数理解析研究所講究録
1072巻 1998年 103-119

カオスニューラルネットの対称性

Motomasa Komuro
小室元政
帝京科学大学

1 カオスニューラルネット

力学系のネットワーク全体の振舞いを理解する上で，不変部分空間の束構造と不変部分空間上に制限したシステムの振舞いを知ることは、しばしば、重要な役割を果たす。このノートの目的は，いくつかのパターンを記憶させたカオスニューラルネットワークにおける不変部分空間の束構造を明らかにすることである。この束構造を踏まえて、「記憶の動的想起のメカニズム」の解明を、引き続き予定している。

定義 1 $N \geq 1$ とする。次の式で定義される力学系

$$\Phi = (\Phi_1, \Phi_2) : \mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N \hookleftarrow$$

をカオスニューラルネット *(CNN)* という。

$$(*) \qquad \begin{cases} \Phi_1(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = k_1 \boldsymbol{y} + W\boldsymbol{x} \\ \Phi_2(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = k_2 \boldsymbol{z} + \boldsymbol{a} - \alpha \boldsymbol{x} \end{cases} \tag{1}$$

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = (g_\varepsilon(y_i + z_i))_{i=1}^N \tag{2}$$

但し、

$$k_1, k_2, \alpha > 0,\ \boldsymbol{a} = (a, \cdots, a)^\top \in \mathbf{R}^N$$
$$W = (w_{ij})_{1 \leq i,j \leq N};\ N \times N \text{ 行列},$$
$$g_\varepsilon(u) = (1 + \exp(-u/\varepsilon))^{-1}$$

時刻 $t \geq 0$ に対する時間発展を各成分ごとに表示すれば、

$$\begin{aligned} y_i(t+1) &= k_1 y_i(t) + \sum_{j=1}^N w_{ij} g_\varepsilon(y_j(t) + z_j(t)) \\ z_i(t+1) &= k_2 z_i(t) + a - \alpha g_\varepsilon(y_i(t) + z_i(t)) \quad 1 \leq i \leq N \end{aligned}$$

となる。

定義 2 成分に 0 または 1 を持つ $\mathbf{R}^N$ の元 $\boldsymbol{p}$；

$$\boldsymbol{p} = (p_1, \cdots, p_N)^\top, \quad p_i = 0 \ or \ 1 \quad (1 \leq i \leq N) \tag{3}$$

をパターンという。パターン列 $\boldsymbol{p}^1, \cdots, \boldsymbol{p}^M$ に対して $N \times N$ 行列

$$W = (w_{ij}) \tag{4}$$

$$w_{ij} = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^{M} w_{ij}^m, \tag{5}$$

$$w_{ij}^m = (2p_i^m - 1)(2p_j^m - 1) \tag{6}$$

を $\boldsymbol{p}^1, \cdots, \boldsymbol{p}^M$ が定める結合行列という。 W は各 $\boldsymbol{p}^m$ の相関行列の相加平均である。

例 1 $N = 4$ のCNNを考える。パターン $\boldsymbol{p}^1, \boldsymbol{p}^2$ を

$$\boldsymbol{p}^1 = (1, 1, 0, 0)^\top, \qquad \boldsymbol{p}^1 = (0, 1, 1, 0)^\top$$

で与える。各パターンの相関行列 W^1, W^2 は

$$W^1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad W^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

であたえられる。$\boldsymbol{p}^1, \boldsymbol{p}^2$ が定める結合行列 $W = \frac{1}{2}(W^1 + W^2)$ は

$$W = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

であたえられる。

2　第１不変部分空間

定義 3 （1） システム

$$\boldsymbol{u}(t+1) = F(\boldsymbol{u}(t)), \quad \boldsymbol{u}(t) \in \mathbf{R}^n$$

は、変換 $P : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ に対して $P \circ F = F \circ P$ を満たすとき、$P-$ 不変であるという。

（2）部分空間 $H \subset \mathbf{R}^n$ は

$$\boldsymbol{u} \in H \Rightarrow F(\boldsymbol{u}) \in H$$

を満たすとき、$F-$ 不変であるという。

ここではシステム Φ の不変部分空間を調べる。

定義 4 S_N を N 次の対称群、σ を S_N の元とするとき、座標変換 $P_\sigma : \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}^N$ を

$$P_\sigma : (u_1, \cdots, u_N)^\top \mapsto (u_{\sigma(1)}, \cdots, u_{\sigma(N)})^\top$$

で定義する。P_σ の変換行列 (p_{ij}) は

$$p_{ij} = \begin{cases} 1 & (\sigma(i) = j) \\ 0 & (other) \end{cases}$$

で与えられる。変換行列を変換と同じ記号 P_σ で表す。定義から明らかに、

$$P_\sigma^{-1} = P_{\sigma^{-1}} = P_\sigma^\top$$

である。

命題 1 $Q = (q_{ij})$ を $N \times N$ 行列とする。このとき、

$$P_\sigma Q = (q_{\sigma(i)j}), \qquad QP_\sigma = (q_{i\sigma^{-1}(j)})$$

が成り立つ。

(証明)

$$p_{ik} = \begin{cases} 1 & (\sigma(i) = k) \\ 0 & (other) \end{cases}$$

であるから、

$$P_\sigma Q = (\sum_k p_{ik} q_{kj}) = (p_{i\sigma(i)} q_{\sigma(i)j}) = (q_{\sigma(i)j})$$

$$QP_\sigma = (\sum_k q_{ik} p_{kj}) = (q_{i\sigma^{-1}(j)} p_{\sigma^{-1}(j)j}) = (q_{i\sigma^{-1}(j)})$$

(証終)

例 2

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \in S_3$$

のとき、

$$p_{ij} = \begin{cases} 1 & (\sigma(i) = j) \\ 0 & (other) \end{cases} \tag{7}$$

$$= \begin{cases} 1 & (i, j) = (1, 2), (2, 3), (3, 1) \\ 0 & (other) \end{cases} \tag{8}$$

であるから、

$$P_\sigma = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

定義 5 $W=(w_{ij})_{1\leq i,j\leq N}$ に対して、

$$C(W)=\{\sigma\in S_N | w_{ij}=w_{\sigma(i)\sigma(j)} \quad (1\leq i,j\leq N)\}$$

