数理解析研究所講究録
1079巻 1999年 49-57

Minimax配置とMaxmini配置について

大阪府大総科 寺岡義伸(Yoshinobu Teraoka)
大阪府大総科 北條仁志(Hitoshi Hohjo)

1. はじめに

近年、コンピュータ科学の発展と社会の複雑化に伴い、施設の最適配置を考える問題が注目され、その方面の専門誌まで発行されてくるようになった。この種の問題は、人類が住居を持つようになって以来ずっと考察の対象となってきたはずであるが、初めて科学的に扱われたのは1929年のこと(Hotelling [1])であろう。しかし当時は必要度も小さく計算の方法も今1つということもあり、本格的に研究対象となったのはここ20年のことである。

最適配置問題の中で特色ある考え方の1つにminimax配置というものがある[2,3]。これはある都市内に消防基地を設置する場合、どの地点に配置するのが最も効率的であろうかという考え方から発生した基準であるが、もっと一般に1つの組織内においてある事件の可能性を想定した場合、どこに管理の中心を設置しておくのが最良であるかという、

ある組織の保守管理拠点の問題となってくる。次にmini とmax を交換しmaxmini配置を考えてみると，ある都市内でのゴミ処理場や下水処理場の設置場所を選定といったような，どうしても組織内に設置しなければならないが，組織内の個々の構成員にとってみれば自分の近くには配置してほしくない迷惑公共施設をどこに設置すべきかという問題となる。ところで，このmax mini配置に関しては，今のところ見るべき成果はほとんど発表されていない。本報告では，これら2つの型の配置問題について，いくつかの結果や注意をまとめてみる。

2．問題の定式化

$\mathbb{R}^2$ または $\mathbb{R}^3$ 内のある範囲 D 内に m 個の点 a_i $(i=1,\cdots,m)$ が与えられている。この m 個の点を需要点と呼ぶことにする。D 内にある施設を1つ配置したい。今この施設の配置位置を x とし，点 x と点 a_i の間のノルムを $\|x-a_i\|$ とした時

$$\max_i \|x-a_i\| \longrightarrow \min_{x\in D} \qquad (1)$$

を満足する x を求める問題がmini max 配置問題である。

他方，mini とmaxを交換して

$$\min_i \|x-a_i\| \longrightarrow \max_{x\in D} \qquad (2)$$

を考える問題がmaxmini配置問題である。

さて，このような問題にあってはノルムとしてどのようなノルムを考えるべきか色々考えられるが，配置という現実面から検討すると，ユークリッドノルム（l_2ノルム）と直角ノルム（l_1ノルム）に限定するのが適当と考えられる。したがって，$D \subset \mathbb{R}^2$ の場合 $a_i=(\alpha_i, \beta_i)$，$x=(x, y)$ とすると

$$l_2 \text{では} \quad (x-\alpha_i)^2+(y-\beta_i)^2 \longrightarrow \min_{(x,y)\in D} \max_i \left(\text{or} \max_{(x,y)\in D} \min_i\right)$$

$$l_1 \text{では} \quad |x-\alpha_i|+|y-\beta_i| \longrightarrow \min_{(x,y)\in D} \max_i \left(\text{or} \max_{(x,y)\in D} \min_i\right)$$

を扱うことになり，$D \subset \mathbb{R}^3$ の場合 $a_i=(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i)$，$x=(x, y, z)$ とすると

$$l_2 \text{では} \quad (x-\alpha_i)^2+(y-\beta_i)^2+(z-\beta_i)^2 \longrightarrow \min_{(x,y,z)\in D} \max_i \left(\text{or} \max_{(x,y,z)\in D} \min_i\right)$$

$$l_1 \text{では} \quad |x-\alpha_i|+|y-\beta_i|+|z-\beta_i| \longrightarrow \min_{(x,y,z)\in D} \max_i \left(\text{or} \max_{(x,y,z)\in D} \min_i\right)$$

を扱うことになる。ノルムという意味では，l_1とl_2に差はないとも言えるが，具体的な幾何学的図形は随分異なってくるので，ここでは個々を具体的に扱う。

3．ユークリッド距離による minimax配置

まず，$D \subset \mathbb{R}^2$ の時の従来の結果を $D \subset \mathbb{R}^3$ の場合に接続できる形でまとめる。

定義1．D内のすべての需要点を周および内部に含むような円の中で半径最小な円を最小被覆円とよぶ。

性質1．最小被覆円をその中心を通る直線で２つの半円に分割すると，各半円は分割によって生じた境界も含めると，その半円周上に少なくとも１つD内の需要点を含む。

結果1．最小被覆円の中心をOとする。OがDに含まれるならば，Oはminimax配置問題の解である。すなわち，Oは(1)式を満たすxを与える。

最小被覆円の中心が定められた範囲Dにあることを仮定することは自然なことである。しかし，D内に配置禁止地域を考えるのも興味深い。

次に上記の結果を$D \subset \mathbb{R}^3$の場合に拡張する。$\mathbb{R}^3$への拡張は，$\mathbb{R}^2$に比べて利用度は少ないかも知れないが，海中基地や宇宙ステーション　あるいは大きなビル内の配置を想定したものであり，案外に応用範囲の広い内容と考えられる。

