数理解析研究所講究録
1073巻 1998年 160-167

Rigid cohomology 入門

都築 暢夫 (Tsuzuki Nobuo)
広島大学理学部

1. はじめに.

代数多様体の cohomology 論は、大きく分けて位相構造によるものと微分構造から定まるものとがある。正標数 (標数 $p>0$) 代数多様体の場合は、前者としては l-進理論、後者としては crystalline cohomology など p-進 cohomology と総称されるものがある。本稿では、p-進 cohomology、特に、Berthelot の導入した rigid cohomology の解説と vanishing cycle について書く。

p-進 cohomology の数論への利用の始まりは、1960 年の Dwork による合同 ζ-関数の有理性の証明 [9] に始まる。彼は、p-進周期の研究にもこれを利用した。60 年代後半に Monsky と Washnitzer は、Dwork の仕事に刺激されて、正標数 affine smooth variety に対して新しい cohomology 理論を導入した。[18] この cohomology 論を Monsky-Washnitzer cohomology と呼び、合同 ζ-関数の有理性などが証明される。[17]

70 年代はじめに Berthelot は crystalline cohomology を導入した。[1] crystalline cohomology は、proper smooth の場合には $\mathbf{Z}_p$ 係数の良い理論を与えるが、そうでない場合にはうまく働かない。(2 節・例 1)

80 年代に入り Berthelot は、de Rham cohomology の一般化 [12] に類似する方法で、Dwork からの流れを汲む Monsky-Washnitzer cohomology の一般化である rigid cohomology を定義した。その定義において、Tate や Raynaud らによる rigid analytic space とその中での tube の理論 (3 節) が重要な役割を果たしている。rigid cohomology は affine smooth の場合には Monsky-Washnitzer cohomology と、proper smooth の場合には crystalline cohomology と同型になり、有限次元性や Poincaré 双対性、固定点公式等を満たす良い cohomology 論である。(5 節を見よ。固定点公式については、[21] [17] [11] を見よ。) 係数付き rigid cohomology については overconvergent unit-root F-isocrystal の場合 [22] [23] を除いて未解明な部分が多い。

本稿では、Berthelot の理論のもう一つの柱である coherent $\mathcal{D}^{\dagger}$-加群については触れない。[3]

6 節では、具体的な例で vanishing cycle をどう考えるべきか考察する。

講演においては「On vanishing cycles in rigid cohomology」とタイトルを付けたが、本稿のタイトルは実際に講演の中で話した rigid cohomology の紹介が主なので「Rigid cohomology 入門」とした。

記号 : k を 標数 $p>0$ の体、V を k を剰余体に持つ混標数完備離散付値環、K をその商体とする。$|\ |$ を K の絶対値、$|K^{\times}|$ で値群 (乗法的) を表す。V 加群 M に対して、$M_K = M\otimes_V K$ とする。

2. Monsky-Washnitzer cohomology.

この節では、Monsky と Washnitzer が導入した cohomology 論 (彼らは formal cohomology と名付けた。今は、Monsky-Washnitzer cohomology と呼ばれる。) について述べる。詳しくは [18] [16] [17] [20] を見よ。

X を k 上の affine smooth variety、Spec A を X の V 上への有限型 smooth な持ち上げとする。こう

いう Spec A は、[10] により必ず存在する。A の V 上での有限表示 $V[\underline{x}] \to A$ を固定し、その核を I、

$$\begin{array}{rcl} V[\underline{x}]^\dagger & = & \lim\limits_{\lambda \to 1+} \{\sum a_{\underline{m}} \underline{x}^{\underline{m}} \in V[[\underline{x}]] \mid |a_{\underline{m}}|\lambda^{|\underline{m}|} \to 0\ (|\underline{m}| \to \infty)\} \\ A^\dagger & = & V[\underline{x}]^\dagger / IV[\underline{x}]^\dagger \end{array}$$

とおく。ただし、$|\underline{m}| = \sum m_i$ とする。$A^\dagger$ は A の V 上の weak completion となり、同型を除いて有限表示の取り方によらない。$A^\dagger$ は noether であり、A の p-進完備化を $\widehat{A}$ とおくと、V-代数の自然な包含関係 $A \subset A^\dagger \subset \widehat{A}$ が存在する。

