数理解析研究所講究録
1077巻 1999年 62-78

C^*-dynamics and related problems

境 正一郎 (Shôichirô Sakai)

量子格子系とFermi場の擬自由力学系の理論を一般化したUHF C^*-代数に於けるnormal $*$-derivationsの理論は拙著[S]の中で展開されている。しかし,まだ多くの重要な問題が未解決である。本講演では,これらの問題の中から若干の興味深い問題を選んで解説する.

$\mathfrak{A}$をUHF C^*-代数とする。このとき$\mathfrak{A}$には有限次元全複素行列 $*$-代数の増加列$\{\mathfrak{A}_n\}$が存在して:(i) $1\in\mathfrak{A}_1\subset\cdots\subset\mathfrak{A}_n\subset\cdots$; (ii) $\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathfrak{A}_n$は$\mathfrak{A}$で稠密である。

$\mathcal{D}(\delta)=\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathfrak{A}_n$とし,$\delta$を$\mathcal{D}(\delta)$を定義域とする$\mathfrak{A}$に於ける$*$-derivationとする。このような$*$-derivationをnormal $*$-derivationという。δをnormal $*$-derivationとすると自己随伴な元の列$\{h_n\}$が存在して

$$\delta(a)=i[h_n,a]\quad(a\in\mathfrak{A}_n;\ n=1,2,\dots)$$

とかける.

したがって,δはwell-behavedであり

$$\|(1\pm\delta)(a)\|\geqq\|a\|\quad(a\in\mathcal{D}(\delta))$$

が成立す。

もし，$(1\pm\delta)\mathcal{D}(\delta)$ が $\mathfrak{A}$ で稠密ならば Hille-Yoshida の定理により

δ の閉包 $\bar{\delta}$ は $\mathfrak{A}$ 上の強連続な $*$-automorphisms の1パラメーター群 $t \longmapsto \exp t\bar{\delta}$ $(t\in\mathbb{R})$ の生成作用素となる。

さらに，

$$\|(\exp t\delta_{ih_n})(a)-(\exp t\bar{\delta})(a)\| \to 0 \ (n\to\infty)$$

$(a\in\mathfrak{A})$

が成立する．即ち，C*-dynamics $\{\mathfrak{A}, \exp t\bar{\delta}\}$ は approximately inner である．

一般に，$(1\pm\delta)\mathcal{D}(\delta)$ の稠密性を具体的な model について検証するのは容易でない。従って，normal $*$-derivation δ が如何なる条件の下で生成作用素である $*$-derivation に拡大できるか？という問題は極めて重要である．

この拡大問題は古典格子系の一般化である commutative normal $*$-derivation については拙著の中で完全な解答が示されている（cf. [S] §4.6）．

まず，この解答について述べる．

定義1．δ を normal $*$-derivation とする。δ が commutative であるとは自己随伴な元の列 $\{h_n\}$ が

互いに可換に選べることである。 即ち、

$\delta(a) = i[h_n, a]$ $(a \in \mathfrak{A}_n; n=1,2,\cdots)$ で

$h_m h_n = h_n h_m$ $(m, n = 1, 2, \cdots)$

が成立することである。 このとき、

次の定理が成立する。

定理 1. δ を commutative normal $*$-derivation とする。$\mathfrak{B}_n$ を $\mathfrak{A}_n$ と $h_1, h_2, \cdots, h_n$ で生成される $\mathfrak{A}$ の C^* 部分代数とする。 このとき、$\hat{\delta}(b) = i[h_n, b]$ $(b \in \mathfrak{B}_n; n=1,2,\cdots)$ とおくと、$\hat{\delta}$ は $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathfrak{B}_n$ 上で well-defined であり $\delta \subset \tilde{\delta}$ なる $*$-derivation であり、$\hat{\delta}$ の閉包 $\overline{\hat{\delta}}$ は生成作用素である。 さらに、

$(\exp t\overline{\hat{\delta}})(b) = (\exp t\delta_{ih_n})(b)$ $(b \in \mathfrak{B}_n; n=1,2,\cdots\cdots)$。とくに、$\bar{\delta}$ が生成作用素ならば $\bar{\delta} = \overline{\hat{\delta}}$ である。

が成立する。

従って、次の問題は重要である。

問題 1. δ を normal $*$-derivation とする。δ が $\mathfrak{A}$ に於ける生成作用素であるような $*$-derivation に拡大できるための必要十分条件を求めよ。

問題 2. $\mathfrak{A}$ に於ける normal $*$-derivation で生成作用素であるような $*$-derivation に拡大できない例があるか？

さらに，一般なる normal $*$-derivation の議論を進めよう。

δ を normal $*$-derivation とすると bounded $*$-derivation δ_0 が存在して $(\delta+\delta_0)(\mathcal{D}(\delta)) \subset \mathcal{D}(\delta)$ とできる (cf. [S] Prop. 4.5.5).