を W の固定部分群という。

命題 2 *(1)* $\sigma\in C(W)\Longleftrightarrow P_\sigma W=WP_\sigma$
(2) $C(W)$ は S_N の部分群

（証明）(1) $\sigma\in C(W)$ ならば、

$$(w_{ij})P_\sigma=(w_{\sigma(i),\sigma(j)})P_\sigma=(w_{\sigma(i),j})=P_\sigma(w_{ij}).$$

逆に、$P_\sigma W=WP_\sigma$ ならば、

$$(w_{\sigma(i),\sigma(j)})=P_\sigma(w_{i,\sigma(j)})=(w_{i,\sigma(j)})P_\sigma=(w_{ij})$$

(2) σ, $\tau\in C(W)$ ならば、

$$(w_{\sigma\tau(i),\sigma\tau(j)})=(w_{\tau(i),\tau(j)})=(w_{i,j})$$

よって、$\sigma\tau\in C(W)$. また、

$$(w_{\sigma^{-1}(i),\sigma^{-1}(j)})=(w_{\sigma\sigma^{-1}(i),\sigma\sigma^{-1}(j)})=(w_{ij}).$$

よって、$\sigma^{-1}\in C(W)$ 従って、$C(W)$ は部分群である。（証終）

定義 6 座標変換 $P_\sigma:\mathbf{R}^N\hookleftarrow$ に対して、$\mathbf{R}^{2N}$ 上の変換 $P_\sigma\times P_\sigma:\mathbf{R}^{2N}\hookleftarrow$ を

$$P_\sigma\times P_\sigma:(u_1,\cdots,u_N;v_1,\cdots,v_N)^\top\mapsto(u_{\sigma(1)},\cdots,u_{\sigma(N)};v_{\sigma(1)},\cdots,v_{\sigma(N)})^\top$$

で定義する。明らかに、

$$(P_\sigma\times P_\sigma)^{-1}=P_\sigma^{-1}\times P_\sigma^{-1}=P_{\sigma^{-1}}\times P_{\sigma^{-1}}$$

である。

命題 3 $\sigma\in C(W)$ に対して、システム Φ は $(P_\sigma\times P_\sigma)-$ 不変である。

（証明）

$$\begin{aligned}(y'_1,\cdots,y'_N;z'_1,\cdots,z'_N)^\top &= (P_\sigma\times P_\sigma)(y_1,\cdots,y_N;z_1,\cdots,z_N)^\top && (9)\\ &= (y_{\sigma(1)},\cdots,y_{\sigma(N)};z_{\sigma(1)},\cdots,z_{\sigma(N)})^\top && (10)\end{aligned}$$

とする。

$$\begin{aligned}
&\Phi_1((P_\sigma \times P_\sigma)(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})) &(11)\\
&= \Phi_1((y_i', z_i')_{1\le i\le N}) &(12)\\
&= (k_1 y_i'(t) + \sum_{j=1}^{N} w_{ij} g_\varepsilon(y_i'(t) + z_i'(t)))_{1\le i\le N} &(13)\\
&= (k_1 y_{\sigma(i)}(t) + \sum_{j=1}^{N} w_{ij} g_\varepsilon(y_{\sigma(j)}(t) + z_{\sigma(j)}(t)))_{1\le i\le N} &(14)\\
&= (k_1 y_{\sigma(i)}(t) + \sum_{j=1}^{N} w_{\sigma(i)\sigma(j)} g_\varepsilon(y_{\sigma(j)}(t) + z_{\sigma(j)}(t)))_{1\le i\le N} &(15)\\
&= (k_1 y_{\sigma(i)}(t) + \sum_{k=1}^{N} w_{\sigma(i)k} g_\varepsilon(y_k(t) + z_k(t)))_{1\le i\le N} &(16)\\
&= P_\sigma(k_1 y_i(t) + \sum_{k=1}^{N} w_{ik} g_\varepsilon(y_k(t) + z_k(t)))_{1\le i\le N} &(17)\\
&= P_\sigma \Phi_1(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) &(18)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Phi_2((P_\sigma \times P_\sigma)(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})) &(19)\\
&= \Phi_2((y_i', z_i')_{1\le i\le N}) &(20)\\
&= (k_2 z_i'(t) + a - \alpha g_\varepsilon(y_i'(t) + z_i'(t)))_{1\le i\le N} &(21)\\
&= (k_2 z_{\sigma(i)}(t) + a - \alpha g_\varepsilon(y_{\sigma(i)}(t) + z_{\sigma(i)}(t)))_{1\le i\le N} &(22)\\
&= P_\sigma(k_2 z_i(t) + a - \alpha g_\varepsilon(y_i(t) + z_i(t)))_{1\le i\le N} &(23)\\
&= P_\sigma \Phi_2(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) &(24)
\end{aligned}$$

したがって、

$$\begin{aligned}
(P_\sigma \times P_\sigma)\Phi(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) &= (P_\sigma\Phi_1(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}), P_\sigma\Phi_2(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})) &(25)\\
&= (\Phi_1((P_\sigma \times P_\sigma)(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})), \Phi_2((P_\sigma \times P_\sigma)(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}))) &(26)\\
&= \Phi(P_\sigma \times P_\sigma)(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) &(27)
\end{aligned}$$

(証終)

定義 7 $\sigma \in S_N$ とする。$\mathbf{R}^N$ の部分空間 $H_1(\sigma)$ を

$$H_1(\sigma) = \{(y_1, \cdots, y_N)^\top \in \mathbf{R}^N | y_i = y_{\sigma(i)}, \quad 1 \le i \le N\}$$

で定義する。$H_1(\sigma)$ の直交補空間 $H_1^\perp(\sigma)$ を

$$H_1(\sigma) = \{\boldsymbol{y} \in \mathbf{R}^N | \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{v}\rangle = 0, \forall \boldsymbol{v} \in H_1(\sigma)\}$$