K-微分 $d : A_K \to A_K \otimes_A \Omega^1_{A/V}$ は、$d : A_K^\dagger \to A_K^\dagger \otimes_A \Omega^1_{A/V}$ に延び、K-複体

$$0 \to A_K^\dagger \to A_K^\dagger \otimes_A \Omega^1_{A/V} \to A_K^\dagger \otimes_A \Omega^2_{A/V} \to \cdots$$

($A_K^\dagger$ の次数を 0 とする。) は導来圏の中では X のみで決まる。この複体の cohomology を X の K 上の Monsky-Washnitzer cohomology (以後、MW-cohomology) といい、$H^l_{MW}(X/K)$ と表す。$H^l_{MW}(X/K)$ は X に関して関手的である。

K に Frobenius 写像 σ (k 上の p 乗射の持ち上げ) が存在するとする。このとき、X の絶対 Frobenius 射は $A^\dagger$ 上に持ち上がり、$H^l_{MW}(X/K)$ 上に σ-線形写像を導く。この写像を Frobenius 射と呼び、X と σ のみによる。

例 1. $X = \mathbf{A}^1_k - \{s_1, \cdots, s_r\}$、$\hat{s}_l$ を s_l の V への持ち上げ、$A = V[x, \prod_l \frac{1}{x - \hat{s}_l}]$ とする。すると、

$$A^\dagger = \{\sum_{m_0 \geqq 0} a_{m_0} x^{m_0} + \sum_{l=1}^{r} \sum_{m_l > 0} \frac{a_{m_l}}{(x - \hat{s}_l)^{m_l}} \mid a_{m_l} \in V, \exists \lambda > 1 \text{ such that } |a_{m_l}|\lambda^{m_l} \to 0\ (m_l \to \infty)\}$$

と表せる。$\mathrm{ord}_p(n) = O(\log(n))\ (n \to \infty)$ より

$$H^l_{MW}(X/K) = \begin{cases} K & (l = 0) \\ \bigoplus\limits_{l=1}^{r} K(\overline{\dfrac{dx}{x - \hat{s}_l}}) & (l = 1) \\ 0 & (l \geqq 2) \end{cases}$$

となる。Frobenius は、H^0 には 1 で、H^1 には p で作用する。K を絶対不分岐とする。X の crystalline cohomology $H^l_{crsy}(X/V)$ は、$A^\dagger$ を p-進完備化 $\widehat{A}$ に変えた複体の cohomology になり、$H^1_{crys}(X/V) \otimes_V K$ は K 上有限次元でない。

Monsky と Washnitzer は、彼らの定義した cohomology が良い cohomology 論ならば当然持っているべき幾つかの性質、例えば、$H^l_{MW}(X \times_k \mathbf{A}^1_k / K) \cong H^l_{MW}(X/K)$ や固定点公式などが成り立つことを示した。しかし、その有限次元性は Berthelot [5] や Mebkhout [15] の証明まで長い間知られていなかった。(5 節で Berthelot による証明を見る。)

3. Tubes.

弱完備化の定義から解るように、半径 1 の閉球を少し膨らませたところで収束する級数を解析関数として Monsky-Washnitzer cohomology は定義される。この少し拡げるという操作において、k 上の scheme を V 上に持ち上げるということは避けて通ることが出来ない。そのため、このままの形では貼り合わせという操作がうまく働かず、大域化することが困難である。Berthelot は、Tate や Raynaud らによる formal scheme に伴う rigid analytic space の言葉を用いて、これらの概念を大域化した。以下、Berthelot による tube とその strict neighborhood について解説する。詳しくは、[4] を見よ。

$\mathcal{P}$ を V 上の局所有限型 p-進 formal scheme、$\mathcal{P}_0$ をその special fiber、$\mathcal{P}_{\mathrm{rig}}$ を $\mathcal{P}$ に伴う Raynaud's generic fiber [14, Chap. 2, Sect. 3]、sp : $\mathcal{P}_{\mathrm{rig}} \to \mathcal{P}$ を specialzation 写像 (位相空間の射としては [14, 1.7] における還元射で、環付空間の射になっている。) とする。