$\mathfrak{A}$ は unital simple C^*-algebra であるから bounded derivation はすべて inner (cf. [S] Th. 2.5.7) である。

従って，$h\,(=h^*) \in \mathfrak{A}$ が存在して $\delta_0 = \delta_{ih}$ とかける。bounded perturbation は生成作用素という性質を不変に保つから δ を $\delta + \delta_{ih}$ で置きかえて議論できる。

そこで，$\delta(\mathcal{D}(\delta)) \subset \mathcal{D}(\delta)$ と仮定する．

このとき，h_n の作り方 (cf. [S] p.159) から判るように $h_n \in \mathcal{D}(\delta)$ $(n=1,2,\cdots)$ とできる．

$\delta(\mathfrak{A}_1) \subset \mathfrak{A}_{n_2}$, $\delta(\mathfrak{A}_{n_2}) \subset \mathfrak{A}_{n_3}$, $\cdots$ $\delta(\mathfrak{A}_{n_j}) \subset \mathfrak{A}_{n_{j+1}}$, $\cdots$ なる部分列 $\{n_j\}$ をとり $\{\mathfrak{A}_n\}$ を $\{\mathfrak{A}_{n_j}\}$ で置きかえて，$\{\mathfrak{A}_n\}$ と記すことにすると $h_n \in \mathfrak{A}_{n+1}$ $(n=1,2,\cdots)$ と仮定できる．

このとき，次の定理が成立する．(cf. [S] prop. 4.5.6).

定理 2. $\delta = \delta_1 + \delta_2$ と表わせる。ここで $\delta_1(\mathfrak{A}_{2n}) \subset \mathfrak{A}_{2n}$, $\delta_2(\mathfrak{A}_{2n+1}) \subset \mathfrak{A}_{2n+1}$ $(n=1,2,\cdots)$.

とくに，δ_1, δ_2 は commutative normal $*$-derivation

である。さらに、$\delta_1(a)=i[p_n, a]$ $(a\in\mathfrak{A}_{2n}$, $p_n\in\mathfrak{A}_{2n}$; $n=1,2,\cdots)$, $\delta_2(a)=i[q_n, a]$ $(a\in\mathfrak{A}_{2n+1}$, $q_n\in\mathfrak{A}_{2n+1}$; $n=1,2,\cdots)$ ここで p_n, q_n は自己随伴な元である。

次に、$\delta(\mathfrak{A}_n)\subset\mathfrak{A}_{n+1}$ $(n=1,2,\cdots)$ とすると $a\in\mathfrak{A}_n$ に対し、

$$\delta^{m+1}(a)=\delta_{ih_{n+m}}\delta_{ih_{n+m-1}}\cdots\delta_{ih_n}(a)=\delta^{m+1}_{ih_{n+m}}(a)$$

である。もし、

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\|\delta^n(a)\|}{n!}r_a^n<+\infty$$

となる positive number r_a が存在するとき a を analytic vector という。$\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathfrak{A}_n=\mathcal{D}(\delta)$ のすべての元が analytic ならば Nelson の定理により $\bar{\delta}$ は生成作用素である。

さて、ここから逆の問題を考えよう。

$\{\mathfrak{A}, \alpha\}$ を UHF C^* 代数 $\mathfrak{A}$ 上の強連続な1パラメーター *-自己同型群 $t\longmapsto\alpha_t$ $(t\in\mathbb{R})$ からなる C^*-dynamics とする。$\alpha_t=\exp t\delta$ とおくと δ は $\mathfrak{A}$ に於ける closed な *-derivation である。

定理3. 上記の C^* dynamics に対し、$\mathfrak{A}$ の中に有限次元全複素行列 *-代数の増加列 $\{\mathfrak{A}_n\}$ が存在して次の条件をみたす。

