数理解析研究所講究録
1072 巻 1998 年 120-135

Hopfield Neural Networks and Mean Field Theory of Boltzmann Machines

会津大 総合数理　船橋 賢一 (Ken-ichi Funahashi)

1　序文

連想記憶モデルとして用いられている離散時間、離散値を出力とする対称結合の神経回路網モデルを、Hopfieldは、物理学におけるスピングラス理論とのアナロジーにより、エネルギー関数を導入して解析した([5])。その後、Hopfield は、常微分方程式系で与えられる連続時間、対称結合の神経回路網モデルにもエネルギー関数を導入し([6])、Hopfield-Tank[7]において、組合せ最適化問題の解法に応用できることを示した。しかし、局所最適値に収束し、必ずしも最適解が得られない。このため、確率的に動作する対称結合の神経回路網であるBoltzmann machine ([1]参照)を組合せ最適化問題に応用することが試みられ、温度をあるし方でゆっくりと下げていくアニーリングによって、高い確率で最適解が得られることが、実験的にもまた理論的にもわかった。しかし、Boltzmann machineを動作させ、平衡状態に収束させることおよびアニーリング処理には非常に時間がかかる。このため、Peterson-Anderson[12]は、Boltzmann machineに平均場近似を適用し、平衡状態における出力の平均値が（近似的に）満たすべき平均場方程式を導出し、これをiterativeに解く方法

から、離散時間、連続値出力のニューラルネットワークモデルを与えた。これをMFTニューラルネットワークといい、同期式と非同期式が考えられる。そして、さらにMFTニューラルネットワークの動作に、温度をゆっくり下げるというアニーリング処理(MFA)を加えることにより、組合せ最適化問題の良好な解が得られることが実験的に示された([13])。以下MFTニューラルネットワークを単にMFTモデルと呼ぶことにする。MFTモデルの解析は、統計力学的観点からなされてきたが、MFTモデルとMFAアルゴリズムによって良好な解が得られることの理論的根拠は与えられて来なかった。

Kurita-Funahashi[9]は、非同期MFTモデルを離散力学系とみなしたとき、その漸近安定不動点の集合は、実は、連続時間力学系であるHopfieldニューラルネットワークの漸近安定平衡点の集合と一致することを証明し、MFTモデルの使用の理論的根拠を与えた。Boltzmann machine, Hopfield NN, MFTモデル 等は、情報工学及び物理学の方面で研究されてきたが、小生は、これらは力学系の数学的理論にとっても興味深い構造を持っていると考え、本論文において、数学者にもわかりやすい形で、Kurita-Funahashi[9]の内容を紹介する。

対称結合のニューラルネットワークは、Hopfield以前から工学者により、連想記憶モデルとして研究されてきたが、物理学者 Hopfield が指摘したように、スピングラスと呼ばれる、強磁性体と反強磁性体を混ぜ合わせてできるような不均一(ランダム)な磁性体を扱うスピングラス理論(高山[14]参照)との間に、アナロジーがあるのは興味深い。

2 Hopfield ニューラルネットワーク

巡回セールスマン問題のような多くの組合せ最適化問題は、$\{-1,1\}^n$ 上で定義された関数

$$F(x) = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} W_{ij}x_i x_j - \sum_{i=1}^{n} I_i x_i \tag{2.1}$$

の最小値を探索する問題として定式化される。ここで W_{ij} , I_i は定数で、$W_{ij} = W_{ji}$ $(i \neq j)$, $W_{ii} = 0$ $(i,j = 1,...,n)$ を満たす。これを 連続力学系を用いて解くアイデアを Hopfield-Tank[7] が提出した。すなわち、次の常微分方程式系で与えられるシステムを考える。

$$\frac{du_i(t)}{dt} = -\frac{u_i(t)}{\tau} + \sum_{j=1}^{n} W_{ij}\sigma(u_j(t)) + I_i \quad (i = 1,...,n) \tag{2.2}$$