X を $\mathcal{P}_0$ の k 上の部分 scheme で、$\Gamma(\mathcal{P}, O_{\mathcal{P}})$ の元 $f_1, \cdots, f_r, g_1, \cdots, g_s$ で $Z = (\cap_i V(f_i)) \cap (\cup_j D(g_j))$ と定義されているものとする。

$$]X[_{\mathcal{P}} = sp^{-1}(X) = \{x \in \mathcal{P}_{\mathrm{rig}} \mid |f_i(x)| < 1 \ (\forall i),\ |g_j(x)| = 1 \ (\exists j)\}$$

は $\mathcal{P}_{\mathrm{rig}}$ の開部分集合になっていてる。これを、X の $\mathcal{P}$ における tube と言う。また、$0 < \lambda \leqq 1, \lambda \in |K^\times| \otimes \mathbf{Q}$ に対して

$$]X[_{\mathcal{P}\lambda} = \{x \in]X[_{\mathcal{P}} \mid |f_i(x)| < \lambda \ (\forall i)\}$$

を、X の半径 η の開 tube という。$]X[_{\mathcal{P}1} =]X[_{\mathcal{P}}$ であり、$\lambda \to 1^-$ とすると、$]X[_{\mathcal{P}\lambda}$ は $]X[_{\mathcal{P}}$ の admissible covering [14, Chap. 3, Sect. 1] になる。

以下、Y を $\mathcal{P}_0$ の閉部分 scheme、X を Y の開部分 scheme、$j : X \to Y$ を対応する埋め込み、$Z = Y - X$ とする。

定義 1. $]Y[_{\mathcal{P}}$ の開集合 V が $]X[_{\mathcal{P}}$ の strict neighborhood であるとは、$]X[_{\mathcal{P}} \subset V$ かつ $\{V,]Z[_{\mathcal{P}}\}$ が $]Y[_{\mathcal{P}}$ の admissible covering になることをいう。

$Y = \mathcal{P}_0$ とする。$0 < \lambda < 1, \lambda \in |K^\times| \otimes \mathbf{Q}$ に対して、

$$U_\lambda =]Y[_{\mathcal{P}} -]Z[_{\mathcal{P}\lambda}$$

とすると、$\{U_\lambda\}_{\lambda < 1}$ は $]X[_{\mathcal{P}}$ の基本 strict neighborhood 系になる。

$]Y[_{\mathcal{P}}$ 上の Z に沿った過収束関数の層を

$$j^\dagger O_{]Y[_{\mathcal{P}}} = \lim_{\substack{\longrightarrow \\ V}} \alpha_{V*} O_V$$

で定める。ここで、右辺は $]X[_{\mathcal{P}}$ の $]Y[_{\mathcal{P}}$ の中での strict neighborhood V 全体を走る帰納極限で、$\alpha_V : V \to]Y[_{\mathcal{P}}$ は構造射、O_V は rigid analytic space V の構造層を表す。

例 2. X を k 上の有限型 affine smooth scheme、Spec A を X の V 上への有限型 smooth な持ち上げ、閉埋め込み Spec A $\to \mathbf{A}^n_V$ を一つ固定して、$\mathbf{P}^n_V$ の中での Spec A の Zariski closure の p-進 completion を $\mathcal{P}$、$\mathcal{P}$ の special fiber を $\overline{X}$ とする。このとき、$\lambda < 1$ に対して $U_\lambda = \{x \in \mathcal{P}_{\mathrm{rig}} \mid |t_i(x)| \geqq \lambda^{-1}\}$ (t_i は $\mathbf{A}^n_V$ の座標) なので、

$$\Gamma(]\overline{X}[_{\mathcal{P}}, j^\dagger O_{]\overline{X}[_{\mathcal{P}}}) = A^\dagger_K$$

となる。

4. Rigid cohomology.

この節では、Berthelot が導入した rigid cohomology の定義 [2] [4] [5] を振り返る。

以下、X を k 上の有限型 separated scheme、$\overline{X}$ を k 上の X の compact 化、$j : X \to \overline{X}$ を対応する開埋め込み、$\mathcal{P}$ を V 上の有限型 p-進 formal scheme で k 上の閉埋め込み $\overline{X} \to \mathcal{P}_0$ を持ち、$\mathcal{P} \to$ Spf V は X の近傍で formally smooth とする。