で定義する。ただし、$\langle\cdot,\cdot\rangle$ は内積を表す。

$\mathbf{R}^{2N}$ の部分空間 $H(\sigma)$,$H^\perp(\sigma)$ を

$$\begin{aligned}
H(\sigma) &= H_1(\sigma) \times H_1(\sigma)\\
&= \{(y_1, \cdots, y_N; z_1, \cdots, z_N)^\top \in \mathbf{R}^{2N} | (y_i, z_i) = (y_{\sigma(i)}, z_{\sigma(i)}), \quad 1 \le i \le N\},\\
H^\perp(\sigma) &= H_1^\perp(\sigma) \times H_1^\perp(\sigma) = \{(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) | \boldsymbol{y},\boldsymbol{z} \in H_1^\perp(\sigma)\}
\end{aligned}$$

で定義する。$H(\sigma)$ を第 1 不変部分空間という。

例 3 $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 6 & 4 & 5 \end{pmatrix} = (12)(3)(456)$ のとき、

$$H_1(\sigma) \quad = \quad \{\boldsymbol{y} \in \mathbf{R}^6 | y_1 = y_2, y_4 = y_5 = y_6\}.$$

$$H(\sigma) \quad = \quad \{(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) \in \mathbf{R}^{12} | y_1 = y_2, y_4 = y_5 = y_6, z_1 = z_2, z_4 = z_5 = z_6\}.$$

Remark 1 $\sigma \in C(W)$ と $H(\sigma) \subset \mathbf{R}^{2N}$ の対応は 1 対 1 ではない。実際、

$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

に対して、$H(\sigma_2) = H(\sigma_3)$ である。

命題 4 $\sigma \in C(W)$ のとき、$H(\sigma) \subset \mathbf{R}^{2N}$ はシステム Φ の不変部分空間

(証明) $(y_1(t), \cdots, y_N(t); z_1(t), \cdots, z_N(t))^\top \in H(\sigma)$ とする。$y_i(t) = y_{\sigma(i)}(t)$, $z_i(t) = z_{\sigma(i)}(t)$ であるから、

$$\begin{aligned} y_i(t+1) &= k_1 y_i(t) + \sum_{j=1}^N w_{ij} g_\varepsilon(y_j(t) + z_j(t)) \\ &= k_1 y_{\sigma(i)}(t) + \sum_{j=1}^N w_{\sigma(i)\sigma(j)} g_\varepsilon(y_{\sigma(j)}(t) + z_{\sigma(j)}(t)) \\ &= k_1 y_{\sigma(i)}(t) + \sum_{k=1}^N w_{\sigma(i)k} g_\varepsilon(y_k(t) + z_k(t)) \\ &= y_{\sigma(i)}(t+1), \\ z_i(t+1) &= k_2 z_i(t) + a - \alpha g_\varepsilon(y_i(t) + z_i(t)) \\ &= k_2 z_{\sigma(i)}(t) + a - \alpha g_\varepsilon(y_{\sigma(i)}(t) + z_{\sigma(i)}(t)) \\ &= z_{\sigma(i)}(t+1). \end{aligned}$$

よって、$(y_1(t+1), \cdots, y_N(t+1); z_1(t+1), \cdots, z_N(t+1))^\top \in H(\sigma)$ であり、$H(\sigma)$ は不変部分空間である。(証終)

3 第2不変部分空間

定義 8 結合行列 W にたいして、

$$\mathrm{Im}W = \{W\boldsymbol{x} | \boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^N\}$$

とする。$\sigma \in C(W)$ にたいして、 $H(\sigma)$ の部分空間 $(H(\sigma))$ を

$$(H(\sigma)) = (\mathrm{Im}W \times \mathbf{R}^N) \cap H(\sigma) = (\mathrm{Im}W \cap H_1(\sigma)) \times H_1(\sigma)$$

で定義する。$(H(\sigma))$ を第 2 不変部分空間という。

命題 5 $\sigma \in C(W)$ にたいして、$\mathrm{Im}W \times \mathbf{R}^N$ 及び $(H(\sigma))$ はシステム Φ に関して不変である。すなわち、

$$\Phi(\mathrm{Im}\bar{W} \times \mathbf{R}^N) \subset \mathrm{Im}W \times \mathbf{R}^N,$$

$$\Phi((H(\sigma))) \subset (H(\sigma)).$$

（証明）$\boldsymbol{y}(t) \in \mathrm{Im}W$ ならば、$\exists \boldsymbol{v} \in \mathbf{R}^N$ s.t. $\boldsymbol{y}(t) = W\boldsymbol{v}$ 従って、

$$k_1\boldsymbol{y}(t) + W\boldsymbol{x}(t) = k_1W\boldsymbol{v} + W\boldsymbol{x}(t) = W(k_1\boldsymbol{v} + \boldsymbol{x}(t)) \in \mathrm{Im}W$$

また、2つの $\Phi-$ 不変部分空間の共通部分は $\Phi-$ 不変であるから、$(H(\sigma))$ は $\Phi-$ 不変である。（証終）

命題 6 商空間 $\mathbf{R}^N/\mathrm{Im}W = (\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N)/(\mathrm{Im}W \times \mathbf{R}^N)$ 上にシステム Φ から誘導されるシステムは線形で、

$$[\boldsymbol{y}](t) = \boldsymbol{y}(t) + \mathrm{Im}W \in \mathbf{R}^N/\mathrm{Im}W$$

と書くとき、

$$[\boldsymbol{y}](t+1) = k_1[\boldsymbol{y}](t)$$

で与えられる。

（証明）$(\boldsymbol{y}(t), \boldsymbol{z}(t)) - (\boldsymbol{y}'(t), \boldsymbol{z}'(t)) \in \mathrm{Im}W \times \mathbf{R}^N$ とする。$\boldsymbol{y}(t) - \boldsymbol{y}'(t) \in \mathrm{Im}W$ より、

$$\boldsymbol{y}(t+1) - \boldsymbol{y}'(t+1) = k_1(\boldsymbol{y}(t) - \boldsymbol{y}'(t)) + W(\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{x}'(t)) \in \mathrm{Im}W.$$