$$x_i(t) = \sigma(u_i(t)) \tag{2.3}$$

ここで u_i はユニット（ニューロン）iの内部状態、x_i はその出力値、W_{ij} はユニット j からユニット i への結合重み, I_i はユニット i の閾値, $\tau(>0)$ は時定数である。σ はシグモイド関数（すなわち、C^1 級、定数でない有界、狭義単調増加関数）で、値域を $(-1,1)$ とする。$\sigma(x) = \tanh(x)$ がよく用いられる。上記のシステムは、**Hopfieldニューラルネットワーク**（以下 Hopfield NN と記す）と呼ばれる。Hopfield は、このニューラルネットワークに対して、

$$E(x) = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} W_{ij}x_i x_j - \sum_{i=1}^{n} I_i x_i + \frac{1}{\tau}\sum_{i=1}^{n}\int_0^{x_i}\sigma^{-1}(x)dx \tag{2.4}$$

なる $C = (-1,1)^n$ 上の関数を導入し、**エネルギー関数**と呼んだ。$E(x)$ は、上記のシステムの（広義）リャプノフ関数となっている。これは、

$$\frac{dE}{dt} = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial E}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dt} = -\sum_{i=1}^{n}\frac{du_i}{dt}\frac{dx_i}{dt} = -\sum_{i=1}^{n}\sigma^{-1\prime}(x_i)(\frac{dx_i}{dt})^2 \leq 0 \tag{2.5}$$

からわかる。 また、$\sigma(x) = \tanh x$ のとき、式 (2.4) で、

$$\int_0^{x_i} \sigma^{-1}(x)dx = \frac{1+x_i}{2}\log\frac{1+x_i}{2} + \frac{1-x_i}{2}\log\frac{1-x_i}{2} \tag{2.6}$$

また、$\sigma^{-1\prime}(x_i) = (1-x_i)^{-2}$ であることに注意しておく。

Hopfield NN を、$C = (-1,1)^n$ 上の力学系とみなそう。式 (2.3) より

$$\frac{dx_i}{dt} = \sigma'(u_i)\frac{du_i}{dt} = \frac{1}{\sigma^{-1\prime}(x_i)}\frac{du_i}{dt} \tag{2.7}$$

従って、C 上では、式 (2.2), (2.3) で与えられる力学系は、

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{1}{\sigma^{-1\prime}(x_i)}(-\frac{1}{\tau}\sigma^{-1}(x_i) + \sum_{j=1}^{n} W_{ij}x_j + I_i) \tag{2.8}$$

となり、式 (2.4) で与えられるエネルギー関数 $E(x)$ に対し、

$$\frac{\partial E}{\partial x_i} = -\sum_{j=1}^{n} W_{ij}x_j - I_i + \frac{1}{\tau}\sigma^{-1}(x_i) \tag{2.9}$$

となるから、Hopfield NN は $C = (-1,1)^n$ 上の力学系として、常微分方程式系

$$\frac{dx_i}{dt} = -\frac{1}{\sigma^{-1\prime}(x_i)}\frac{\partial E}{\partial x_i} \quad (i = 1, ..., n) \tag{2.10}$$

で与えられる。

Hopfield NN は、 エネルギー $E(x)$ を単調に減少させるように動作し、その状態は、平衡点に収束する。 また、 $\tau \to \infty$ としたとき Hopfield NN の漸近安定平衡点は、超立方体 $C = (-1,1)^n$ の 頂点に近づくことが知られている（上坂 [15] 参照)。 従って、初期値をうまく選べば式 (2.1) で与えられる組合せ最適化問題の目的関数 $F(x)$ の最小値が探索できる可能性がある。