上の状況で、K 上の $]\overline{X}[_{\mathcal{P}}$ の smooth な点 [14, Chap. 3, Sect. 2] の全体は $]X[_{\mathcal{P}}$ の strict neighborhood になる。従って、de Rham 複体

$$0 \to j^\dagger O_{]\overline{X}[_{\mathcal{P}}} \to j^\dagger O_{]\overline{X}[_{\mathcal{P}}} \otimes_{O_{]\overline{X}[_{\mathcal{P}}}} \Omega^1_{]\overline{X}[_{\mathcal{P}}/K} \to j^\dagger O_{]\overline{X}[_{\mathcal{P}}} \otimes_{O_{]\overline{X}[_{\mathcal{P}}}} \Omega^2_{]\overline{X}[_{\mathcal{P}}/K} \to \cdots$$

が定義される。ただし、$j^\dagger O_{]\overline{X}[_{\mathcal{P}}}$ を次数 0 におく。この複体の hyper cohomology は、X の compact 化や formal scheme への埋め込みの取り方によらない。実際、$\overline{X}$ が 2 つの formal scheme $\mathcal{P}$、$\mathcal{P}'$ に埋め込まれているとする。X のまわりで formally smooth な埋め込みと可換な射 $u : \mathcal{P}' \to \mathcal{P}$ があるとしてよく、この写像が導く analytic space の写像は $]X[_{\mathcal{P}'}$ のある strict neighborhood 上局所的に $W \times D(0,1^-)^r \to W$ というものになる。ただし、W は $]X[_{\mathcal{P}}$ の strict neighborhood の admissible open で、$D(0,1^-)$ は単位開円板とする。よって、自然な複体射

$$j^\dagger O_{]\overline{X}[_{\mathcal{P}}} \otimes_{O_{]\overline{X}[_{\mathcal{P}}}} \Omega^\bullet_{]\overline{X}[_{\mathcal{P}}/K} \to \mathbf{R}u_{\mathrm{rig}*}((j')^\dagger O_{]\overline{X}[_{\mathcal{P}'}} \otimes_{O_{]\overline{X}[_{\mathcal{P}'}}} \Omega^\bullet_{]\overline{X}[_{\mathcal{P}'}/K})$$

は同型になる。compact 化によらないことは、[5] を参照せよ。

複体 $j^\dagger O_{]\overline{X}[_{\mathcal{P}}} \otimes_{O_{]\overline{X}[_{\mathcal{P}}}} \Omega^\bullet_{]\overline{X}[_{\mathcal{P}}/K}$ の hyper cohomology を X の K 上の rigid cohomology と言い、$H^l_{rig}(X/K)$ で表し、X に関して関手的である。

Z を X の k 上の閉部分 scheme、$j_U : U = X - Z \to \overline{X}$ を対応する開埋め込み、$\overline{Z}$ を Z の $\overline{X}$ の中での Zariski closure とする。Z に support を持つ過収束 section の層を

$$\Gamma^\dagger_{]\overline{Z}[}(j^\dagger O_{]\overline{X}[_{\mathcal{P}}}) = \ker(j^\dagger O_{]\overline{X}[_{\mathcal{P}}} \to j_U^\dagger O_{]\overline{X}[_{\mathcal{P}}})$$

とすると、Z に support を持つ rigid cohomology は

$$H^l_{Z,rig}(X/K) = \mathbf{H}^l(]\overline{X}[_{\mathcal{P}}, \Gamma^\dagger_{]\overline{Z}[}(j^\dagger O_{]\overline{X}[_{\mathcal{P}}} \otimes_{O_{]\overline{X}[_{\mathcal{P}}}} \Omega^\bullet_{]\overline{X}[_{\mathcal{P}}/K}))$$

で定義される。$H^l_{Z,rig}(X/K)$ は、X の compact 化や formal scheme への埋め込みによらず X と Z の support だけで決まり、X と Z に関して関手的である。また、$H^l_{X,rig}(X/K) = H^l_{rig}(X/K)$ かつ $H^l_{\emptyset,rig}(X/K) = 0$ である。