(i) $1\in\mathfrak{A}_1\subset\mathfrak{A}_2\subset\cdots\subset\mathfrak{A}_n\subset\cdots$

(ii) $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathfrak{A}_n$ は $\mathfrak{A}$ で稠密である

(iii) $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathfrak{A}_n \subset A(\delta)$，ここで $A(\delta)$ は δ に関して analytic な vector 全体の集合である。(cf. [S] Th. 4.5.1)。

この定理に於いて適当な自己随伴元 h を $\mathfrak{A}$ の中にとると $(\delta+\delta_{ih})\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathfrak{A}_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathfrak{A}_n$ とできる。

従って次の問題は興味深い。

問題 3. $\mathfrak{A}$ の中に次の条件をみたす自己随伴な元 l が存在するだろうか？

(i) $(\delta+\delta_{il})\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathfrak{A}_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathfrak{A}_n$

(ii) $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathfrak{A}_n \subset A(\delta+\delta_{il})$

問題3が肯定的であるならば Powers-Sakai の予想 (cf. [S] 4.5.9) は肯定的である。

さて，UHF C*-代数 $\mathfrak{A}$ をもった C*-dynamics $\{\mathfrak{A}, \alpha\}$ を考えよう。このとき，定理3により $\{\mathfrak{A}_n\}$ が存在する。

もし，$(1-\delta)\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathfrak{A}_n$ が $\mathfrak{A}$ で稠密ならば，

$\delta(a) = i[h_n, a]$ $(a \in \mathfrak{A}_n ; n=1,2,\cdots)$ とすると，

$(1-\delta_{ih_n})^{-1} \longrightarrow (1-\delta)^{-1}$ (strongly) となるので，

Kato-Trotter の定理より

$\|(\exp t\delta_{ih_n})(a) - (\exp t\delta)(a)\| \longrightarrow 0 \quad (n \to \infty) \quad (a \in \mathfrak{A})$

即ち $\{\mathfrak{A}, \alpha\}$ は approximately inner である.

τ を $\mathfrak{A}$ 上の一意な tracial state とする。$\beta \in (-\infty, \infty)$ に対し

$$\varphi_{n,\beta}(a) = \frac{\tau(ae^{-\beta h_n})}{\tau(e^{-\beta h_n})} \quad (a \in \mathfrak{A})$$

とすると $\varphi_{n,\beta}$ は $\mathfrak{A}$ の state である.

φ_β を $\{\varphi_{n,\beta}\}$ の $\mathfrak{A}$ の state space に於ける $\sigma(\mathfrak{A}^*, \mathfrak{A})$ 位相に関する集積点とすると φ_β は C^* dynamics $\{\mathfrak{A}, \exp t\delta\}$ の inverse temerature β に於ける KMS state である.

次の問題は重要である

問題 3. ψ_β を $\{\mathfrak{A}, \exp t\delta\}$ の β に於ける KMS state とする。このとき，次の条件をみたす自己随伴な元の列 $\{l_n\}$ が $\mathfrak{A}$ の中に存在するだろうか？

(i) $\delta(a) = i[l_n, a] \quad (a \in \mathfrak{A}_n\,;\, n=1,2,\cdots)$

(ii) $\psi_{n,\beta}(a) = \dfrac{\tau(ae^{-\beta l_n})}{\tau(e^{-\beta l_n})} \quad (a \in \mathfrak{A})$ とするとき

ψ_β は $\mathfrak{A}$ の state space に於いて $\sigma(\mathfrak{A}^*, \mathfrak{A})$ 位相に関して $\{\psi_{n,\beta}\}$ の集積点である。

δ が commutative normal $*$-derivation ならばこの問題に対する解答は yes である。はるかに強力な定理が得られている (cf. [S] § 4.6).

ここでは，簡単のため $\delta(\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathfrak{A}_n) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathfrak{A}_n$ を

仮定で述べることにする.