3 Boltzmann マシンと平均場理論

Boltzmann マシンとは、ユニットの出力として± 1をとる確率的に動作するマシンであって、**温度** $T > 0$を持ち、現在の状態を$s = (s_1, ..., s_n) \in \{-1, 1\}^n$（ここで s_iはユニット i の出力）としたとき、あるユニットiは、

$$u_i = \sum_{j=1}^{n} W_{ij} s_j + I_i \tag{3.1}$$

とするとき、次の出力が 確率

$$\frac{1}{1 + \exp(-u_i/T)}$$

で 1 になり、確率

$$1 - \frac{1}{1 + \exp(-u_i/T)}$$

で -1 となる、離散時間で動作するマシンである（[1] 参照）。ここで、$W_{ij} = W_{ji}$ $(i, j = 1, ..., n)$ とする。$\{-1, 1\}^n$ 上の関数

$$\tilde{E}(s) = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} W_{ij} s_i s_j - \sum_{i=1}^{n} I_i s_i \tag{3.2}$$

を Boltzmann マシンの**エネルギー関数**と呼ぶ。これは 式(2.1) で与えられた組合せ最適化問題の目的関数 $F(x)$ と同じもので、Hopfield NN のエネルギー関数 $E(x)$ とは異なる。 Boltzmann マシンを動作させると平衡状態に近づき、状態 $s = (s_1, ..., s_n) \in \{-1, 1\}^n$ を出力としてとる確率は、 **Boltzmann 分布**

$$P(s) = \frac{1}{Z} \exp(-\tilde{E}(s)/T) \tag{3.3}$$

ここで

$$Z = \sum_{\{s\}} \exp(-\tilde{E}(s)/T) \tag{3.4}$$

で与えられる状態に近づくことが知られている（上坂[15]参照）。平均値 $\langle s_i \rangle$ が（近似的に）満たすべき方程式が、**平均場近似**と呼ばれる考え方で、

$$\langle s_i \rangle = \tanh((\sum_{j=1}^{n} W_{ij}\langle s_j \rangle + I_i)/T) \quad (i = 1, ..., n) \tag{3.5}$$

の形で求められる。 この方程式は 平均場方程式 と呼ばれる。平均場近似では、ユニット間の統計的な相関を無視するという考え方をするが、これについて以下に述べる。

（ヘルムホルツの）**自由エネルギー**を

$$\tilde{F} = \langle \tilde{E} \rangle - TH \tag{3.6}$$

ここで

$$\langle \tilde{E} \rangle = \sum_{\{s\}} \tilde{E}(s)P(s) \quad ,$$

$$H = -\sum_{\{s\}} P(s) \log P(s)$$

で定義する。ここで $P(s)$ は 状態 $s = (s_1, ..., s_n) \in \{-1, 1\}^n$ をとる確率、 $\langle \tilde{E} \rangle$ は $\tilde{E}(s)$ の平均値で、**内部エネルギー**と呼ばれ、H は **エントロピー** である。

与えられた温度 T で、自由エネルギー $\tilde{F}$ を確率分布の関数とみたとき、Boltzmann分布 (3.3) は、自由エネルギーを最小化するものである（Hinton[4] 参照）。

ユニット間の統計的な相関を無視することで、

$$P(s) = \prod_{i=1}^{n} p_i(s_i)$$

とし、

$$\langle \tilde{E} \rangle = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} W_{ij}\langle s_i \rangle\langle s_j \rangle - \sum_{i=1}^{n} I_i \langle s_i \rangle$$

$$H = -\sum_{\{s\}} P(s) \log P(s) = -\langle \log P(s) \rangle$$

$$= -\langle \log \prod_{i=1}^{n} p_i(s_i) \rangle = -\sum_{i=1}^{n} \langle \log p_i(s_i) \rangle$$

$$= -\sum_{i=1}^{n} \{ p_i(s_i = 1) \log p_i(s_i = 1) + p_i(s_i = -1) \log p_i(s_i = -1) \}$$

となり、

$$\langle s_i \rangle = p_i(s_i = 1) \times 1 + p_i(s_i = -1) \times (-1)$$

$$p_i(s_i = 1) + p_i(s_i = -1) = 1$$

より

$$H = -\sum_{i=1}^{n} \{ \frac{1 + \langle s_i \rangle}{2} \log \frac{1 + \langle s_i \rangle}{2} + \frac{1 - \langle s_i \rangle}{2} \log \frac{1 - \langle s_i \rangle}{2} \}$$