K に Frobenius 写像 σ が存在するとする。このとき、X の絶対 Frobenius 射の $\mathcal{P}$ への持ち上げは、$H^l_{Z,rig}(X/K)$ 上に σ-線形写像を導く。この写像を Frobenius 射と呼び、X、Z と σ のみによる。

ここで、rigid cohomology の幾つかの性質を紹介する。

(i) K' を K の有限次拡大、k' を K' の剰余体、$X' = X \times_{\mathrm{Spec}\, k} \mathrm{Spec}\, k'$、$Z'$ を Z の X' への引き戻しとする。このとき、

$$H^l_{Z',rig}(X'/K) \cong H^l_{Z,rig}(X/K) \otimes_K K'$$

となる。(実は、任意の離散付値体の拡大に対して同型が成り立つことが知られている。)

(ii) T を Z に含まれる X の k 上の閉部分 scheme とする。このとき、

$$\cdots \to H^l_{T,rig}(X/K) \to H^l_{Z,rig}(X/K) \to H^l_{Z-T,rig}((X-T)/K) \to \cdots$$

は完全列になる。

(iii) X を k 上の affine smooth variety とする。このとき、例 2 の同型から

$$H^l_{rig}(X/K) \cong H^l_{MW}(X/K)$$

が導かれる。実際、例 2 の $]X[_{\mathcal{P}}$ は、affinoid space からなる基本 strict neighborhood 系を持つから、$H^l(]\overline{X}[_{\mathcal{P}}, j^\dagger O_{]\overline{X}[} \otimes_{]\overline{X}[} \Omega^*_{]\overline{X}[/K}) = 0$ より同型が示される。

(iv) X を k 上の proper smooth variety とする。$W(k)$ を k-係数 Witt vector 環とすると

$$H^l_{rig}(X/K) \cong H^l_{crys}(X/W(k)) \otimes_{W(k)} K$$

となる。

K が Frobenius 射を持つとき、上の (i) - (iv) は Frobenius 射と可換になる。

$\iota:]\overline{X}-X[_{\mathcal{P}}\to]\overline{X}[_{\mathcal{P}}$ とする。$]X[$ に support を持つ section の層を

$$\Gamma_{]X[}(j^{\dagger}O_{]\overline{X}[_{\mathcal{P}}})=\ker(O_{]\overline{X}[_{\mathcal{P}}}\to\iota_*O_{]\overline{X}-X[_{\mathcal{P}}})$$

とおくと、compact support rigid cohomology は

$$H^l_{c,rig}(X/K)=\mathbf{H}^l(]\overline{X}[_{\mathcal{P}},\Gamma_{]X[}(j^{\dagger}O_{]\overline{X}[_{\mathcal{P}}}\otimes_{O_{]\overline{X}[_{\mathcal{P}}}}\Omega^{\bullet}_{]\overline{X}[_{\mathcal{P}}/K}))$$

で定義される。$H^l_{c,rig}(X/K)$ は、X の compact 化や formal scheme への埋め込みによらず X だけで決まり、X に関して関手的である。また、$X=\overline{X}$ のとき、$H^l_{c,rig}(X/K)=H^l_{rig}(X/K)$ である。

K に Frobenius 写像 σ が存在するとき、$H^l_{c,rig}(X/K)$ 上に σ-線形写像が導かれる。この写像を Frobenius 射と呼ぶ。compact support rigid cohomology に関しても、上の (i) と (ii) と同様の性質が成り立つ。

補足 1. [19] から、k 上の有限型 separated scheme X に対して compact 化は存在するが、V 上の formal scheme への埋め込みがあるわけではない。一般には、X の適当な有限開被覆をとると compact 化および formal scheme が存在して、Čech 重複体 を構成することが出来る。この重複体は、compact 化および formal scheme の取り方によらない。この複体の hyper cohomology で rigid cohomology を定義する。

補足 2. Berthelot は、p-進局所系として overconvergent (F)-isocrystal を導入して、それらを係数とする rigid cohomology も定義した。[4] overconvergent (F)-isocrystal は l-進理論における smooth sheaf に対応する概念と思われていて、これらの係数の rigid cohomology に対しても上の (i) - (iv) と同様の性質が成り立つ。

