数理解析研究所講究録
1079 巻 1999 年 41-48

ランダムな出発時刻をもつ競合在庫モデルについて

大阪府立大学 総合科学部　　北條 仁志、寺岡義伸

1 Introduction

これまでの在庫分野における研究では一企業内における一製品/多製品の最適発注量に関連する一期間や多期間問題を扱うことが多かった。製品においてシェアを独占しているのであればこのような研究は有効であると思われる。しかしながら販売は企業と客との意思を考える必要があるように思われる。また企業がシェア１００%であるとは限らない。本稿では二つの競合している企業における在庫問題を考える。企業が複数であるため、互いに影響が及ぶ。この問題に対してゲーム理論的な考え方を取り入れることにより企業における最適発注量の平衡対を求める。

2 Model

二つの企業が線的市場に分布している客に対してある種の製品を販売する一期間在庫モデルを研究する。我々は彼らをPlayer I, IIと呼ぶ。プレーヤは製品を同時に販売し始め、市場上の需要量bを分け合う。プレーヤの過剰需要は他のプレーヤへ再配分される。Player I, IIは$[0,1]$区間上の端点$0,1$にそれぞれ配置されている。プレーヤは単価$c_i,(i=1,2)$で期首に一度だけ量z_iを発注することができる。そして客に対して単価r_iで販売し、利益を得る。自然な仮定として$r_i\geq c_i$であるとする。もし在庫があれば単位時間単位当たりh_iの維持費用を負い、不足しているならば単位時間単位当たりp_iの品切れ損失費用を負う。本稿ではプレーヤが不足を生じた場合、不足した客に対して後からそのプレーヤは補うことができない、すなわちバックログが許されない場合を扱う。しかしながらその不足分は他のプレーヤによって補うことができる、すなわち再配分は可能である。

客は$[0,1]$区間上に密度関数$f(x)$に従って分布しているとわかっている。地点$x\in[0,1]$の客は確率$p(x)$で最初にPlayer I側へ、残りの確率$1-p(x)$でPlayer II側へ一人一個の製品を購入しに行く。最初に訪れたプレーヤ側に在庫がないと知るや否や、もう一方のプレーヤ側へ直ちに向かう。客は各地点を$[0,t_0]$の一様分布に従うランダムな時刻に出発し、客の位置からプレーヤの位置までの移動時間はその距離に比例するとする。そのときtを単位距離当たりの移動時間とすると、プレーヤの計画時間t_sは最後の客まで待つのであれば$t_s=2t+t_0$であると考えられる。客は任意の時刻におけるプレーヤの在庫量を知らない。プレーヤの情報は相手側に伝わっているが、非協力的である。各プレーヤの目的は発注、維持、不足に伴う総費用の最小化である。各プレーヤは相手を考慮した上で期首にどのような戦略をとればよいであろうか。そこで発注量z_1,z_2は独立に決定される。

次の関数を定義する：

$$\begin{aligned}
q_1(T) &= \max\{0,(T-t_0)/t\},\ 0\leq T\leq t+t_0,\\
q_2(T) &= \min\{T/t,1\},\ 0\leq T\leq t+t_0,\\
q_3(T) &= \max\{0,(T-t_0)/t-1\},\ t\leq T\leq t_s,\\
q_4(T) &= \min\{T/t-1,1\},\ t\leq T\leq t_s.
\end{aligned}$$

我々は発注量z_iと需要量bの関係から次のような６つの状況を考える。

Situation 1: $z_1\geq\int_0^1 p(x)f(x)bdx, z_2\geq\int_0^1(1-p(x))f(x)bdx$.(Figure 1,2)

プレーヤ達は最初に訪れた客すべてに対して供給することができ、不足は生じない。このときプレーヤ

は過剰在庫となるので、維持コストを削減するためにできる限り手持ち在庫を減らす傾向にある。

Situation 2: $z_1 < \int_0^1 p(x)f(x)bdx, z_2 \geq \int_0^1 (1-p(x))f(x)bdx, z_1 + z_2 \geq b$.(Figure 3,4)

Situation 1と同様にすべての客に対して製品が供給される。しかしながらPlayer I側で不足が生じ、購入することができなかった客は直ちにPlayer II側へ向かい、製品を購入することができる。Player IIは過剰在庫を抱えるので、ある水準にまで手持ち在庫を減らそうとするであろう。需要量が確定的であるモデルではこの状況は考える必要がない。

Situation 3: $z_1 < \int_0^1 p(x)f(x)bdx, z_2 \geq \int_0^1 (1-p(x))f(x)bdx, z_1 + z_2 < b$.(Figure 5,6)

Situation 2と同様、Player I側に不足が生じる。Situation 2と異なる点はそこで購入できなかった客がPlayer II側へ行っても満たされないことが起こることである。再配分をもつモデルを考えるときにはこの状況と次の状況が重要視される。

Situation 4: $z_1 < \int_0^1 p(x)f(x)bdx, z_2 < \int_0^1 (1-p(x))f(x)bdx$.(Figure 7,8)

早く訪れた客は需要を満たされるが、後の方に訪れた客は満たされず、その後も満たされないままである。この状況はペナルティコストが維持コストより安い時に重要である。

Situation 5: $z_1 \geq \int_0^1 p(x)f(x)bdx, 0 \leq z_2 < \int_0^1 (1-p(x))f(x)bdx, z_1 + z_2 \geq b$.