と近似できる。

ゆえに、自由エネルギー $\tilde{F}$ は、

$$\tilde{F} = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} W_{ij} \langle s_i \rangle \langle s_j \rangle - \sum_{i=1}^{n} I_i \langle s_i \rangle$$

$$+T \sum_{i=1}^{n} \{ \frac{1 + \langle s_i \rangle}{2} \log \frac{1 + \langle s_i \rangle}{2} + \frac{1 - \langle s_i \rangle}{2} \log \frac{1 - \langle s_i \rangle}{2} \}$$

と近似することができる。

この $\tilde{F}$ の停留点を解とする方程式

$$\frac{\partial \tilde{F}}{\partial \langle s_i \rangle} = -\sum_{j=1}^{n} W_{ij} \langle s_j \rangle - I_i + \frac{1}{2} T \log \frac{1 + \langle s_i \rangle}{1 - \langle s_i \rangle} = 0$$

より、平均場方程式

$$\langle s_i \rangle = \tanh((\sum_{j=1}^{n} W_{ij} \langle s_j \rangle + I_i)/T) \quad (i = 1, ..., n) \tag{3.7}$$

が得られる。

4 MFTモデル

Peterson-Anderson[12] は、上記の平均場方程式を、

$$x_i(t+1) = \tanh((\sum_{j=1}^{n} W_{ij}x_j(t) + I_i)/T) \ \ (i=1,...,n)\ (t=0,1,2,...) \tag{4.1}$$

として、iterativeに解く方法で、MFTニューラルネットワーク（以下MFTモデルと呼ぶ）を定義した。 ここで、T は 温度とよばれる。
各ユニットの出力の更新を同時に行なう同期MFTモデルと、ランダムに１つのユニットを選んで出力を更新する非同期MFTモデルが考えられる。 MFTモデルは、離散時間のニューラルネットワークである。
同期MFTモデルを、写像

$$h : C = (-1,1)^n \to C$$

ここで

$$h_i(x) = \sigma((\sum_{j=1}^{n} W_{ij}x_j + I_i)/T) \ \ (i=1,...,n)$$

$$h(x) = {}^t(h_1(x),...,h_n(x)) \tag{4.2}$$

で定義される離散力学系と考える。すなわち

$$x(t+1) = h(x(t)) \ \ \ (t=0,1,2,...)$$

で出力を更新する。

また非同期MFTモデルは、ここでは順番にユニットの出力を更新するものを考える。すなわち、

$$\tilde{h}_1(x) = h_1(x_1, x_2, ..., x_n)$$

$$\tilde{h}_2(x) = h_2(\tilde{h}_1(x), x_2, ..., x_n)$$

$$\vdots$$

$$\tilde{h}_n(x) = h_n(\tilde{h}_1(x), ..., \tilde{h}_{n-1}(x), x_n),$$

$$\tilde{h}(x) = {}^t(\tilde{h}_1(x), ..., \tilde{h}_n(x)) \tag{4.3}$$

とし、写像

$$\tilde{h} : C \to C \tag{4.4}$$

で定義される離散力学系を非同期**MFT**モデルとする。

非同期 MFT モデル、同期 MFT モデルのダイナミクスについては、$W_{ii} = 0 \ \ (i = 1, ..., n)$のとき以下のことが知られている。
非同期MFTモデルについて、ユニットiの出力を式(4.1)に従って更新することにより、出力$x = (x_1, ..., x_i, ..., x_n)$が出力$x' = (x_1, ..., x'_i, ..., x_n)$に変化した時、$x_i \neq x'_i$となれば、式(2.4)の$E(x)$に対し、$E(x') < E(x)$となる。すなわち、Hopfield NN のエネルギー関数$E(x)$は、非同期MFTモデル$h : C \to C$のリャプノフ関数にもなっていて、このことから、非同期MFTモデルは、不動点に収束するというダイナミクスしか持たないことがわかる（Fleisher[3]及びKurita-Funahashi[9]参照）。
同期MFTモデルのダイナミクスについては、不動点に収束するか、または、2周期のリミットサイクルに収束することが、Marcus-Westervelt[10],[11]によって知られている。