よって、システム Φ は $\mathbf{R}^N/\mathrm{Im}W$ 上に誘導される。それは、

$$\begin{aligned} [\boldsymbol{y}](t+1) &= k_1\boldsymbol{y}(t) + W\boldsymbol{x}(t) + \mathrm{Im}W && (28) \\ &= k_1\boldsymbol{y}(t) + \mathrm{Im}W && (29) \\ &= k_1[\boldsymbol{y}](t) && (30) \end{aligned}$$

で与えられる。（証終）

Remark 2 $|k_1| < 1$ ならば、$\mathbf{R}^N/\mathrm{Im}W$ 上のシステムは縮小写像である。

例 4

$$W = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -3 \\ 1 & 3 & -1 & 1 & -1 & 1 & -3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & 1 & -1 & -3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 3 & -3 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -3 & 3 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -3 & -1 & 1 & 3 & -1 & 1 \\ -1 & -3 & 1 & -1 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ -3 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{列基本変形}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Im}\bar{W} &= \{(s,t,u,-s+t+u,s-t-u,-u,-t,-s)|s,t,u \in \mathbf{R}\} \\
\sigma &= (174)(258)(3)(6) \quad \text{のとき} \\
H(\sigma) &= \\
&\{(y_1,y_2,y_3,y_1,y_2,y_6,y_1,y_2;z_1,z_2,z_3,z_1,z_2,z_6,z_1,z_2) \in \mathbf{R}^{16}\} \\
(H(\sigma)) &= (\mathrm{Im}W \times \mathbf{R}^8) \cap H(\sigma) = \\
&\{(s,-s,3s,s,-s,-3s,s,-s;z_1,z_2,z_3,z_1,z_2,z_6,z_1,z_2) \in \mathbf{R}^{16}\}
\end{aligned}$$

4 第3不変部分空間

定義 9 $\mathbf{R}^N$ の基本ベクトル $\boldsymbol{e}_i\,(1 \le i \le N)$ にたいして、

$$J(W,\sigma) = \{j \in \{1,\cdots,N\}|\,\boldsymbol{e}_j \perp \mathrm{Im}W \cap H_1(\sigma)\}$$

$$Z(W,\sigma) = \{\boldsymbol{z} \in H_1(\sigma)|z_i = z_j(i,j \in J(W,\sigma))\}$$

とする。$(H(\sigma))$ の部分空間 $[H(\sigma)]$ を

$$[H(\sigma)] = (\mathrm{Im}W \cap H_1(\sigma)) \times Z(W,\sigma)$$

で定義する。$[H(\sigma)]$ を第3不変部分空間という。

命題 7 $\sigma \in C(W)$ にたいして、$[H(\sigma)]$ はシステム Φ に関して不変である。すなわち、

$$\Phi([H(\sigma)]) \subset [H(\sigma)].$$

（証明）$(\boldsymbol{y}(t),\boldsymbol{z}(t)) \in [H(\sigma)]$ とする。$(\mathrm{Im}W \cap H_1(\sigma)) \times H_1(\sigma)$ の不変性から

$$(\boldsymbol{y}(t+1),\boldsymbol{z}(t+1)) \in (\mathrm{Im}W \cap H_1(\sigma)) \times H_1(\sigma).$$

$i, j \in J(W,\sigma)$ にたいして、$y_i(t) = y_j(t) = 0$, $z_i(t) = z_j(t)$ より、

$z_i(t+1) - z_j(t+1) = k_2(z_i(t) - z_j(t)) - \alpha(g_\varepsilon(y_i(t) + z_i(t)) - g_\varepsilon(y_j(t) + z_j(t))) = 0.$

従って、

$$(\boldsymbol{y}(t+1), \boldsymbol{z}(t+1)) \in (\mathrm{Im}W \cap H_1(\sigma)) \times Z(W,\sigma)$$

（証終）

例 5 W を例 *4* と同じとする。$\sigma = (12)(36)(45)(78) \in C(W)$ に対して、

$$\begin{aligned}
H(\sigma) &= \{(y_1, y_1, y_3, y_4, y_4, y_3, y_7, y_7; z_1, z_1, z_3, z_4, z_4, z_3, z_7, z_7)\} \\
\mathrm{Im}W &= \{(s, t, u, -s+t+u, s-t-u, -u, -t, -s) | s, t, u \in \mathbf{R}\} \\
(H(\sigma)) &= \{(s, s, 0, 0, 0, 0, -s, -s; z_1, z_1, z_3, z_4, z_4, z_3, z_7, z_7)\} \\
\mathrm{Im}W \cap H_1(\sigma) &= \{(s, s, 0, 0, 0, 0, -s, -s) | s \in \mathbf{R}\}
\end{aligned}$$

.

すなわち、$\mathrm{Im}W \cap H_1(\sigma)$ は基本ベクトル $\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4, \boldsymbol{e}_5, \boldsymbol{e}_6$ に直交する。したがって、

$$[H(\sigma)] = \{(s, s, 0, 0, 0, 0, -s, -s; z_1, z_1, z_3, z_3, z_3, z_3, z_7, z_7)\}$$

$$\begin{array}{l}
\mathbf{R}^8 \times \mathbf{R}^8 \\
\big\downarrow \text{第 } \mathit{1} \text{ 対称性} \\
H(\sigma) \cong \mathbf{R}^4 \times \mathbf{R}^4 \\
\big\downarrow \text{第 } \mathit{2} \text{ 対称性} \\
(H(\sigma)) \cong \mathbf{R} \times \mathbf{R}^4 \\
\big\downarrow \text{第 } \mathit{3} \text{ 対称性} \\
[H(\sigma)] \cong \mathbf{R} \times \mathbf{R}^3
\end{array}$$

5 共役不変部分空間

定義 10 $\sigma, \tau \in C(W)$ に対して、ある $\rho \in C(W)$ が存在して、

$$\sigma\rho = \rho\tau$$

を満たすとき、σ と τ は共役であるといい、$\sigma \sim \tau$ とかく。

不変部分空間 $H(\sigma)$、$H(\tau)$ に対して、ある $\rho \in C(W)$ が存在して、$P_\rho \times P_\rho : \mathbf{R}^{2N} \hookleftarrow$ が

$$H(\sigma) = (P_\rho \times P_\rho)H(\tau) \ and \ (P_\rho \times P_\rho)(\Phi|H(\tau)) = (\Phi|H(\sigma))(P_\rho \times P_\rho)$$