定理 4. δ を commutative normal $*$-derivation とし, 次の条件をみたすものとする。

(i) $D(\delta)=\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathfrak{A}_n$

(ii) $\delta(D(\delta))\subset D(\delta)$

(iii) $\delta(a)=i[h_n,a]$ $(a\in\mathfrak{A}_n)$, $h_n\in\mathfrak{A}_{n+1}$,

かつ $h_n h_m=h_m h_n$ $(m,n=1,2,\cdots\cdots)$。

このとき, $\mathfrak{B}_n$ を $\mathfrak{A}_n$ と h_n で生成される $\mathfrak{A}_{n+1}$ の $*$-部分代数とする。いま, φ_β を C^* dynamics $\{\mathfrak{A},\exp t\bar{\delta}\}$ の β に於ける KMS state とすると, $\mathfrak{A}$ の中に次の条件をみたす自己随伴な元の列 $\{l_n\}$ が存在する。

(a) $l_n\in\mathfrak{B}_n$ $(n=1,2,\cdots\cdots)$

(b) $\bar{\delta}(b)=i[l_n,b]$ $(b\in\mathfrak{B}_n;\ n=1,2,\cdots\cdots)$

(c) $(\exp t\bar{\delta})(b)=(\exp t\delta_{il_n})(b)$ $(b\in\mathfrak{B}_n,\ n=1,2,\cdots)$

(d) $\varphi_\beta(b)=\dfrac{\tau(be^{-\beta l_n})}{\tau(e^{-\beta l_n})}$ $(b\in\mathfrak{B}_n;\ n=1,2,\cdots)$.

問題3は次の弱い形でも十分に興味深い.

問題 4. $\{\mathfrak{A},\alpha\}$ を UHF C^* 代数 $\mathfrak{A}$ をもった C^* dynamics とし, $t\mapsto\alpha_t$ は approximately inner とする。このとき, φ_β を $\{\mathfrak{A},\alpha\}$ の β に於ける KMS state とすると, 次の条件をみたす自己随伴な元の列 $\{l_n\}$ が

存在するだろうか？

(i') $\|(\exp t\delta_{i\ell_n})(a)-(\exp t\delta)(a)\|\to 0\ (n\to\infty)$

$(a\in\mathfrak{A})$ （ここで $\alpha_t=\exp t\delta$ ）

(ii) $\varphi_{n,\beta}(a)=\dfrac{\tau(a e^{-\beta \ell_n})}{\tau(e^{-\beta \ell_n})}$ $(a\in\mathfrak{A})$ とすると

φ_β は $\{\varphi_{n,\beta}\}$ の $\sigma(\mathfrak{A}^*,\mathfrak{A})$ 極限である。

上にあげてきた問題1 3 は commutative normal *-derivations の場合は完全な解答がある。一方，定理2は commutative normal *-derivations と normal *-derivations の間を結ぶ重要な定理である。この定理を使って commutative normal *-derivations の諸結果を normal *-derivations に拡張できるのではないだろうか？

定理3をより強力な形にするには，次の問題を研究することが重要である

問題 5. δ を normal *-derivation とする 如何なる条件の下で $\delta=\delta_1+\delta_2$ （ここで δ_1 は commutative, δ_2 は bounded）とかけるだろうか？

問題6. 上の問題が無条件で成立しないとすると $\delta=\delta_1+\delta_2$ (δ_1, commutative ; δ_2, bounded ）とかけない例をつくれ.

つぎに，$\{A, \exp t\delta\}$ を一般な C^*-dynamics とする。

ϕ を $\{A, \exp t\delta\}$ の inverse Temperature β に於ける KMS state とする．$\{\pi_\phi, U_\phi, \mathcal{H}_\phi\}$ を ϕ によってつくられた $\{A, \exp t\delta\}$ の covariant representation とする．$U_\phi(t) = \exp itH$ を U_ϕ の Stone 表現とする．$\mathcal{J} = \{a \mid \pi_\phi(a) = 0\}$ は A の two-sided ideal になる。簡単のため $\mathcal{J} = 0$ と仮定する．このとき，π_ϕ は 1 対 1 となるから，$\pi_\phi(A)$ と A を同一視することとする。

したがって，$A = \pi_\phi(A) \subset \pi_\phi(A)'' = M$（ここで，$M$ は $\pi_\phi(A)$ の弱位相による閉包である W^*代数）．　$A_2(\delta)$ を δ に関して geometric な元全体とする．　$h\,(=h^*) \in A_2(\delta)$ に対して

$$f(z, h)(a) = (a e^{iz(H+h)} 1_\phi, 1_\phi) \quad (a \in M,\ z \in \mathbb{C})$$