これはSituation 2においてプレーヤの立場を入れ替えたものにすぎない。Situation 1, 2と同様、すべての客の需要が満たされる。しかしながらPlayer II側で不足が生じ、そこで満たされなかった客はPlayer I側で満たされることになる。需要量が確定的である場合には無視することができる。

Situation 6: $z_1 \geq \int_0^1 p(x)f(x)bdx, 0 \leq z_2 < \int_0^1 (1-p(x))f(x)bdx, z_1 + z_2 < b$.

これはSituation 3においてプレーヤの役割を入れ替えたものである。Player II側に不足が生じる。しかしながらそこで満たされなかった客はPlayer I側に行っても満たされないことがある。

このとき、それぞれのプレーヤに対して次のような総費用を得る：

$$
C^1(z_1,z_2) = \begin{cases}
[c_1+h_1]z_1 - [h_1+r_1]\int_0^1 p(x)f(x)b\,dx + \frac{h_1}{2}\int_0^1 xp(x)f(x)b\,dx \text{ for } (z_1,z_2) \text{ in S1,} \\
[c_1-p_1-r_1]z_1 + \frac{h_1+p_1}{t_s}\left\{\int_0^{q_1(t_1)}(tx+t_0-1)p(x)f(x)bdx + \frac{1}{t_0}\int_{q_1(t_1)}^{q_2(t_1)} txp(x)f(x)bdx\right\} \\
\quad -p_1\left\{\int_0^1 p(x)f(x)bdx - \frac{1}{t_s}\int_0^1 (tx+t_0-1)p(x)f(x)bdx\right\} \text{ for } (z_1,z_2) \text{ in S2,S3,} \\
[c_1-p_1-r_1]z_1 + \frac{h_1+p_1}{t_s}\left\{\int_0^{q_1(t_1)}(tx+t_0-1)p(x)f(x)bdx + \frac{1}{t_0}\int_{q_1(t_1)}^{q_2(t_1)} txp(x)f(x)bdx\right\} \\
\quad -p_1\left\{\left(1-\frac{t}{t_s}\right)(z_2-b) - \frac{1}{t_0}\left\{\int_0^1 (t-tx-t_0+1)p(x)f(x)bdx\right.\right. \\
\quad -\int_0^{1-q_1(t_3)}(t-tx+t_0+1)(1-p(x))f(x)bdx \\
\quad \left.\left.+\frac{1}{t_0}\int_{1-q_2(t_3)}^{1-q_1(t_3)}(t-tx)(1-p(x))f(x)bdx\right\}\right\} \text{ for } (z_1,z_2) \text{ in S4,} \\
[c_1+h_1]z_1 + \left[h_1(1-\frac{t}{t_s})+r_1\right](z_2-b) + \frac{h_1}{t_s}\left\{\int_0^1 (tx+t_0-t-1)p(x)f(x)bdx\right. \\
\quad +\int_0^{1-q_1(t_3)}(t-tx+t_0-1)(1-p(x))f(x)bdx \\
\quad \left.-\frac{1}{t_0}\int_{1-q_2(t_3)}^{1-q_1(t_3)}(t-tx)(1-p(x))f(x)bdx\right\} \text{ for } (z_1,z_2) \text{ in S5,} \\
[c_1-p_1-r_1]z_1 - \left[\frac{t}{t_s}h_1+p_1\right](z_2-b) - \frac{h_1+p_1}{t_s}\left\{A_2\int_{q_1(t_4)}^1 (tx+t_0-1)p(x)f(x)bdx\right. \\
\quad +\int^{1-q_3(t_4)}(2t-tx+t_0-1)(1-p(x))f(x)bdx - \frac{1}{t_0}\left\{A_2\int_{q_1(t_4)}^1 txp(x)f(x)bdx\right. \\
\quad \left.\left.+\int_{1-q_4(t_4)}^{1-q_3(t_4)}(2t-tx)(1-p(x))f(x)bdx\right\}\right\} - \frac{h_1}{t_s}\left\{\int_0^1 (t-tx-t_0+1)p(x)f(x)bdx\right. \\
\quad -\int_0^{1-q_1(t_3)}(t-tx+t_0-1)(1-p(x))f(x)bdx \\
\quad \left.+\frac{1}{t_0}\int_{1-q_2(t_3)}^{1-q_1(t_3)}(t-tx)(1-p(x))f(x)bdx\right\} \text{ for } (z_1,z_2) \text{ in S6;}
\end{cases}
$$