を満たすとき、$H(\sigma)$ と $H(\tau)$ は共役であるという。ここで、$\Phi|H(\sigma)$ は Φ の $H(\sigma)$ への制限を表す。

命題 8 $\sigma, \tau \in C(W)$ に対して、$\sigma \sim \tau$ ならば、$H(\sigma)$ と $H(\tau)$ は共役である。

(証明) $\exists \rho \in C(W)$ s.t. $\rho\tau = \sigma\rho$ とする。

$$(y_i; z_i)^\top_{1 \le i \le N} = (y_1, \cdots, y_N; z_1, \cdots, z_N)^\top \in H(\tau)$$

を与えよ。$(y_i; z_i)^\top = (y_{\tau(i)}; z_{\tau(i)})^\top$ より、

$$\begin{aligned}(P_\rho \times P_\rho)(y_i; z_i)^\top &= (P_\rho \times P_\rho)(y_{\tau(i)}; z_{\tau(i)})^\top & (31)\\ &= (y_{\rho\tau(i)}; z_{\rho\tau(i)})^\top & (32)\\ &= (y_{\sigma\rho(i)}; z_{\sigma\rho(i)})^\top & (33)\end{aligned}$$

一方、$(P_\rho \times P_\rho)(y_i; z_i)^\top = (y_{\rho(i)}; z_{\rho(i)})^\top$ であるから、

$$(y_{\sigma\rho(i)}; z_{\sigma\rho(i)})^\top = (y_{\rho(i)}; z_{\rho(i)})^\top, \quad 1 \le i \le N.$$

すなわち、$(y_{\rho(i)}; z_{\rho(i)})^\top \in H(\sigma)$ 従って、$(P_\rho \times P_\rho)H(\tau) \subset H(\sigma)$ を得る。

逆に、$(y_i; z_i)^\top \in H(\sigma)$ とすると、

$$\begin{aligned}(P_\rho \times P_\rho)^{-1}(y_i; z_i)^\top &= (P_\rho \times P_\rho)^{-1}(y_{\sigma(i)}; z_{\sigma(i)})^\top & (34)\\ &= (y_{\rho^{-1}\sigma(i)}; z_{\rho^{-1}\sigma(i)})^\top & (35)\\ &= (y_{\tau\rho^{-1}(i)}; z_{\tau\rho^{-1}(i)})^\top & (36)\end{aligned}$$

一方、$(P_\rho \times P_\rho)^{-1}(y_i; z_i)^\top = (P_\rho^{-1} \times P_\rho^{-1})(y_i; z_i)^\top = (y_{\rho^{-1}}; z_{\rho^{-1}})^\top$ であるから、

$$(y_{\rho^{-1}}; z_{\rho^{-1}})^\top = (y_{\tau\rho^{-1}(i)}; z_{\tau\rho^{-1}(i)})^\top, \quad 1 \le i \le N$$

すなわち、$(y_{\rho^{-1}}; z_{\rho^{-1}})^\top \in H(\tau)$. 従って、$(P_\rho \times P_\rho)^{-1}H(\sigma) \subset H(\tau)$ である。よって、$(P_\rho \times P_\rho)H(\tau) = H(\sigma)$ を得る。また、$(P_\rho \times P_\rho)\Phi = \Phi(P_\rho \times P_\rho)$ であるから、結論を得る。(証終)

例 6 $N = 3$ のCNNを考える。$W = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ とする。$C(W) = \{\sigma \in S_3 | P_\sigma W = W P_\sigma\} = S_3$ となる。

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in S_3$$

とする。$\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \in S_3$ とすると、

$$\rho^{-1}\sigma\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \tau,$$

すなわち、$\sigma \sim \tau$.

$$\begin{aligned} H(\sigma) &= \{(y_1, y_2, y_3; z_1, z_2, z_3)^\top | y_1 = y_2, z_1 = z_2\}, && (37) \\ H(\tau) &= \{(y_1, y_2, y_3; z_1, z_2, z_3)^\top | y_1 = y_3, z_1 = z_3\} && (38) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &(P_\rho \times P_\rho)H(\tau) \\ &= (P_\rho \times P_\rho)\{(y_{\tau(1)}, y_{\tau(2)}, y_{\tau(3)}; z_{\tau(1)}, z_{\tau(2)}, z_{\tau(3)})^\top | y_1 = y_3, z_1 = z_3\} \\ &= (P_\rho \times P_\rho)\{(y_3, y_2, y_1; z_3, z_2, z_1)^\top | y_1 = y_3, z_1 = z_3\} \\ &= \{(y_{\rho(3)}, y_{\rho(2)}, y_{\rho(1)}; z_{\rho(3)}, z_{\rho(2)}, z_{\rho(1)})^\top | y_1 = y_3, z_1 = z_3\} \\ &= \{(y_1, y_3, y_2; z_1, z_3, z_2)^\top | y_1 = y_3, z_1 = z_3\} \\ &= \{(y_1', y_2', y_3'; z_1', z_2', z_3')^\top | y_1' = y_2', z_1' = z_2'\} \\ &= H(\sigma) \end{aligned}$$

Remark 3 不変部分空間 $H(\sigma)$ の補空間方向の安定性
$(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) \in H(\sigma), (\Delta\boldsymbol{y}, \Delta\boldsymbol{z}) \in \mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N$ とする。

$$\begin{aligned} \Delta x_i &= g_\varepsilon(y_i + \Delta y_i + z_i + \Delta z_i) - g_\varepsilon(y_i + z_i) && (39) \\ &= Dg_\varepsilon(y_i + z_i)(\Delta y_i + \Delta z_i) + h.o.t. && (40) \end{aligned}$$