5. Finiteness theorem.

rigid cohomology は、有限次元性や Poincaré 双対性等を満たす良い cohomology であると期待されていた。しかし、これらのことが証明されるまで、Berthelot が 80 年代初頭に rigid cohomology を導入してから 10 年も待たなければならなかった。de Jong による alteration の理論 [13] が登場して、初めて一般に証明できるようになった。[5] [6] (k が有限体のとき、[15] では別な方法で有限次元性を証明している。) 係数付きの場合は、まだ一般には解っていない。(補足 5 を見よ。)

定理 1. ([5], [6]) X を k 上の有限型 separated scheme、Z を X の k 上の閉部分 scheme とする。

(1) X が k 上 smooth とすると、support 付き rigid cohomology $H^l_{Z,rig}(X/K)$ は K 上有限次元である。

(2) compact support rigid cohomology $H^l_{c,rig}(X/K)$ は K 上有限次元である。

(3) (Poincaré 双対性) X の k 上の次元を n とすると、trace 射 $\mathrm{Tr}_X:H^{2n}_{c,rig}(X/K)\to K$ が存在する。さらに、X が k 上 smooth ならば、canonical な非退化 pairing

$$H^l_{Z,rig}(X/K)\otimes_K H^{2n-l}_{c,rig}(Z/K)\to H^{2n}_{c,rig}(X/K)\xrightarrow{\mathrm{Tr}_X}K$$

が存在する。

(1) Berthelot による証明は、次の二つの命題

(a)$_d$: dim $X\leqq d$ ならば $H^l_{rig}(X/K)$ は K 上有限次元である。

(b)$_d$: dim $Z\leqq d$ ならば $H^l_{Z,rig}(X/K)$ は K 上有限次元である。

を帰納的に示すことによる。$(\mathrm{a})_0$ は明らか。$(\mathrm{a})_d \Rightarrow (\mathrm{b})_d$ は、support 付き rigid cohomology の性質と下の Gysin 同型 を用いる。

定理 2. ([5], [6]) X を k 上の有限型 smooth separated scheme、Z を X の k 上の余次元 e である smooth 閉部分 scheme とする。このとき、canonical な同型

$$H^l_{Z,rig}(X/K) \cong H^{l-2e}_{rig}(Z/K)(-e)$$

が存在する。これを Gysin 同型という。ただし、$(-e)$ は $-e$ 次 Tate twist、すなわち、Frobenius の作用が p^e 倍されるこを表す。

次元に関する帰納法から、Gysin 同型は X が affine で global な座標を持ち、Z が座標の共通零点で定義されている場合に証明されていれば十分である。実際に、定理 2 はまずこの場合に証明され、一般の場合は Poincaré 双対性を用いて示される。$(\mathrm{b})_d \Rightarrow (\mathrm{a})_{d+1}$ は、de Jong による alteration を用いて、crystalline cohomology の有限次元性 [1] に帰着する。

(2) は (1) と同様。

(3) (2) から X が幾何的既約のとき、$H^{2n}_{c,rig}(X/K) \cong K(-n)$ となる。よって、trace 射の存在が解る。pairing は、de Rham 複体 $j^\dagger O_{]\overline{X}[_\mathcal{P}} \otimes_{O_{]\overline{X}[_\mathcal{P}}} \Omega^\bullet_{]\overline{X}[_\mathcal{P}/K}$ 上の自然な pairing から導かれるもので定める。非退化であることは、(1) と同様に 2 つの命題を帰納的に示す。

補足 3. Monsky は、affine smooth variety とその超平面の場合に Monsky-Washnitzer cohomology の Gysin 同型を [16] で証明している。

補足 4. Chiarellotto は、Z の余次元を e とすると $H^l_{Z,rig}(X/K)$ への Frobenius の作用の weight は $[l-2e, l]$ に含まれることを示した。[7]

補足 5. [23] で、overconvergent isocrystal 係数の rigid cohomology の Gysin 同型を、本文中で十分と言った局所的な場合に証明した。rigid cohomology の有限次元性や Poincaré 双対性は、局所有限モノドロミー性が知られている overconvergent unit-root F-isocrystal の場合に証明される。[22] [23] 一般の場合には、rigid cohomology の有限次元性等は証明されていない。