$C^2(z_1,z_2)$

$$
= \begin{cases}
[c_2+h_2]z_2 - \left[\frac{1}{2}h_2 + r_2\right]\{b - \int_0^1 p(x)f(x)b\,dx\} - \frac{h_2}{2}\int_0^1 x(1-p(x))f(x)b\,dx \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{for } (z_1,z_2) \text{ in S1}, \\
[c_2+h_2]z_2 + \left[h_2\left(1-\frac{t}{t_s}\right) + r_2\right](z_1-b) - \frac{h_2}{t_s}\left\{\int_0^1 (tx-t_0+1)(1-p(x))f(x)bdx\right. \\
\qquad \left. - \int_{q_1(t_1)}^1 (tx+t_0-1)p(x)f(x)bdx + \frac{1}{t_0}\int_{q_1(t_1)}^{q_2(t_1)} txp(x)f(x)bdx\right\} \text{ for } (z_1,z_2) \text{ in S2}, \\
[c_2-p_2-r_2]z_2 - \left[\frac{t}{t_s}h_2 + p_2\right](z_1-b) - \frac{h_2+p_2}{t_s}\left\{\int_{q_3(t_2)}^1 (tx+t+t_0-1)p(x)f(x)bdx\right. \\
\qquad +A_1\int_0^{1-q_1(t_2)}(t-tx+t_0-1)(1-p(x))f(x)bdx - \frac{1}{t_0}\left\{\int_{q_3(t_4)}^{q_4(t_2)}(tx+t)p(x)f(x)bdx\right. \\
\qquad \left.\left. +A_1\int_0^{1-q_1(t_2)}(t-tx)(1-p(x))f(x)bdx\right\}\right\} - \frac{h_2}{t_s}\left\{\int_0^1 (tx-t_0+1)(1-p(x))f(x)bdx\right. \\
\qquad \left. +\frac{1}{t_0}\int_{q_1(t_1)}^{q_2(t_1)} txp(x)f(x)bdx\right\} \text{ for } (z_1,z_2) \text{ in S3}, \\
[c_2-p_2-r_2]z_2 + \frac{h_2+p_2}{t_s}\left\{\int_{1-q_1(t_3)}^1 (t-tx+t_0-1)(1-p(x))f(x)bdx\right. \\
\qquad \left. +\frac{1}{t_0}\int_{1-q_2(t_3)}^{1-q_1(t_3)}(t-tx)(1-p(x))f(x)bdx\right\} - p_2\left\{\left(1-\frac{t}{t_s}\right)(z_1-b)\right. \\
\qquad +\frac{1}{t_s}\left\{\int_0^1 (tx-t_0+1)(1-p(x))f(x)bdx - \int_{q_1(t_1)}^1 (tx+t_0-1)p(x)f(x)bdx\right. \\
\qquad \left.\left. +\frac{1}{t_0}\int_{q_1(t_1)}^{q_2(t_1)} txp(x)f(x)bdx\right\}\right\} \text{ for } (z_1,z_2) \text{ in S4}, \\
[c_2-p_2-r_2]z_2 + \frac{h_2+p_2}{t_s}\left\{\int_{1-q_1(t_3)}^1 (t-tx+t_0-1)(1-p(x))f(x)bdx\right. \\
\qquad \left. +\frac{1}{t_0}\int_{1-q_2(t_3)}^{1-q_1(t_3)}(t-tx)(1-p(x))f(x)bdx\right\} + p_2\left\{\int_0^1 (1-p(x))f(x)bdx\right. \\
\qquad \left. -\frac{1}{t_s}(t-tx+t_0-1)(1-p(x))f(x)bdx\right\} \text{ for } (z_1,z_2) \text{ in S5,S6};
\end{cases}
$$

そこで

$$
A_1 = \begin{cases} 1, & t+t_1 \le t_2 < t+t_0, \\ 0, & t+t_0 \le t_2 \le t_s; \end{cases}
$$

$$
A_2 = \begin{cases} 1, & t+t_3 \le t_4 < t+t_0, \\ 0, & t+t_0 \le t_4 \le t_s. \end{cases}
$$

$$
\begin{aligned}
t_1 &= \min\left\{T \,\middle|\, z_1 - \int_0^{q_1(t_1)} p(x)f(x)bdx - \frac{1}{t_0}\int_{q_1(t_1)}^{q_2(t_1)} p(x)f(x)bdx = 0,\ 0 \le t_1 \le t+t_0\right\}. \\
t_2 &= \min\left\{T \,\middle|\, z_1+z_2-b+\int_{q_3(t_2)}^1 p(x)f(x)bdx + A_1\int_0^{1-q_1(t_2)}(1-p(x))f(x)bdx\right. \\
&\quad \left. -\frac{1}{t_0}\left\{\int_{q_3(t_2)}^{q_4(t_2)} p(x)f(x)bdx + A_1\int_0^{1-p_1(t_2)}(1-p(x))f(x)bdx\right\} = 0,\ t+t_1 \le t_2 \le t_s\right\}. \\
t_3 &= \min\left\{T \,\middle|\, z_2 - \int_{1-q_1(t_3)}^1 (1-p(x))f(x)bdx - \frac{1}{t_0}\int_{1-q_2(t_3)}^{1-q_1(t_3)}(1-p(x))f(x)bdx = 0,\right. \\
&\quad \left. 0 \le t_3 \le t+t_0\right\}. \\
t_4 &= \min\left\{T \,\middle|\, z_1+z_2-b+A_2\int_{q_1(t_4)}^1 p(x)f(x)bdx + \int_0^{1-q_3(t_4)}(1-p(x))f(x)bdx\right. \\
&\quad \left. -\frac{1}{t_0}\left\{A_2\int_{q_1(t_4)}^1 p(x)f(x)bdx + \int_{1-q_4(t_4)}^{1-q_3(t_4)}(1-p(x))f(x)bdx\right\} = 0,\ t+t_3 \le t_4 \le t_s\right\}.
\end{aligned}
$$

