}K^c) \subset K^c$ であるから $K^c \in \mathbb{B}$ となる．これは矛盾である．よって $P^{-1}K \in \mathbb{A}$ である．$P(P^{-1}K) \subset K$ なので，$K \in \mathbb{B}$ を得る．だから $\mathbb{K} = \mathbb{B}$ となる．これは $\mathbb{B}$ が D 上の ultrafilter であることを意味する．

E を一様な凸な Banach 空間とし，$\mathbb{B}$ を有界集合を少なくとも 1 つ含むような E 上の filterbase とする．ここで $D(\subset E)$ 上の実数値関数

$$r(x, \mathbb{B}) = \inf_{A \in \mathbb{B}} \sup_{y \in A} ||x - y||, \quad \forall x \in D$$

を考えると

$$|r(x, \mathbb{B}) - r(y, \mathbb{B})| \le ||x - y||, \quad \forall x, y \in D$$

を満たすから，D 上で連続となる．また D を閉凸集合とすると，$r(\cdot, \mathbb{B})$ は凸関数となり，$||x_n|| \to \infty$ ならば $r(x_n, \mathbb{B}) \to \infty$ をも満たすから

$$r(u_0, \mathbb{B}) = \min_{x \in D} r(x, \mathbb{B})$$

となる $u_0 \in D$ が存在する．ここで空間 E の一様凸性を使うとこのような u_0 が一意であることがわかる．この結果を用いて Lim の定理を証明しよう．

定理 4.1　X を一様凸 Banach 空間 E の有界閉凸集合とする．T を X から X への集合値非拡大写像で，任意の $x \in X$ に対して，Tx が空でないコンパクト集合であるとする．このとき，X の中に T の不動点が存在する．

証明　$x_0 \in X$ とする．$n = 2, 3, \cdots$ に対して

$$T_n x = \frac{1}{n} x_0 + (1 - \frac{1}{n}) Tx, \quad \forall x \in X$$

を定義する．このとき，Nadler の不動点定理 (系 2.4) を用いると $T_n x_n \ni x_n$ となる T_n の不動点 x_n が存在する．この点列 $\{x_n\}$ は $d(x_n, Tx_n) \to 0$ $(n \to \infty)$ を満たす．ここで

$$A_n = \{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \cdots\}$$

を定義する．このとき，$\{A_n\}$ は X 上の filterbase となる．$\mathbb{F}$ を $\{A_n\}$ によって生成される filter とし，$\mathbb{A}$ を $\mathbb{F}$ より finer な ultrafilter とする．明らかに

$$\inf_{A \in \mathbb{A}} \sup_{x \in A} d(x, Tx) = 0$$

である．ここで $u_0 \in X$ を $r(u_0, \mathbb{A}) = \inf_{x \in X} r(x, \mathbb{A})$ を満たす一意の元とすると，任意の元 $x \in X$ に対して，Tx が空でないコンパクト集合であることより

$$||x - Sx|| = d(x, Tx), \ ||Sx - Px|| = d(Sx, Tu_0)$$

を満たすような $Sx \in Tx$，$Px \in Tu_0$ を得ることができる．X から Tu_0 への写像 P に対して，$P(\mathbb{A})$ は Tu_0 上の filterbase になり，さらに $P(\mathbb{A})$ によって生成される filter は ultrafilter になる．Tu_0 はコンパクトなので，$P(\mathbb{A})$ は Tu_0 の中に極限 p_0 をもつ．この p_0 に対して H を Hausdorff の距離とすると

$$\begin{aligned}
r(p_0, \mathbb{A}) &= \inf_{A \in \mathbb{A}} \sup_{x \in A} ||p_0 - x|| \\
&\le \inf_{A \in \mathbb{A}} \sup_{x \in A} \{||p_0 - Px|| + ||Px - Sx|| + ||Sx - x||\} \\
&= \inf_{A \in \mathbb{A}} \sup_{x \in A} \{||p_0 - Px|| + d(Sx, Tu_0) + d(x, Tx)\} \\
&\le \inf_{A \in \mathbb{A}} \sup_{x \in A} \{||p_0 - Px|| + H(Tx, Tu_0) + d(x, Tx)\} \\
&\le \inf_{A \in \mathbb{A}} \sup_{x \in A} \{||p_0 - Px|| + ||x - u_0|| + d(x, Tx)\} \\
&= \inf_{A \in \mathbb{A}} \sup_{x \in A} ||x - u_0|| \\
&= r(u_0, \mathbb{A})
\end{aligned}$$