補足 6. Crew は 代数曲線の場合に、境界での接続のある種の正則性の仮定の下で overconvergent isocrystal 係数の rigid cohomology の有限次元性や Poincaré 双対性を crystalline cohomology の場合に帰着しない別な方法で証明している。[8]

6. Vanishing cycles.

$R = k[[t]]$、$T = V[[t]]$ をそれぞれ、k-係数、および、V-係数の形式的巾級数環とし、η、s を Spec R の generic point、special point とする。また、V_η を $V[[t]][t^{-1}]$ の p-進完備化、K_η を V_η の商体とする。K_η は $k((t))$ を剰余体、V の素元を素元とする完備離散付値体である。

Vanishing cycle とは、Spec R 上の family の generic fiber と special fiber での cohomology のずれを表すものである。以下、具体的な例で、どうやって 2 つの cohomology の間のずれを調べるかについて述べる。(今のところ完全な理論が出来ているわけでなく、以下は一つの考察である。)

$X =$ Spec $R[x,y]/(xy-t)$、X_η、X_s を X の generic fiber、special fiber とする。$R[x,y]/(xy-t)$ の T 上への持ち上げ $A = T[x,y]/(xy-t)$ を一つ固定し、$B = A/tA$ とする。$A^\dagger$ で A の T 上での weak completion を表すと、B の V 上の weak completion は、$B^\dagger = A^\dagger/tA^\dagger$ である。

$$\Omega^1_{A/T,log} = (A\frac{dx}{x} + A\frac{dy}{y})/A\frac{dt}{t}$$

($\frac{dt}{t} = \frac{dx}{x} + \frac{dy}{y}$) とする。このとき、$X$ の T_K 上の log Monsky-Washnitzer cohomology を

$$H^l_{log\text{-}MW}(X/T_K) = H^l(A^\dagger_K \to A^\dagger_K \otimes_A \Omega^1_{A/T,log})$$

とする。簡単な計算から、$H^l_{log\text{-}MW}(X/T_K)$ は T_K 上の階数が 1 ($l = 0,1$)、0 ($l \neq 0,1$) の自由加群になり、自然な写像により同型

$$H^l_{MW}(X_\eta/K_\eta) \cong H^l_{log-MW}(X/T_K) \otimes_{T_K} K_\eta$$

を得る。また、複体 $A^\dagger_K \otimes_A \Omega^\bullet_{A/T,log}$ を mod t して得られる複体 $B^\dagger_K \otimes_B \Omega^\bullet_{B/V,log}$ は、X_s の K 上の log Monsky-Washnitzer cohomology $H^l_{log\text{-}MW}(X_s/K)$ を定め、

$$H^l_{log\text{-}MW}(X_s/K) \cong H^l_{log\text{-}MW}(X/T_K) \otimes_{T_K} K$$

が存在する。上の同型は、Frobenius 射と可換になる。

さて、X_s の K 上の rigid cohomology は、2 重複体

$$\begin{array}{ccl} V[x]^\dagger_K \oplus V[y]^\dagger_K & \to & K \quad (a,b) \mapsto a \ (\mathrm{mod}\ x) \ - b \ (\mathrm{mod}\ y) \\ \downarrow & & \\ V[x]^\dagger_K dx \oplus V[y]^\dagger_K dy & & \end{array}$$

の cohomology として得られる。$H^l_{rig}(X_s/K)$ は、0 次が K で、他は消える。自然な写像 $V[x]^\dagger_K \oplus V[y]^\dagger_K \to A^\dagger_K$ から

$$H^l_{rig}(X_s/K) \to H^l_{log\text{-}MW}(X_s/K)$$

を得る。この写像は $l \neq 1$ のとき同型で、$l = 1$ のとき単射かつ cokernel は $K(-1)$ と同型になる。ここで、$K(-1)$ には Frobenius が p 倍で作用する。