これらの式から$t_1,\cdots,t_4$は与えられた各対(z_1,z_2)に対して唯一に決定される。Player Iにおける総費用$C^1(z_1,z_2)$はz_1に関する区分的凸関数であり、Player IIにおける総費用$C^2(z_1,z_2)$もz_2に関する区分的凸関数であることがわかる。ゆえに$C^1(z_1,z_2)$を最小にするPlayer Iの最適在庫量z_1^*として次のようないく

つかの値を得る：

$$\begin{cases} \int_0^1 p(x)f(x)b\,dx \\ \int_0^{q_1(t_1^*)} p(x)f(x)bdx + \frac{1}{t_0}\int_{q_1(t_1^*)}^{q_2(t_1^*)} p(x)f(x)bdx \\ b - \int_{1-q_1(t_3^*)}^1 (1-p(x))f(x)bdx - \frac{1}{t_0}\int_{1-q_2(t_3^*)}^{1-q_1(t_3^*)} (1-p(x))f(x)bdx \\ b - \int_{1-q_1(t_3^*)}^1 (1-p(x))f(x)bdx - \frac{1}{t_0}\int_{1-q_2(t_3^*)}^{1-q_1(t_3^*)} (1-p(x))f(x)bdx - A_2\int_{q_1(t_4^*)}^1 p(x)f(x)b\,dx \\ \quad - \int_0^{1-q_3(t_4^*)} (1-p(x))f(x)bdx + \frac{1}{t_0}\left\{A_2\int_{q_1(t_4^*)}^1 p(x)f(x)bdx + \int_{1-q_4(t_4^*)}^{1-q_3(t_4^*)} (1-p(x))f(x)bdx\right\} \end{cases} \tag{1}$$

同様に総費用$C^2(z_1, z_2)$を最小にするPlayer IIの最適在庫量z_2^*についても次のような4つの値を得る：

$$\begin{cases} b - \int_0^1 p(x)f(x)b\,dx \\ b - \int_0^{q_1(t_1^*)} p(x)f(x)bdx - \frac{1}{t_0}\int_{q_1(t_1^*)}^{q_2(t_1^*)} p(x)f(x)bdx \\ b - \int_0^{q_1(t_1^*)} p(x)f(x)bdx - \frac{1}{t_0}\int_{q_1(t_1^*)}^{q_2(t_1^*)} p(x)f(x)bdx - \int_{q_3(t_2^*)}^1 p(x)f(x)bdx \\ \quad -A_1\int_0^{1-q_1(t_2^*)} (1-p(x))f(x)bdx + \frac{1}{t_0}\left\{\int_{q_3(t_2^*)}^{q_4(t_2^*)} p(x)f(x)bdx + A_1\int_0^{1-p_1(t_2^*)} (1-p(x))f(x)bdx\right\} \\ \int_{1-q_1(t_3^*)}^1 (1-p(x))f(x)bdx + \frac{1}{t_0}\int_{1-q_2(t_3^*)}^{1-q_1(t_3^*)} (1-p(x))f(x)bdx \end{cases} \tag{2}$$

そこで

$$t_1^* = t_4^* = \frac{r_1 - c_1 + p_1}{h_1 + p_1}t, \qquad t_2^* = t_3^* = \frac{r_2 - c_2 + p_2}{h_2 + p_2}t.$$

3 平衡点

前節で得られた最適発注量z_i^*をPlayer i の支配された純戦略の一つの候補値として考える。このモデルをゲーム理論の立場から見ればこれらは連続した濃度の純戦略をもつゲームとして解釈できる。我々はこの純戦略をもとにして利得行列を与え、それらの戦略により生成される利得行列を用いて平衡点を見つけるという方法で解析を行う。その際、単位当たりの利得に関する領域について次の様な十通りの場合分けを必要とした。

(A) $0 \le r_1 - c_1 < \frac{t+t_0}{t_s}h_1 - \frac{t}{t_s}p_1$, $r_2 - c_2 \ge h_2$

(B) $0 \le r_1 - c_1 < \frac{t+t_0}{t_s}h_1 - \frac{t}{t_s}p_1$, $\max\{\frac{t+t_0}{t_s}h_2 - \frac{t}{t_s}p_2, \frac{(h_2+p_2)(r_1-c_1+p_1)}{h_1+p_1} + \frac{t}{t_s}h_2 - \frac{t+t_0}{t_s}p_2\} \le r_2 - c_2 < h_2$

(C) $\frac{t_0}{t_s}h_1 - \frac{2t}{t_s}p_1 \le r_1 - c_1 < \frac{t+t_0}{t_s}h_1 - \frac{t}{t_s}p_1$, $\frac{t+t_0}{t_s}h_2 - \frac{t}{t_s}p_2 \le r_2 - c_2 < \frac{(h_2+p_2)(r_1-c_1+p_1)}{h_1+p_1} + \frac{t}{t_s}h_2 - \frac{t+t_0}{t_s}p_2$