$\Delta\boldsymbol{x} = (\Delta x_i) \in \mathbf{R}^N$ とする。

$$\begin{aligned} &\Phi_1(\boldsymbol{y} + \Delta\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} + \Delta\boldsymbol{z}) - \Phi_1(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) && (41) \\ &= k_1(\boldsymbol{y} + \Delta\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}) + W(\boldsymbol{x} + \Delta\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}) && (42) \\ &= k_1\Delta\boldsymbol{y} + W\Delta\boldsymbol{x} && (43) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Phi_2(\boldsymbol{y} + \Delta\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} + \Delta\boldsymbol{z}) - \Phi_2(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) && (44) \\ &= k_2(\boldsymbol{z} + \Delta\boldsymbol{z} - \boldsymbol{z}) - \alpha(\boldsymbol{x} + \Delta\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}) && (45) \\ &= k_2\Delta\boldsymbol{z} - \alpha\Delta\boldsymbol{x} && (46) \end{aligned}$$

$b > 0$ が十分小さく $0 < Dg_\varepsilon(y_i + z_i) \ll 1 \quad (1 \le i \le N)$ ならば $\Delta\boldsymbol{x} \approx \boldsymbol{o}$ となり、安定性は k_1, k_2 で決定される。すなわち、$|k_1| < 1, |k_2| < 1$ ならば、補空間方向に安定となる。

6 Appendix 1: Orthogonal pattern

Definition 1 *Let an integer $n \geq 1$ be given ,and put $N = 2^n$.*

(1) We define a sequence of N-dimensional vectors $p_1, p_2, \cdots, p_n$, which components are 1 or -1;

$$\begin{aligned}
p_1 &= (1,-1,1,-1,\cdots,1,-1)\\
p_2 &= (1,1,-1,-1,1,1,-1,-1,\cdots,1,1,-1,-1)\\
&\vdots\\
p_k &= (\underbrace{1,1,\cdots,1}_{2^{k-1}},\underbrace{-1,-1,\cdots,-1}_{2^{k-1}},\cdots,\underbrace{-1,-1,\cdots,-1}_{2^{k-1}})\\
&\vdots\\
p_n &= (\underbrace{1,1,\cdots,1}_{2^{n-1}},\underbrace{-1,-1,\cdots,-1}_{2^{n-1}})
\end{aligned}$$

(2) Define a sequence of $N/2$-dimensional vectors $p'_1, p'_2, \cdots, p'_n$;

$$p'_k = [I_{N/2}, O_{N/2}]p_k, \quad (1 \leq k \leq n)$$

where $I_{N/2}$ is a $(N/2, N/2)$ identity matrix, and $O_{N/2}$ is a $(N/2, N/2)$ zero matrix.

(3) If $n \geq 2$, define a sequence of $N/4$-dimensional vectors $p''_1, p''_2, \cdots, p''_n$;

$$p''_k = [I_{N/4}, O_{N/4}]p'_k, \quad (1 \leq k \leq n)$$

where $I_{N/4}$ is a $(N/4, N/4)$ identity matrix, and $O_{N/4}$ is a $(N/4, N/4)$ zero matrix.

Proposition 1 *(1) $p_k = (p'_k, p'_k)$ $(1 \leq k \leq n-1)$, and $p_n = (p'_n, -p'_n)$,*

(2) $p'_k = (p''_k, p''_k)$ $(1 \leq k \leq n-2)$, $p'_{n-1} = (p''_{n-1}, -p''_{n-1})$, and $p'_n = (p''_n, p''_n)$

(3) $p''_k G = -p''_k$ $(1 \leq k \leq n-2)$, and $p''_k G = p''_k$ $(n-1 \leq k \leq n)$, where $G = (g_{ij})$ is a $(N/4, N/4)$ matrix defined by

$$g_{ij} = \begin{cases} 1 & i+j = \frac{N}{4}+1 \\ 0 & \textit{others.} \end{cases}$$

(Proof) It is clear from the definition.

Proposition 2 *If there are real numbers $c_1, \cdots, c_n$ such that*

$$p = c_1 p_1 + \cdots + c_n p_n \in \{1,-1\}^N,$$

then

$$p \in \{p_i, -p_i : 1 \leq i \leq n\}.$$

(Proof)

(1) Case of $n = 1$. Then $N = 2$ and $\boldsymbol{p}_1 = (1, -1)$. If $\boldsymbol{p} = c_1\boldsymbol{p}_1 = (c_1, -c_1) \in \{1, -1\}^2$, then $c_1 = \pm 1$. Hence $pin\{\boldsymbol{p}_1, -\boldsymbol{p}_1\}$.

(2) Case of $n = 2$. Then $N = 4, \boldsymbol{p}_1 = (1, -1, 1, -1)$ and $\boldsymbol{p}_2 = (1, 1, -1, -1)$. Assume $\boldsymbol{p} = c_1\boldsymbol{p}_1 + c_2\boldsymbol{p}_2 \in \{1, -1\}^4$.

(i) Case of $c_2 = 0$. Then $\boldsymbol{p} = c_1\boldsymbol{p}_1 \in \{1, -1\}^4$. Since

$$\text{(the 1st component of } p) = c_1 = \pm 1,$$

we have $\boldsymbol{p} \in \{\boldsymbol{p}_1, -\boldsymbol{p}_1\}$.

(ii)Case of $c_2 \neq 0$. Then $\boldsymbol{p} = c_1\boldsymbol{p}_1 + c_2\boldsymbol{p}_2 \in \{1, -1\}^4$. Since

$$\begin{aligned}&\text{(the 1st component of } \boldsymbol{p}) + \text{(the 2nd component of } \boldsymbol{p})\\ &= (c_1 + c_2) + (-c_1 + c_2) = 2c_2 \neq 0,\end{aligned}$$

the 1st component of $\boldsymbol{p}$ and the 2nd component of $\boldsymbol{p}$ have same sign. Hence

$$\begin{aligned}&\text{(the 1st component of } \boldsymbol{p}) - \text{(the 2nd component of } \boldsymbol{p})\\ &= (c_1 + c_2) - (-c_1 + c_2) = 2c_1 = 0.\end{aligned}$$

Since $c_1 = 0$, $\boldsymbol{p} = c_2\boldsymbol{p}_2 \in \{1, -1\}^4$. Since

$$\text{(the 1st component of } \boldsymbol{p}) = c_2 = \pm 1,$$

we have $\boldsymbol{p} \in \{\boldsymbol{p}_2, -\boldsymbol{p}_2\}$.