5 Hopfield NNの平衡点と（非）同期MFTモデルの不動点

Hopfield NN,（非）同期MFTモデルを以上で定義したが、$C=(-1,1)^n$ 上の連続力学系の平衡点、離散力学系としての不動点の間に、次のような関係がある。

補題 1

τを、Hopfield NN の時定数、Tを（非）同期MFTモデルの温度として $\tau = 1/T$とする。このとき、、以下の$(a)\sim(d)$の集合は一致する。

(a) エネルギー関数 $E(x)$の臨界点の集合

(b) Hopfield NNの平衡点の集合

(c) 同期MFTモデルの不動点の集合

(d) 非同期MFTモデルの不動点の集合

（証明）

$gradE(\bar{x})=0$を満たす $\bar{x}=(\bar{x_1},...,\bar{x_n})\in C$ は、

$$\frac{\partial E}{\partial x_i}(\bar{x})=\sum_{j=1}^{n}W_{ij}\bar{x}_j+I_i-\frac{1}{\tau}\sigma^{-1}(\bar{x}_i)=0 \quad (i=1,...,n) \tag{5.1}$$

を満たす。これは

$$\bar{x_i}=\sigma(\tau(\sum_{j=1}^{n}W_{ij}\bar{x_j}+I_i)) \quad (i=1,...,n) \tag{5.2}$$

に同値であることと、それぞれのシステムの定義から容易にわかる。q.e.d.

以下、$\tau=1/T$の条件のもとで、補題1の$(a)\sim(d)$の集合を$\mathcal{E}$と略記しよう。

6　エネルギー関数のヘッセ行列と諸準備

本論文の結果を述べる前に、$\bar{x} \in \mathcal{E}$ における エネルギー関数 $E(x)$ のヘッセ行列 $D^2E(\bar{x}) = (\frac{\partial^2 E}{\partial x_i \partial x_j}(\bar{x}))$ について調べよう。 式 (2.4) より容易に、$D^2E(\bar{x})$ の成分は、

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x_i \partial x_j}(\bar{x}) = -W_{ij} \ (i \neq j) \tag{6.1}$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x_i \partial x_i}(\bar{x}) = \frac{1}{\tau}\sigma^{-1'}(\bar{x}_i) \tag{6.2}$$

と与えられる。 従って $D^2E(\bar{x})$ の対角成分は正であることがわかる。

一般に、正方行列 A に対し、行列 S, L, U を次のようにおく。

$$A = S + L + U \tag{6.3}$$

と分解し、ここで、S は対角行列、L は対角成分が 0 の下三角行列、U は対角成分が 0 の上三角行列とする。

補題 2

A を対角要素がすべて正の実対称行列とし、A を上のように、$A = S + L + U$ と分解したとき、$-S^{-1}(L+U)$ のすべての固有値の絶対値が 1 より小さいならば、A は正定値である。

（証明は、Kurita-Funahashi[9] の Lemma 5 参照）

補題 3 (Gauss-Seidel)

行列 A を対角要素がすべて正である実対称行列とする。A を上のように、$A = S + L + U$ と分解する。 このとき、行列 A が正定値であるための必要条件は、$-(S+L)^{-1}U$ のすべての固有値の絶対値が 1 より小さいことである。

（証明は Kurita-Funahashi[9] の引用文献参照）

7　（非）同期MFTモデルを定義する写像のヤコビ行列

同期MFTモデル $h : C \to C$、非同期MFTモデル $\tilde{h} : C \to C$ の不動点 $\bar{x} \in \mathcal{E}$ におけるヤコビ行列 $Dh(\bar{x})$、$D\tilde{h}(\bar{x})$ は次のように与えられる。