(D) $0 \le r_1 - c_1 < \frac{t_0}{t_s}h_1 - \frac{2t}{t_s}p_1$, $\frac{(h_2+p_2)(r_1-c_1+p_1)}{h_1+p_1} + \frac{t}{t_s}h_2 - \frac{t+t_0}{t_s}p_2 \le r_2 - c_2 < \frac{t+t_0}{t_s}h_2 - \frac{t}{t_s}p_2$

(E) $r_1 - c_1 \ge h_2$, $0 \le r_2 - c_2 < \frac{t+t_0}{t_s}h_2 - \frac{t}{t_s}p_2$

(F) $\max\{\frac{t+t_0}{t_s}h_1 - \frac{t}{t_s}p_1, \frac{(h_1+p_1)(r_2-c_2+p_2)}{h_2+p_2} + \frac{t}{t_s}h_1 - \frac{t+t_0}{t_s}p_1\} \le r_1 - c_1 < h_1$, $0 \le r_2 - c_2 < \frac{t+t_0}{t_s}h_2 - \frac{t}{t_s}p_2$

(G) $\frac{t+t_0}{t_s}h_1 - \frac{t}{t_s}p_1 \le r_1 - c_1 < \frac{(h_1+p_1)(r_2-c_2+p_2)}{h_2+p_2} + \frac{t}{t_s}h_1 - \frac{t+t_0}{t_s}p_1$, $\frac{t_0}{t_s}h_2 - \frac{2t}{t_s}p_2 \le r_2 - c_2 < \frac{t+t_0}{t_s}h_2 - \frac{t}{t_s}p_2$

(H) $\frac{(h_1+p_1)(r_2-c_2+p_2)}{h_2+p_2} + \frac{t}{t_s}h_1 - \frac{t+t_0}{t_s}p_1 \le r_1 - c_1 < \frac{t+t_0}{t_s}h_1 - \frac{t}{t_s}p_1$, $0 \le r_2 - c_2 < \frac{t_0}{t_s}h_2 - \frac{2t}{t_s}p_2$

(I) $0 \le r_1 - c_1 < \min\{\frac{t+t_0}{t_s}h_1 - \frac{t}{t_s}p_1, \frac{(h_1+p_1)(r_2-c_2+p_2)}{h_2+p_2} + \frac{t}{t_s}h_1 - \frac{t+t_0}{t_s}p_1\}$,
$\min\{\frac{t+t_0}{t_s}h_2 - \frac{t}{t_s}p_2, \frac{(h_2+p_2)(r_1-c_1+p_1)}{h_1+p_1} + \frac{t}{t_s}h_2 - \frac{t+t_0}{t_s}p_2\} \le r_2 - c_2 < h_2$

(J) otherwise

$$z_1^0 = \int_0^{q_1(t_1^*)} p(x)f(x)b\,dx + \frac{1}{t_0}\int_{q_1(t_1^*)}^{q_2(t_1^*)} p(x)f(x)b\,dx,$$

$$z_2^0 = \int_{1-q_1(t_3^*)}^1 (1-p(x))f(x)b\,dx + \frac{1}{t_0}\int_{1-q_2(t_3^*)}^{1-q_1(t_3^*)} (1-p(x))f(x)b\,dx$$

とおく。これらの各場合に対してPlayer IとIIにおける純戦略の中から平衡点を見つける。ここでは(B)に対して$0 \le r_1 - c_1 < \frac{t+t_0}{t_s}h_1 - \frac{t}{t_s}p_1, \max\{\frac{t+t_0}{t_s}h_2 - \frac{t}{t_s}p_2, \frac{(h_2+p_2)(r_1-c_1+p_1)}{h_1+p_1} + \frac{t}{t_s}h_2 - \frac{t+t_0}{t_s}p_2\} \le r_2 - c_2 < h_2$

上での平衡点を見つける。他の場合も同様にして求められる。Player Iは純戦略として次のような2つの戦略をとる ：$\mathrm{I}_1=\int_0^1 p(x)f(x)b\,dx$ と $\mathrm{I}_2=\int_0^{q_1(t_1^*)} p(x)f(x)bdx+\frac{1}{t_0}\int_{q_1(t_1^*)}^{q_2(t_1^*)} p(x)f(x)bdx$。Player II も2つの純戦略をもつ ：$\mathrm{II}_1=\int_0^1(1-p(x))f(x)bdx$ と $\mathrm{II}_2=b-\mathrm{I}_2-\int_{q_3(t_2^*)}^1 p(x)f(x)b\,dx-A_1\int_0^{1-q_1(t_2^*)}(1-p(x))f(x)b\,dx+\frac{1}{t_0}\left\{\int_{q_3(t_2^*)}^{q_4(t_2^*)} p(x)f(x)bdx+A_1\int_{1-q_2(t_2^*)}^{1-q_1(t_2^*)}(1-p(x))f(x)bdx\right\}$。これらの戦略を並べて次のような縮小された利得行列を得る:

$$
\begin{array}{c}
\\
\mathrm{I}_1\\
\mathrm{I}_2
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cc}
\qquad\quad\mathrm{II}_1 & \qquad\qquad\qquad\mathrm{II}_2
\end{array}\\
\begin{pmatrix}
(C_1^1(\mathrm{I}_1,\mathrm{II}_1),C_1^2(\mathrm{I}_1,\mathrm{II}_1)) & (C_1^1(\mathrm{I}_1,\mathrm{II}_2),C_1^2(\mathrm{I}_1,\mathrm{II}_2))\\
(C_3^1(\mathrm{I}_2,\mathrm{II}_1),C_3^2(\mathrm{I}_2,\mathrm{II}_1)) & (C_3^1(\mathrm{I}_2,\mathrm{II}_2),C_3^2(\mathrm{I}_2,\mathrm{II}_2))
\end{pmatrix}
\end{array}.
$$