とおくと $f(z, h) \in M_*$．　このとき，

$f(0, h)(a) = (a 1_\phi, 1_\phi) = \phi(a)$．

$f(i\beta, h)(a) = (a e^{-\beta(H+h)} 1_\phi, 1_\phi)$ $(= \gamma^h(a)$ とおく$)$

とすると $\gamma^h / \gamma^h(1)$ は $\{A, \exp t(\delta + \delta_{ih})\}$ の β に於ける KMS state である．　ここで，$e^{iz(H+h)} e^{-izH} 1_\phi = e^{iz(H+h)} 1_\phi$ であり，$e^{iz(H+h)} e^{-izH}$ の閉包は A の元である．　$A_2(\delta)$ は A で一様位相で稠密であるので任意の $h\,(=h^*) \in A$ に対して，$\|h_n - h\| \to 0\ (n \to \infty)$ なる自己随伴な元の列 $\{h_n\}$ を $A_2(\delta)$ から選ぶことができる。

さらに、若干の議論が必要であるが $\{\psi^{h_n}\}$ は M_* の中でノルムに関して Cauchy 列であることが示せる。従ってすべての $h(=h^*)\in A$ に対し ψ^h が定義できる。更に、$\psi^h/\psi^h(1)$ は $\{A, \exp t(\delta+\delta_{ih})\}$ の β に於ける KMS state であることは容易に示せる。拙著の中での主要定理の1つは、次の compactness 定理である (cf. [S] Th. 4.4.7)。

定理 5. A を unital C^*algebra, $\{A, \exp t\delta\}$ を C^*dynamics とする。ϕ を $\{A, \exp t\delta\}$ の β に於ける KMS state とし、$r>0$ に対し $K_r=\{\psi^h \mid \|h\|\leqq r,\ h(=h^*)\in A\}$ とする。このとき、K_r は relatively $\sigma(A^*, A^{**})$-compact である（ここで A^* は A の双対空間, A^{**} は A^* の双対空間）。

この定理の拙著に於ける証明は複素関数論を使用するが、かなり複雑なものである。以下で著書の中の証明より若干単純化された証明の概要を述べる。より一層の単純化は興味深い問題である。

$$f(t,h)(a) = (a\, e^{it(H+h)} e^{-itH} 1_\phi, 1_\phi) \qquad (t\in\mathbb{R}),$$

$$f(t+i\beta,h)(a) = (a\, e^{-\beta(H+h)} e^{it(H+h)} e^{-itH} 1_\phi, 1_\phi)$$

$$= (e^{it(H+h)} e^{-itH} a\, e^{-\beta(H+h)} 1_\phi, 1_\phi)$$

（$\because$ $\psi^h/\psi^h(1)$ は KMS state for $\{A, \exp t\delta\}$ at β）

従って,

$$f(t,h)(a) = \phi(a e^{it(H+h)} e^{-itH}) = f(0,h)(a e^{it(H+h)} e^{-itH})$$

$$(t \in \mathbb{R}\ ;\ h \in A_2(\delta))$$

$$f(t+i\beta,h)(a) = f(i\beta,h)(e^{it(H+h)} e^{-itH} a) \quad (t \in \mathbb{R})$$

,ここで $e^{it(H+h)} e^{-itH} \in A$.

$p(s) = (e^{-s(H+h)} 1_\phi, 1_\phi) \quad (s \in [0,\beta])$ とすると

$$p'(s) = -(e^{-s(H+h)} (H+h) 1_\phi, 1_\phi)$$

$$p''(s) = ((H+h) e^{-s(H+h)} (H+h) 1_\phi, 1_\phi) \geqq 0$$

よって,$p'(s)$ は単調増加である.

$$p'(\beta) = -(e^{-\beta(H+h)} (H+h) 1_\phi, 1_\phi) = -(e^{-\beta(H+h)} h 1_\phi, 1_\phi)$$

$$= -(e^{-\beta(H+h)} h e^{\beta(H+h)} e^{-\beta(H+h)} 1_\phi, 1_\phi)$$

$$= -(h e^{-\beta(H+h)} 1_\phi, 1_\phi) = -\chi^h(h).$$

もし,$h \geqq 0$ とすると $p'(\beta) \leqq 0$. よって $p(\beta) \leqq$ $p(0) = (1_\phi, 1_\phi) = \phi(1) = 1$、

命題 1. $h (= h^*) \in A_2(\delta)$ とすると,

$$(e^{-\beta(H+h)} 1_\phi, 1_\phi) \leqq e^{\beta \|h\|}$$

証明. $(e^{-\beta(H+h+\|h\| 1)} 1_\phi, 1_\phi) = e^{-\beta\|h\|}$.