補題 4

$W_{ii} = 0 \ \ (i = 1, ..., n)$ とする。 $\bar{x} \in \mathcal{E}$ において、

$$D^2E(\bar{x}) = S + L + U \tag{7.1}$$

と分解したとき、

(i) $Dh(\bar{x}) = -S^{-1}(L + U)$ (7.2)

(ii) $D\tilde{h}(\bar{x}) = -(S + L)^{-1}U$ (7.3)

（証明は Kurita-Funahashi[9] の Theorem 2, 3 の証明中にある。）

次に、Hopfield NN を定義する力学系のベクトル場 f の $\bar{x} \in \mathcal{E}$ におけるヤコビ行列を求めよう。

$f(x) = (f_1(x), ..., f_n(x))$ としたとき、

$$f_i(x) = -\frac{1}{\sigma^{-1\prime}(x_i)} \frac{\partial E}{\partial x_i} \quad (i = 1, ..., n) \tag{7.4}$$

であるから、ヤコビ行列

$$Df(\bar{x}) = (\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\bar{x}))$$

の成分は、

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\bar{x}) = -\frac{1}{\sigma^{-1\prime}(\bar{x}_i)} \frac{\partial^2 E}{\partial x_i \partial x_j}(\bar{x}) \quad (i, j = 1, ..., n)$$

より

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\bar{x}) = \frac{W_{ij}}{\sigma^{-1\prime}(\bar{x}_i)} \quad (i \neq j) \tag{7.5}$$

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_i}(\bar{x}) = -\frac{1}{\tau} \quad (i = 1, ..., n) \tag{7.6}$$

で与えられる。

8 Hopfield NN と（非）同期MFTモデル の関係

以下、Kurita-Funahashi[9] の基本結果を述べよう。

定理 1

$W=(W_{ij})$ を n 次実対称行列とし、$\bar{x}\in\mathcal{E}$ とする。Hopfield NN のベクトル場 f に対し、$Df(\bar{x})$ の固有値はすべて実数である。そしてエネルギー関数 $E(x)$ に対して、$D^2E(\bar{x})$ が正定値であることと、$Df(\bar{x})$ の固有値がすべて負であることは同値である。

（証明は Kurita-Funahashi[9] の Theorem 1参照）

6節と7節に述べたことより、以下の結果が得られる。

定理 2

$W=(W_{ij})$ を対角成分がすべて0の n 次実対称行列とし、$\bar{x}\in\mathcal{E}$ とする。同期MFTモデル $h:C\to C$ に対し、$Dh(\bar{x})$ の固有値の絶対値 が すべて 1より小さいならば、$D^2E(\bar{x})$ は正定値である。

定理 3

$W=(W_{ij})$ を対角成分がすべて0の実対称行列、$\bar{x}\in\mathcal{E}$ とする。このとき、非同期MFTモデル $\tilde{h}:C\to C$ に対し、$D^2E(\bar{x})$ が正定値であることと $D\tilde{h}(\bar{x})$ の固有値の絶対値がすべて 1より小さいことは同値である。

次の補題が成立する。

補題 5

$W=(W_{ij})$ を対角成分が0の実対称行列とし。$\bar{x}\in\mathcal{E}$ とする。このとき $D^2E(\bar{x})$ が正則ならば、$\bar{x}\in\mathcal{E}$ は、Hopfield NN の双曲型平衡点であり、同期MFTモデル $h:C\to C$ および非同期MFTモデル $\tilde{h}:C\to C$ の双曲型不動点である。

（証明は Kurita-Funahashi[9] の Lemma 7 参照）

以上から、次の基本定理が得られる。

基本定理（Kurita-Funahashi）

$W=(W_{ij})$ を対角成分がすべて 0 の実対称行列とする。これを結合重みに持つ、Hopfield NN, 同期 MFT モデル、および非同期 MFT モデルを考える。ただし、$\tau=1/T$ とする。以下 $\bar{x}\in\mathcal{E}$ に対して $D^2E(\bar{x})$ は正則とする。このとき、