コスト関数の連続性

$$C_1^1\left(\int_0^1 p(x)f(x)b\,dx,\cdot\right)=C_3^1\left(\int_0^1 p(x)f(x)b\,dx,\cdot\right)$$

が成り立つ。そこで$C_j^i(,)$はSituation jであるときのプレーヤiにおける期間あたりの総費用である。$C_3^1(z_1,z_2)$の最適性から戦略I_1は戦略I_2によって支配される。この支配により縮小された行列において$C_3^2(z_1,z_2)$の最適性から戦略II_1は戦略II_2により支配される。従って平衡点$(z_1^*,z_2^*)=(\int_0^{q_1(t_1^*)} p(x)f(x)b\,dx+\frac{1}{t_0}\int_{q_1(t_1^*)}^{q_2(t_1^*)} p(x)f(x)b\,dx, b-z_1^*-\int_{q_3(t_2^*)}^1 p(x)f(x)b\,dx-A_1\int_0^{1-q_1(t_2^*)}(1-p(x))f(x)b\,dx+\frac{1}{t_0}\{\int_{q_3(t_2^*)}^{q_4(t_2^*)} p(x)f(x)b\,dx+A_1\int_{1-q_2(t_2^*)}^{1-q_1(t_2^*)}(1-p(x))f(x)bdx\})$が求まる。このような方法によりそれぞれの場合に対して次の様な結果が得られる：

(A) $(z_1^*,z_2^*)=(z_1^0,b-z_1^*)$

(B)&(D) $(z_1^*,z_2^*)=(z_1^0,b-z_1^0-\int_{q_3(t_2^*)}^1 p(x)f(x)b\,dx-A_1\int_0^{1-q_1(t_2^*)}(1-p(x))f(x)b\,dx$
$\quad+\frac{1}{t_0}\{\int_{q_3(t_2^*)}^{q_4(t_2^*)} p(x)f(x)b\,dx+A_1\int_{1-q_2(t_2^*)}^{1-q_1(t_2^*)}(1-p(x))f(x)bdx\})$.

(C) $(z_1^*,z_2^*)=(z_1^0,\int_0^1(1-p(x))f(x)b\,dx)$

(E) $(z_1^*,z_2^*)=(b-z_2^*,z_2^0)$

(F)&(H) $(z_1^*,z_2^*)=(b-z_2^0-\int_0^{1-q_3(t_4^*)}(1-p(x))f(x)b\,dx-A_2\int_{q_1(t_4^*)}^1 p(x)f(x)\,dx$
$\quad+\frac{1}{t_0}\{A_2\int_{q_1(t_4^*)}^{q_2(t_4^*)} p(x)f(x)\,dx+\int_{1-q_4(t_4^*)}^{1-q_3(t_4^*)}(1-p(x))f(x)b\,dx\},z_2^0)$

(G) $(z_1^*,z_2^*)=(\int_0^1 p(x)f(x)b\,dx,z_2^0)$

(I) $(z_1^*,z_2^*)=(z_1^0,z_2^0)$

(J) $(z_1^*,z_2^*)=(\int_0^1 p(x)f(x)b\,dx,\int_0^1(1-p(x))f(x)b\,dx)$

4 数値例

このモデルにおいて客が確率的な時刻に出発するという仮定を時刻0に同時に出発するという仮定で置き換えたモデルを前モデルと呼ぶことにする。表1は前モデルにおける数値を表したものであり、表2〜4は前モデルとこのモデルとの比較をするためにt,t_0へいくつかの数値を代入して得られた結果である。そこでパラメータ値として$c_1=c_2=0,h_1=1.0,p_1=0.5,h_2=2.0,p_2=1.0,f(x)=1,b=1$を用いた。

$r_2 \setminus r_1$	0.1	0.25	0.9	1.1
0.1	(0.496,0.491)	(0.500,0.491)	(0.508,0.491)	(0.509,0.491)
0.5	(0.496,0.500)	(0.500,0.500)	(0.500,0.500)	(0.500,0.500)
1.8	(0.496,0.503)	(0.500,0.500)	(0.500,0.500)	(0.500,0.500)
2.2	(0.496,0.504)	(0.500,0.500)	(0.500,0.500)	(0.500,0.500)

表 1: 前モデルにおける平衡点 (z_1^*, z_2^*)

$r_2 \setminus r_1$	0.1	0.25	0.9	1.1
0.1	(0.500,0.4998)	(0.500,0.4998)	(0.5002,0.4998)	(0.5002,0.4998)
0.5	(0.500,0.500)	(0.500,0.500)	(0.500,0.500)	(0.500,0.500)
1.8	(0.500,0.500)	(0.500,0.500)	(0.500,0.500)	(0.500,0.500)
2.2	(0.500,0.500)	(0.500,0.500)	(0.500,0.500)	(0.500,0.500)