を得る．だから $u_0 = p_0 \in Tu_0$ を得る．これで証明は完了する．　□

Lim の不動点定理は 2 変数関数の存在定理の形で表せないのだろうか．この問題は現在なお解けていない．

参考文献

1. S. Amemiya and W. Takahashi, Generalization of shadows and fixed point theorems for fuzzy sets, Fuzzy Sets and Systems, to appear.
2. F. E. Browder, The fixed point theory of multi-valued mappings in topolegical vector spaces, Math. Ann., 177 (1969), 283-301.
3. J. Caristi, Fixed point theorems for mappings satisfying inwardness conditions, Trans. Amer. Math. Soc., 215 (1976), 241-251.
4. M. Edelstein, An extension of Banach's contraction principle, Proc. Amer. Math. Soc., 12 (1961), 7-10.
5. I. Ekeland, Nonconvex minimization problems, Bull. Amer. Math. Soc., 1 (1979), 443-474.
6. K. Fan, Fixed point and minimax theorems in locally convex topological linear spaces, Proc. Nat. Acad. Sci. USA., 38 (1952), 121-126.
7. K. Fan, Extensions of the two fixed point theorems of F. E. Browder, Math. Z., 112 (1969), 234-240.
8. O. Kada, T. Suzuki and W. Takahashi, Nonconvex minimization theorems and fixed point theorems in complete metric spaces, Math. Japonica, 44 (1996), 381-391.
9. T. C. Lim, A fixed point theorem for multivalued nonexpansive mappings in a uniformly convex Banach space, Bull. Amer. Math. So., 80 (1974), 1123-1126.
10. N. Mizoguchi and W. Takahashi, Fixed point theorems for multivalued mappings on complete metric spaces, J. Math. Anal. Appl., 141 (1989), 177-188.
11. S. B. Nadler Jr., Multi-valued contraction mappings, Pacific J. Math., 30 (1969), 475-488.
12. T. Shimizu and W. Takahashi, Fixed point theorems in certain convex metric spaces, Math. Japonica, 37 (1992), 855-859.
13. T. Shimizu and W. Takahashi, Fixed points of multivalued mappings in certain convex metric spaces, Topol. Mathods Nonlinear Anal., 8 (1996), 197-203.
14. T. Suzuki and W. Takahashi, Fixed point theorems and characterizations of metric completeness, Topol. Methods Nonlinear Anal., 8 (1996), 371-382.
15. M. Takahashi and W. Takahashi, Separation theorems and minimax theorems for fuzzy sets, J. Optim. Theory Appl., 31 (1980), 177-194.

16. W. Takahashi, Nonlinear variational inequalities and fixed point theorems, J. Math. Soc. Japan, 28 (1976), 168-181.

17. W. Takahashi, Recent results in fixed point theory, SEA Bull. Math., 4 (1981), 59-85.

18. W. Takahashi, Fixed point theorems for families of nonexpansive mappings on unbounded sets, J. Math. Soc. Japan, 36 (1984), 543-553.

19. 高橋 渉, 非線形関数解析学 – 不動点定理とその応用 –, 近代科学社, 1988.

20. W. Takahashi, Existence theorems generalizing fixed point theorems for multivalued mappings, Fixed Point Theory and Applications (J. B. Baillon and M. Théra eds), Pitman Research Notes in Mathematical Series 252, 1991, 397-406.

21. W. Takahashi, Fuzzy sets and fixed point theorems, 最適化基礎理論とその応用 (田中謙輔・安田正美 編), 1992, 79-85.

22. L. A. Zadeh, Fuzzy sets, Inform. Control, 8 (1965), 338-353.