(3) Case of $n \geq 3$. We use an induction for n. Assume that the statement is true for n-1. Put $N = 2^n$, and

$$\boldsymbol{p} = c_1\boldsymbol{p}_1 + \cdots + c_n\boldsymbol{p}_n \in \{1, -1\}^N.$$

(i)Case of $c_n = 0$. Then

$$\boldsymbol{p} = c_1\boldsymbol{p}_1 + \cdots + c_{n-1}\boldsymbol{p}_{n-1} \in \{1, -1\}^N.$$

Define

$$\boldsymbol{p}' = [I_{N/2}, O_{N/2}]\boldsymbol{p}, \quad \boldsymbol{p}'_k = [I_{N/2}, O_{N/2}]\boldsymbol{p}_k, \quad (1 \leq k \leq n).$$

Since $\boldsymbol{p}_k = (\boldsymbol{p}'_k, \boldsymbol{p}'_k) \quad (1 \leq k \leq n-1)$, we have $\boldsymbol{p} = (\boldsymbol{p}', \boldsymbol{p}')$. Since

$$\boldsymbol{p}' = c_1\boldsymbol{p}'_1 + \cdots + c_{n-1}\boldsymbol{p}'_{n-1} \in \{1, -1\}^{N/2},$$

by the assumption of induction, we have

$$\boldsymbol{p}' \in \{\boldsymbol{p}'_k, -\boldsymbol{p}'_k : 1 \leq k \leq n-1\}.$$

Therefore we have $\boldsymbol{p} \in \{\boldsymbol{p}_k, -\boldsymbol{p}_k : 1 \le k \le n-1\}$.

(ii)Case of $c_n \neq 0$. Since

$$\begin{aligned}&(\text{the } i\text{th component of } \boldsymbol{p}_k) + (\text{the } (\tfrac{N}{2} - i + 1)\text{th component of } \boldsymbol{p}_k)\\ &= 0, \quad 1 \le i \le N/4, \quad 1 \le k \le n-1,\end{aligned}$$

we have

$$\begin{aligned}&(\text{the } i\text{th component of } \boldsymbol{p}) + (\text{the } (\tfrac{N}{2} - i + 1)\text{th component of } \boldsymbol{p})\\ &= 2c_n \neq 0, \quad 1 \le i \le N/4.\end{aligned}$$

Hence the ith component of $\boldsymbol{p}$ and the $(\frac{N}{2} - i + 1)$th component of $\boldsymbol{p}$ have same sign. Since

$$\begin{aligned}&(\text{the } i\text{th component of } \boldsymbol{p}) - (\text{the } (\tfrac{N}{2} - i + 1)\text{th component of } \boldsymbol{p})\\ &= 0, \quad 1 \le i \le N/4,\end{aligned}$$

we have $\boldsymbol{p}' = (\boldsymbol{p}'', \boldsymbol{p}''G)$, where $G = (g_{ij})$ is a $(N/4, N/4)$ matrix defined by

$$g_{ij} = \begin{cases} 1 & i + j = \frac{N}{4} + 1 \\ 0 & \text{others.} \end{cases}$$

Since

$$\begin{aligned}\boldsymbol{p}' &= c_1\boldsymbol{p}'_1 + \cdots + c_n\boldsymbol{p}'_n \\ &= c_1(\boldsymbol{p}''_1, \boldsymbol{p}''_1) + \cdots + c_{n-2}(\boldsymbol{p}''_{n-2}, \boldsymbol{p}''_{n-2}) + c_{n-1}(\boldsymbol{p}''_{n-1}, -\boldsymbol{p}''_{n-1}) + c_n(\boldsymbol{p}''_n, \boldsymbol{p}''_n),\end{aligned}$$

we have

$$\begin{aligned}\boldsymbol{p}'' &= c_1\boldsymbol{p}''_1 + \cdots + c_{n-2}\boldsymbol{p}''_{n-2} + c_{n-1}\boldsymbol{p}''_{n-1} + c_n\boldsymbol{p}''_n, \\ \boldsymbol{p}''G &= c_1\boldsymbol{p}''_1 + \cdots + c_{n-2}\boldsymbol{p}''_{n-2} + c_{n-1}(-\boldsymbol{p}''_{n-1}) + c_n\boldsymbol{p}''_n.\end{aligned}$$

By Lemma ,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{p}'' &= (\boldsymbol{p}''G)G \\ &= c_1\boldsymbol{p}''_1G + \cdots + c_{n-2}\boldsymbol{p}''_{n-2}G + c_{n-1}(-\boldsymbol{p}''_{n-1}G) + c_n\boldsymbol{p}''_nG, \\ &= c_1(-\boldsymbol{p}''_1) + \cdots + c_{n-2}(-\boldsymbol{p}''_{n-2}) + c_{n-1}(-\boldsymbol{p}''_{n-1}) + c_n\boldsymbol{p}''_n,\end{aligned}$$

Hence

$$0 = \frac{1}{2}(\boldsymbol{p}'' - \boldsymbol{p}'') = c_1\boldsymbol{p}''_1 + \cdots + c_{n-1}\boldsymbol{p}''_{n-1}.$$

Since $\{\boldsymbol{p}''_1, \cdots, \boldsymbol{p}''_{n-1}\}$ is linearly independent, we have $c_1 = \cdots = c_{n-1} = 0$, and $\boldsymbol{p} = c_n\boldsymbol{p}_n \in \{1, -1\}^N$. Since

$$(\text{the 1st component of } \boldsymbol{p}) = c_n = \pm 1,$$

we have $\boldsymbol{p} \in \{\boldsymbol{p}_n, -\boldsymbol{p}_n\}$. (Q.E.D.)

Proposition 3 *Define*

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{n}(\boldsymbol{p}_1^\top \boldsymbol{p}_1 + \cdots + \boldsymbol{p}_n^\top \boldsymbol{p}_n), \\ U &= \{\boldsymbol{p}_k^\top, -\boldsymbol{p}_k^\top : 1 \le k \le n\}. \end{aligned}$$

If $\sigma \in S_N$ satisfies $P_\sigma W = W P_\sigma$, then $P_\sigma(U) = U$.