表 2: $t = 2.0, t_0 = 1.0$ における平衡点 (z_1^*, z_2^*)

$r_2 \setminus r_1$	0.1	0.25	0.9	1.1
0.1	(0.4988,0.4969)	(0.500,0.4969)	(0.5028,0.4969)	(0.5031,0.4969)
0.5	(0.4988,0.500)	(0.500,0.500)	(0.4997,0.500)	(0.500,0.500)
1.8	(0.4988,0.4985)	(0.500,0.4997)	(0.500,0.500)	(0.500,0.500)
2.2	(0.4988,0.5012)	(0.500,0.500)	(0.500,0.500)	(0.500,0.500)

表 3: $t = 2.0, t_0 = 1.5$ における平衡点 (z_1^*, z_2^*)

$r_2 \setminus r_1$	0.1	0.25	0.9	1.1
0.1	(0.4999,0.4998)	(0.500,0.4988)	(0.5012,0.4988)	(0.5012,0.4988)
0.5	(0.4999,0.500)	(0.500,0.500)	(0.500,0.500)	(0.500,0.500)
1.8	(0.4999,0.4999)	(0.500,0.500)	(0.500,0.500)	(0.500,0.500)
2.2	(0.4999,0.5001)	(0.500,0.500)	(0.500,0.500)	(0.500,0.500)

表 4: $t = 3.0, t_0 = 1.0$ における平衡点 (z_1^*, z_2^*)

5 考察

客の出発時刻が一様分布に従うときの過剰需要における再配分をもつ競合在庫問題を扱った。このモデルは新聞の広告により購入意志をもっている客へ情報が一度に広まるときの在庫問題として役立つであろう。前モデルとは出発時間が不確定であるという点で異なる。しかしながら結果としては前モデルと同じような形をもつ解が得られた。上の結果からわかるように、$h_1 \leq \frac{t}{t+t_0}p_1$かつ$h_2 \leq \frac{t}{t+t_0}p_2$であるならば平衡点としてPlayer Iは戦略$\int_0^1 p(x)f(x)bdx$をとり、Player IIは戦略$\int_0^1(1-p(x))f(x)bdx$をとる。そのような戦略をとることは明らかであり、自然な解である。$h_1 > \frac{t}{t+t_0}p_1$あるいは$h_2 > \frac{t}{t+t_0}p_2$であるならば、$(\int_0^1 p(x)f(x)bdx, \int_0^1(1-p(x))f(x)bdx)$以外の解を得た。我々は特に(A),(B),(D),(E),(F),(H)における平

衡点に興味をもっている。

数値例では前モデルよりいずれの場合にも値として0.5に近づいていた。これは出発時刻を不確実にしたためである。tをt_0に近づけると平衡点は$(0.5, 0.5)$に近づき、t_0に比べてtを十分大きくとると前モデルの値へと近づく。このことからこのモデルにおける平衡点の値は上限や下限を前モデルにおける平衡点によりおさえられていると思われる。明らかにいずれの場合も二人のプレーヤの値の和が総需要量を越えることはない。一企業における最適在庫問題では最適解が単に凸となるのに対し、この研究において平衡点として凸でない結果が得られていることは注目すべき点である。

参考文献

[1] Parlar, M., *Game Theoretic Analysis of the Substitutable Product Inventory Problem with Random Demand*, Naval Research Logistics, Vol.35, pp.397-409, 1988.

[2] Lippman, S. A. and McCardle, K. F., *The Competitive Newsboy*, Operations Research, Vol.45, pp.54-65, 1997.

[3] Heymand, D. P. and Sobel, M. J., *Handbooks in OR and MS*, Vol.2, Elsevier Science Publishers, 1990.

[4] Kodama, M., *The basis of Production and Inventory Control Systems* (in Japanese), Kyushu University Press, Japan, 1996.

[5] Kodama, M., *Probabilistic Multiperiod Inventory Models Under general Demand*, Mathematica Japonica, Vol.46, pp.463-484, 1998.

[6] Hotelling, H., *stability in competition*, Economic Journal, Vol.39, pp.41-57, 1929.

[7] Huff, D. L., *Defining and Estimating a Trading Area*, Journal of Marketing, Vol.28, pp.34-38, 1964.

[8] Topkis, D. M., *Equilibrium Points in Nonzero-Sum n-Person Submodular Games*, SLAM J. Control and Optimization, Vol.17, pp.773-787, 1979.

[9] Hohjo, H., *A Competitive Inventory Model with Reallocation under Uniform Demand Distribution*, Mathematica Japonica, Vol.49, No.1,(in press) 1999.

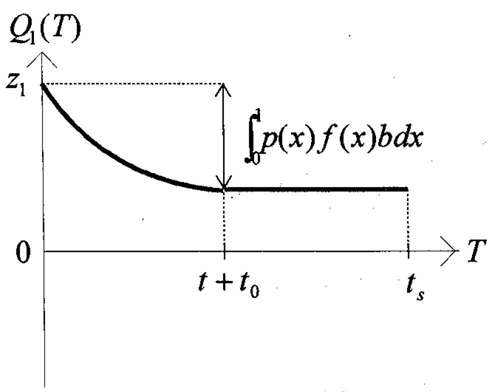

Figure 1　Player I of Situation 1.