(i) $\bar{x}$ が Hopfield NN の漸近安定平衡点であることと非同期 MFT モデルの漸近安定不動点であることは同値である。

(ii) $\bar{x}$ が同期 MFT モデルの漸近安定不動点であれば、$\bar{x}$ は、Hopfield NN の漸近安定平衡点である。

Remark: Generic な $\tau>0$ に対し、不動点 $\bar{x}\in\mathcal{E}$ における $D^2E(\bar{x})$ は正則である。従って、generic には、連続力学系である Hopfield NN のダイナミクスは、離散力学系である非同期 MFT モデルのダイナミクスと実質的には等価である。

9　おわりに

以上に述べた、Hopfield NN と 非同期 MFT モデルの等価性は、Kurita-Funahashi[9] 以前には、明確に意識されていなかったし、また証明も与えられていなかった。本論文は、ニューラルネットワーク理論の専門家でない数学者にとって理解しやすいように、対称結合のニューラルネットワークについての数理の入門もかねて、Kurita-Funahashi[9] の内容を紹介した。なお、物理学者はしばしば、ユニット間の結合重み W_{ij} を、スピングラス理論との関連で、J_{ij} と書くことを注意しておく。

参考文献

[1] Ackley, D.H., Hinton,G.E., and Sejnowski, T.J. : A learning algorithm for Boltzmann machines, Cognitive Science, vol. 9, pp.147-169, 1985

[2] Bilbo, G., Mann, R., and Miller, T. K. : Optimization by mean field annealing, In D. S. Touretzky (Ed.) Advances in Neural Information Processing Systems, Vol. 1, pp. 91-98, San Mateo, CA, Morgan Kaufman, 1989

[3] Fleisher, M. : The Hopfield model with multi-level neurons, In D. Z. Anderson (Ed.), Neural Information Processing Systems, Denver, CO 1987 , pp. 278-289. American Institute of Physics: New York, 1988

[4] Hinton, G. E. : Deterministic Boltzmann learning performs steepest descent in weight-space, Neural Computation, vol. 1, pp. 143-150, 1989

[5] Hopfield, J. J. : Neural networks and physical systems with emergent collective computational abilities, Proceedings of the National Academy of Sciences in USA, vol. 79, pp. 2554-2558, 1982

[6] Hopfield, J. J. : Neurons with graded response have collective computational properties like those of two-state neurons, Proceedings of the National Academy of Sciences in USA, vol. 81, pp. 3088-3092, 1984

[7] Hopfield, J. J. and Tank, D. W. : Neural computation of decisions in optimization problems, Biological Cybernetics, vol. 52, pp. 141-152, 1985

[8] Hertz, J., Krogh, A., and Palmer, R. G. : Introduction to the Theory

of Neural Computation, Addison-Wesley Publishing, 1991

[9] Kurita, N. and Funahashi, K. : On the Hopfield neural networks and mean field theory, Neural Networks, vol. 9, no. 9, pp. 1531-1540, 1996

[10] Marcus, C. M. and Westervelt, R. M.: Dynamics of iterated map neural networks, Physical Review A, vol. 40, no. 1, pp. 501-504, 1989

[11] Marcus, C. M., Waugh, F. R., and Westervelt, R. M. : Asssociative memory in an analog iterated map neural networks, Physical Review A, vol. 41, no.6, pp. 3355-3364, 1990

[12] Peterson, C. and Anderson, J. R. : A mean field theory learning algorithm for neural networks, Complex Systems, vol. 1, pp. 995-1019, 1987

[13] Peterson, C. and Anderson, J. R. : Neural Networks and NP-complete optimization problems: A performance study on the graph bisection problem, Complex Systems, vol. 2, pp. 59-89, 1988

[14] 高山一 ：スピングラス （パリティ物理学コース クローズアップ）、丸善、1991

[15] 上坂吉則：ニューロコンピューティングの数学的基礎、近代科学社、1993