(Proof)Let $1 \le k \le n$ be given. Then

$$W(P_\sigma \boldsymbol{p}_k^\top) = P_\sigma W P_\sigma^{-1}(P_\sigma \boldsymbol{p}_k^\top) = P_\sigma(W\boldsymbol{p}_k^\top) = P_\sigma(\frac{1}{n}\boldsymbol{p}_k^\top \boldsymbol{p}_k \boldsymbol{p}_k^\top) = \frac{2^n}{n}(P_\sigma \boldsymbol{p}_k^\top).$$

Since the image of W is spanned by $\{\boldsymbol{p}_1^\top, \cdots, \boldsymbol{p}_n^\top\}$, $P_\sigma \boldsymbol{p}_k^\top$ is a linear combination of $\{\boldsymbol{p}_1^\top, \cdots, \boldsymbol{p}_n^\top\}$. By Proposition 2 ,

$$P_\sigma \boldsymbol{p}_k^\top \in \{\boldsymbol{p}_k^\top, -\boldsymbol{p}_k^\top : 1 \le k \le n\} = U.$$

Since P_σ is one-to-one, we have $P_\sigma(U) = U$. (Q.E.D.)

Proposition 4 *Define*

$$W = \frac{1}{n}(\boldsymbol{p}_1^\top \boldsymbol{p}_1 + \cdots + \boldsymbol{p}_n^\top \boldsymbol{p}_n).$$

The isotropy group $C(W) = \{\sigma \in S_N : P_\sigma W = W P_\sigma\}$ is isomorphic to the group

$$\underbrace{C_2 \times \cdots \times C_2}_{n} \times S_n$$

where C_2 is the cyclic group of order 2, and S_n is the nth symmetry group.

(Proof) Let $\sigma \in C(W)$ be given. For any $1 \le i \le n$, there exists $1 \le k \le n$ such that

$$P_\sigma(\boldsymbol{p}_i) = \boldsymbol{p}_k \text{ or } -\boldsymbol{p}_k.$$

by Proposition 3 . We define $\tau \in S_n$ by

$$\tau(i) = k \quad (1 \le i \le n).$$

For each $1 \le i \le n$, define $\delta_i : \{1, -1\} \to \{1, -1\}$ by

$$\delta_i(\varepsilon) = \begin{cases} \varepsilon & \text{if } T(\boldsymbol{p}_i) = \boldsymbol{p}_k \\ -\varepsilon & \text{if } T(\boldsymbol{p}_i) = -\boldsymbol{p}_k. \end{cases}$$

The correspondence

$$\sigma \leftrightarrow (\delta_1, \cdots, \delta_n, \tau) \in C_2 \times \cdots \times C_2 \times S_n$$

is isomorphic. (Q.E.D.)

7 Appendix 2: 8 CNN with three orthogonal patterns

Let three patterns

$$\begin{aligned}\boldsymbol{p}^1 &= (1,1,1,1,0,0,0,0)^\top,\\ \boldsymbol{p}^2 &= (1,1,0,0,1,1,0,0)^\top,\\ \boldsymbol{p}^3 &= (1,0,1,0,1,0,1,0)^\top\end{aligned}$$

be given. The connection matrix W is defined by

$$\begin{aligned}W &= \frac{1}{3}(W^1+W^2+W^3)\\ W^m &= (w^m_{ij}),\\ w^m_{ij} &= (2p^m_i-1)(2p^m_j-1), \quad (1\le i,j\le 8, 1\le m\le 3).\end{aligned}$$

We calculate conjugate class of the isotropy group $C(W)$ and invariant subspaces.

1. 16-dimension (1 subspace, 1 conjugate class)
   (a) i. $H^{16} = H((1)) = \mathbf{R}^{16}$
2. 12-dimension (6 subspaces, 1 conjugate class)
   (a) i. $H^{12}_1 = H((14)(58))$
      ii. $H^{12}_2 = H((16)(38))$
      iii. $H^{12}_3 = H((17)(28))$
      iv. $H^{12}_4 = H((23)(67))$
      v. $H^{12}_5 = H((25)(47))$
      vi. $H^{12}_6 = H((35)(46))$
3. 8-dimension (17 subspaces, 5 conjugate classes)
   (a) i. $H^8_1 = H((12)(34)(56)(78))$
      ii. $H^8_2 = H((13)(24)(57)(68))$
      iii. $H^8_3 = H((15)(26)(37)(48))$
   (b) i. $H^8_4 = H((14)(23)(58)(67))$
      ii. $H^8_5 = H((16)(25)(38)(47))$
      iii. $H^8_6 = H((17)(28)(35)(46))$
   (c) i. $H^8_7 = H((18)(27)(36)(45))$
   (d) i. $H^8_8 = H((12)(36)(45)(78))$
      ii. $H^8_9 = H((13)(27)(45)(68))$
      iii. $H^8_{10} = H((15)(27)(36)(48))$
      iv. $H^8_{11} = H((18)(24)(36)(57))$
      v. $H^8_{12} = H((18)(26)(37)(45))$
      vi. $H^8_{13} = H((18)(27)(34)(56))$

(e) i. $H^8_{14} = H((174)(258)) = H((147)(285))$
ii. $H^8_{15} = H((146)(385)) = H((164)(358))$
iii. $H^8_{16} = H((167)(283)) = H((176)(238))$
iv. $H^8_{17} = H((235)(476)) = H((253)(467))$

4. 4-dimension (8 subspaces, 3 conjugate classes)

(a) i. $H^4_1 = H((1342)(5786)) = H((1243)(5687))$
ii. $H^4_2 = H((1562)(3784)) = H((1265)(3487))$
iii. $H^4_3 = H((1573)(2684)) = H((1375)(2486))$

(b) i. $H^4_4 = H((1746)(2538)) = H((1647)(2835))$
$= H((1674)(2583)) = H((1476)(2385))$
$= H((1764)(2358)) = H((1467)(2853))$

(c) i. $H^4_5 = H((137862)(45)) = H((137862)(45))$
ii. $H^4_6 = H((156843)(27)) = H((134865)(27))$
iii. $H^4_7 = H((124875)(36)) = H((157842)(36))$
iv. $H^4_8 = H((265734)(18)) = H((243756)(18))$