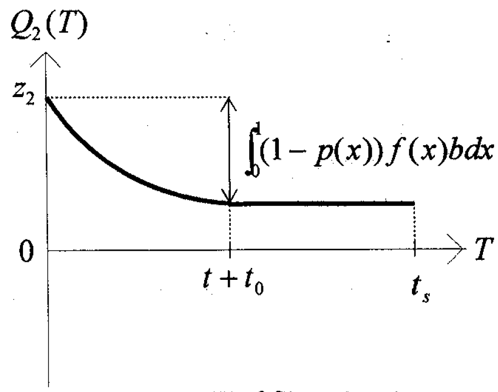

Figure 2　Player II of Situation 1.

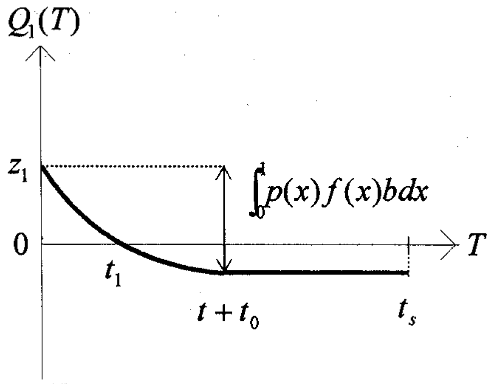

Figure 3 Player I of Situation 2.

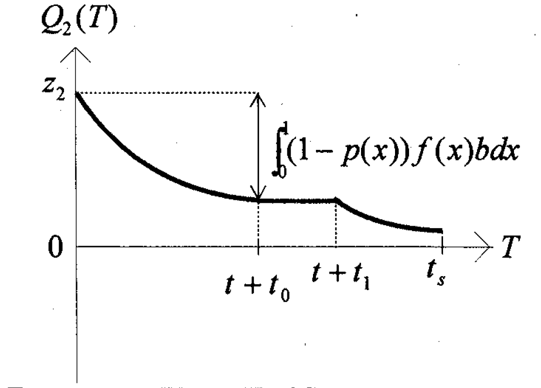

Figure 4 Player II of Situation 2.

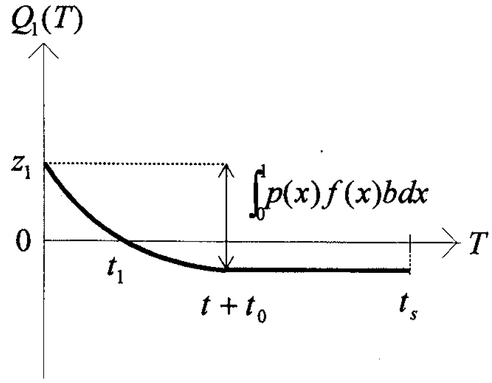

Figure 5 Player I of Situation 3.

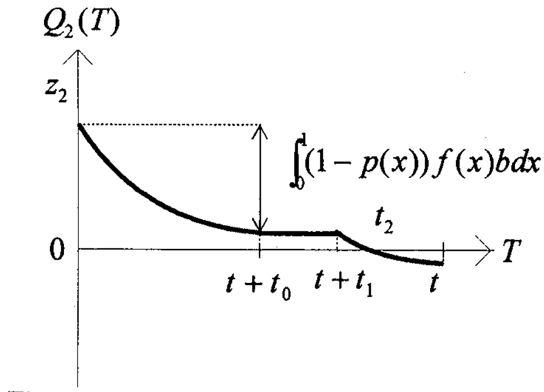

Figure 6 Player II of Situation 3.

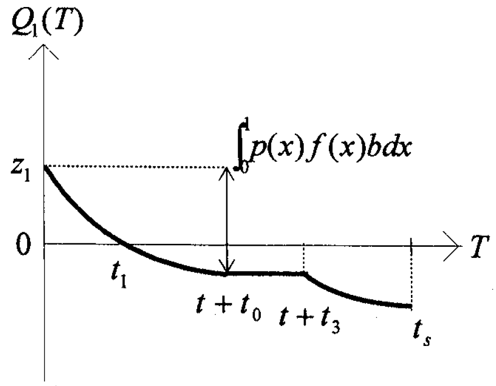

Figure 7 Player I of Situation 4.

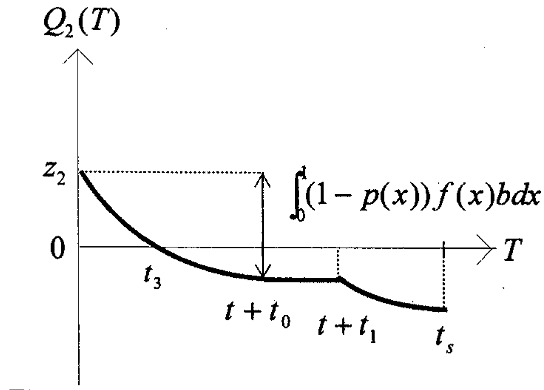

Figure 8 Player II of Situation 4.