以上の考察を、proper semi-stable な R 上の相対次元 1 の family X で、T 上に持ち上がり、etale local には上の A のように T 上に持ち上がっているものの場合について考える。log-rigid cohomology を log Monsky-Washnitzer cohomology の貼り合わせで定義する (現在のところ筆者は log-rigid cohomology の定義を持っていないので、便宜上このように定める。) と、$H^l_{log\text{-}rig}(X/T_K)$ は T_K 上の階数有限自由加群で 上の考察と同様の base change が成り立ち、Frobenius 射とモノドロミー作用 (Gauss-Manin 系と思ったときの微分作用 $t\frac{d}{dt}$ から定まる作用) を持つ。さらに、$H^0_{rig}(X_s/K) = H^0_{log\text{-}rig}(X_s/K)$、および、完全列

$$\begin{array}{cccccccc} 0 & \to & H^1_{rig}(X_s/K) & \to & H^1_{log\text{-}rig}(X_s/K) & \to & \bigoplus_{\text{double points in } X_s} & K(-1) \\ & \to & H^2_{rig}(X_s/K) & \to & H^2_{log\text{-}rig}(X_s/K) & \to & 0 & \end{array}$$

が存在する。

References

[1] Berthelot, P., *Cohomologie cristalline des schémas de caractéristique* $p > 0$, Lecture Note in Math. **407**, Springer-Verlag (1974).

[2] Berthelot, P., *Cohomologie rigide et cohomologie de variétés algébriques de caractéristique p*, Bull. Soc. Math. France, Mémoire **23** (1986), 7-32.

[3] Berthelot, P., *$\mathcal{D}$-modules arithmétiques I. Opérateurs différentiels de niveau fini*, Ann Scient. École Norm. Sup. **29** (1996), 185-272.

[4] Berthelot, P., *Cohomologie rigide et cohomologie rigide à supports propres Première Partie*, preprint, Université de Rennes (1996).

[5] Berthelot, P., *Finitude et pureté cohomologique en cohomologie rigide (avec un appendice par Aise Johan de Jong)*, Invent. Math. **128** (1997), 329-377.

[6] Berthelot, P., *Dualité de Poincaré et formule de Künneth en cohomologie rigide*, C. R. Acad. Sci. Paris, **t. 325**, Série I (1997), 493-498.

[7] Chiarellotto, B., *Weights in rigid cohomology Application to unipotent F-isocrystals*, preprint, (1997).

[8] Crew, R., *Finiteness theorem for the cohomology of an overconvergent isocrystal on a curve*, preprint.

[9] Dwork, B., *On the rationality of the zeta function of an algebraic variety*, Amer. J. Math. **82** (1960), 631-648.

[10] Elkik, R., *Solutions d'équations à coefficients dans un anneau hensélien*, Ann Scient. École Norm. Sup. **6** (1973), 553-604.

[11] Etesse, J.-Y., Le Stum, B., *Fonctions L associées aux F-isocristaux surconvergents I. Interprétation cohomologique*, Math. Annalen **296** (1993), 557-576.

[12] Hartshorne R., *On the de Rham cohomology of algebraic varieties*, Publ. Math. I.H.E.S. **45** (1976), 5-99.

[13] de Jong, A.J., *Smoothness, semi-stability and alterations*, Publ. Math. I.H.E.S. **83** (1996), 51-93.

[14] 加藤 文元, p-進解析入門, in this volume.

[15] Mebkhout, Z., *Sur le théorème de finitude de la cohomologie p-adique d'une variété affine non singulière*, Amer. J. Math. **119** (1997), 1027-1081.

[16] Monsky, P., *Formal cohomology : II. The cohomology sequence of a pair*, Annals of Math. **88** (1968), 218-238.

[17] Monsky, P., *Formal cohomology : III. Fixed points theorems*, Annals of Math. **93** (1971), 315-343.

[18] Monsky, P., Washnitzer, G., *Formal cohomology : I*, Annals of Math. **88** (1968), 181-217.

[19] Nagata, M., *Embedding of an abstract variety in a complete variety*, J. Math. Kyoto Univ. **2** (1962), 1-10.

[20] van der Put, M., *The cohomology of Monsky-Washnitzer*, Bull. Soc. Math. France, Mémoire **23** (1986), 33-59.

[21] Reich, D., *A p-adic fixed point formula*, Amer. J. Math. **91** (1969), 835-850.

[22] Tsuzuki, N., *Morphisms of F-isocrystals and the finite monodromy theorem for unit-root F-isocrystals*, preprint (1998).

[23] Tsuzuki, N., *On the Gysin isomorphism of rigid cohomology*, preprint (1998).