$(e^{-\beta(H+h)} 1_\phi, 1_\phi) \leqq 1$. よって $(e^{-\beta(H+h)} 1_\phi, 1_\phi) \leqq e^{\beta\|h\|}$ ┘

$$|f(t,h)(a)| = |\phi(a e^{it(H+h)} e^{-itH})|$$

$$\leqq \phi(aa^*)^{1/2} \phi(1)^{1/2} \leqq \|a\|$$

$$
\begin{aligned}
|f(t+i\beta, h)(a)| &= |\varphi^h(e^{it(H+h)}e^{-itH}a)| \\
&\leqq |\varphi^h(e^{it(H+h)}e^{-itH}a)| \\
&\leqq \varphi^h(1)^{1/2}\varphi^h(a^*a)^{1/2} \leqq e^{\frac{\beta}{2}\|h\|}\|\varphi^h\|\,\|a\| \\
&\leqq e^{\beta\|h\|}\|a\| .
\end{aligned}
$$

よって $f(z,h)(a)$ は $I_\beta=\{z\in\mathbb{C} \mid 0\leqq Im(z)\leqq\beta$ (又は $0\geqq Im(z)\geqq\beta$) $\}$ 上で有界で連続, $I_\beta^\circ=\{z\in\mathbb{C} \mid 0<Im(z)<\beta$ (又は $0>Im(z)>\beta$) $\}$ で解析的であり,

$$|f(z,h)(a)| \leqq e^{\beta\|h\|}\|a\|$$

$$\frac{d}{dt}f(t,h)(a) = (ae^{it(H+h)}he^{-itH}1_\phi, 1_\phi) ,$$

ゆえに $\left|\frac{d}{dt}f(t,h)(a)\right| \leqq \|a\|\,\|h\|$

同様に

$$\frac{d}{dt}f(t+i\beta,h)(a) = \varphi(e^{it(H+h)}he^{-itH}a)$$

より

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{d}{dt}f(t+i\beta,h)(a)\right| &\leqq \|\varphi^h\|\,\|h\|\,\|a\| \\
&\leqq e^{\beta\|h\|}\|h\|\,\|a\| .
\end{aligned}
$$

また

$$\frac{d}{dz}f(z,h)(a) = i(ae^{iz(H+h)}he^{-izH}1_\phi, 1_\phi)$$

$(z\in I_\beta^\circ)$

したがって,

$$\left|\frac{d}{ds}f(is,h)(a)\right| \leqq e^{\beta\|h\|}\|h\|\,\|a\| .$$

$g(s, h, a) = f(u(s, h))(a)$ とおくと

Ascoli-Arzela の定理により $\{g(\cdot, h, a) \mid \|h\| \leqq r, \|a\| \leqq k\}$ は $C[0, \beta]$ ($[0, \beta]$ 上で連続な関数全体のつくる C^*-代数) に於いて relatively compact である。 $a \in M$ に対し $\Omega_a = \{g(\cdot, h, a) \mid \|h\| \leqq r\}$ とし, $\overline{\Omega_a}$ を Ω_a の $C[0, \beta]$ に於けるノルム閉包とする. このとき $\overline{\Omega_a}$ は compact である。 $\Omega = \prod_{a \in M} \overline{\Omega_a}$ を weakly infinite product とすると Ω は compact space である。 Φ を $h \longrightarrow \{g(\cdot, h, a) \mid a \in M\}$ を $A_2(\delta)$ の自己随伴部分 $A_2(\delta)^s$ から Ω への写像とし, $\Gamma = \{h \in A_2(\delta)^s \mid \|h\| \leqq r\}$ とする. このとき $\overline{\Phi(\Gamma)}$ は compact である. $G \in \overline{\Phi(\Gamma)}$ に対し $G = \{G(a) \mid a \in M\}$ ($G(a) \in C[0, \beta]$). そのとき, 有向集合 $\{g(\cdot, h_\alpha, a) \mid \alpha \in \mathrm{II}\}$ が存在して,

$$\lim_\alpha \sup_{s \in [0,\beta]} |g(s, h_\alpha, a) - G(a)(s)| = 0 \quad (a \in M).$$

従って, $G(a+b) = G(a) + G(b)$, $G(\lambda a) = \lambda G(a)$ ($a, b \in M$, $\lambda \in \mathbb{C}$). かつ, $|G(a)(s)| \leqq e^{\beta r}\|a\|$. 即ち, $a \longmapsto G(a)(s)$ は有界線形汎関数である. 各 $a \in M$ に対し, 部分列 $\{h_{\alpha_n}\}$ が存在して,

$$\lim_{n} \sup_{s\in[0,\beta]} | f(is, h_{\alpha_n})(a) - G(a)(s) | = 0$$

他方，$\{h_{\alpha_n}\}$ の部分列 $\{h_{\alpha_{n_j}}\}$ が存在して，$\{f(z, h_{\alpha_{n_j}})(a)\}$ は I_β 上ですべての compact subset 上で一様に有界な連続関数 $\widehat{G}(a)(z)$ に収束し，$\widehat{G}(a)(z)$ は I^0 上で解析的である。　従って，

$$G(a)(s) = \widehat{G}(a)(is) \quad (s\in[0,\beta]).$$

もし，I_β 上で，有界で連続，I_β^0 上で解析的な関数 $\alpha(z)$ が $[0, i\beta]$ 上で $\widehat{G}(a)$ と一致していれば $\alpha(z) = \widehat{G}(a)(z)$ $(z\in I_\beta)$ である。　従って，各 $G(a)$ に対して $\widehat{G}(a)$ は一意に定まる。　さて，$\{f(i\beta, h) \mid \|h\|\leqq r,\ h\in A(\delta)^s\}$ が relatively $\sigma(M_*, M)$-compact であることを示す。

このためには，線形汎関数 $a \longmapsto G(a)(\beta)$ $(a\in M)$ が $\sigma(M, M_*)$-continuous であることを示せばよい。

1_ϕ は M に関して separating かつ generating vector であるから，M の有界集合上の strong*-topology は norm $\|a1_\phi\| + \|a^*1_\phi\|$ によって定義された位相と一致する。　$a \longmapsto G(a)(\beta)$ が $\sigma(M, M_*)$-continuous でないとすると，点列 $\{a_n\}$ $(a_n\in M)$ が存在して，$\|a_n\|\leqq 1$，$\|a_n 1_\phi\| + \|a_n^* 1_\phi\| \longrightarrow 0$ $(n\to\infty)$，かつ $|G(a_n)(\beta)| \geqq \varepsilon > 0$ $(n=1,2,\cdots\cdots)$.

$$|f(t,h_\alpha)(a)| = |(ae^{it(H+h_\alpha)}e^{-itH}1_\phi, 1_\phi)|$$
$$\leqq \phi(aa^*)^{1/2}\phi(1)^{1/2}.$$

したがって，

$$|\hat{G}(a)(t)| \leqq \phi(aa^*)^{1/2}\phi(1)^{1/2}.$$

よって

$$|\hat{G}(a_n)(t)| \leqq \phi(a_n a_n^*)^{1/2}\phi(1)^{1/2} \to 0.$$

一方

$$|\tilde{G}(a_n)(z)| \leqq e^{\beta r}\|a_n\| \leq e^{\beta r}$$

従って，部分列 $\{\tilde{G}(a_{n_p})\}$ が存在して，I_β^0 上のすべての compact subset 上で一様に1つの有界解析関数Fに収束する．

$\{\hat{G}(a_{n_p})\}$ は $(-\infty,\infty)$ 上で一様に0に収束するから，$F(z)=0.$ $(z\in I^0)$．他方，$\{G(a_{n_p})\}$ は relatively compact であるから，部分列 $\{\hat{G}(a_{n_{p_j}})\}$ が存在して，$[0,\beta]$ 上で連続な関数 p に一様に収束する $p(s)=F(is)$ であるから $p(s)=0$ $(s\in[0,\beta])$。

一方，

$$|G(a_{n_{p_j}})(\beta)| \geqq \varepsilon > 0 \quad (j\geqq 1)$$

これは矛盾である．（証明終）

問題７．定理５の簡単な証明があるだろうか？

参考文献

[S] S. Sakai, Operator algebras in dynamical systems, Encyclopedia of mathematics and its applications, Vol. 41 (1991), Cambridge University press