定義2．D内のすべての需要点をその球面および内部に含む球の中で半径最小な球を最小被覆球という。

性質2．最小被覆球をその中心を通る任意の平面で２つの半球に分割すると，各半球は分割によって生じた境界も含めると，その半球面上には少なくとも１点D内の需要点を含む。

（証明）最小被覆球を$x^2+y^2+z^2=r^2$とし，平面$x=0$でこの球を分割するとしても一般性は失なわれない。もし一方の半球面上に境界の円周も含めて１つも需要点が存在しないと

仮定するとこの球が最小被覆球であることに矛盾することを示す。今，$x \leqq 0$ の部分の半球の球面上に需要点が1つも存在しないとする。そうすると，十分小さな $\varepsilon > 0$ に対して球 $(x-\varepsilon)^2+y^2+z^2=r^2-\varepsilon^2$ は D の需要点をすべて含む。なぜなら $x \leqq \varepsilon$ の部分では需要点を球面または内部に含む程度に $\varepsilon > 0$ を選ぐであり，$x \geqq \varepsilon$ に対しては x を固定すると中心が $(\varepsilon, 0, 0)$ で半径が $\sqrt{r^2-\varepsilon^2}$ の球と x 軸と垂直な平面が交わってできる円は $(0,0,0)$ が中心で半径 r の球と同じ x 軸と垂直な平面が交わってできる円を含んでしまうからである。

$$\left(\begin{aligned} &\because\ (\text{前者の半径})^2 = r^2-\varepsilon^2-(x-\varepsilon)^2 = r^2-x^2+2\varepsilon(x-\varepsilon) \\ &\qquad \geqq r^2-x^2 = (\text{後者の半径})^2,\quad x \geqq \varepsilon \end{aligned}\right)$$

すなわち，球 $x^2+y^2+z^2=r^2$ は最小被覆球ではない。▥

結果3. 最小被覆球の中心を O とする。O が D に含まれるならば O は minimax 配置問題の解となる。すなわち，O は(1)式を満足する $\boldsymbol{x}$ を与える。

$\mathbb{R}^3$ への拡張は，海中基地や宇宙ステーションあるいは大きなビル内の配置を意図したものである。

4. 直角距離による minimax 配置

前節と同様にまず $D \subset \mathbb{R}^2$ の時を扱う。よく知られたこ

とであるが，$\mathbb{R}^2$上の2点から等距離にある点の集合は，この2点を結ぶ垂直2等分線になるとは限らない。ここで，需要点 a_i の座標を (α_i, β_i) とするとき

$$p_1 = \max_i(\alpha_i+\beta_i), \qquad p_2 = \min_i(\alpha_i+\beta_i)$$
$$q_1 = \max_i(\alpha_i-\beta_i), \qquad q_2 = \min_i(\alpha_i-\beta_i)$$

とおくと，4本の直線 $x+y=p_1$, $x-y=q_1$, $x+y=p_2$, $x-y=q_2$ によって囲まれる長方形は直角距離の意味で D 内のすべての需要点を含む最小被覆円ということになる。ここではこれを最小被覆長方形と呼ぶことにする。

性質3。$D\subset\mathbb{R}^2$内の需要点をすべて含む最小被覆長方形は

$$(\frac{p_1+q_1}{2},\frac{p_1-q_1}{2}),(\frac{p_1+q_2}{2},\frac{p_1-q_2}{2}),(\frac{p_2+q_2}{2},\frac{p_2-q_2}{2}),(\frac{p_2+q_1}{2},\frac{p_2-q_1}{2})$$

の4点を頂点とする長方形である。

結果3。直角距離による minimax 配置問題の解（(1)式を満足する x）は下記のように与えられる；

$p_1-p_2>q_1-q_2$ の時，$\left(\frac{p_1+q_1}{2},\frac{p_2-q_1}{2}\right)$ と $\left(\frac{p_2+q_2}{2},\frac{p_1-q_2}{2}\right)$ を結ぶ線分上のすべての点。　$p_1-p_2=q_1-q_2$ の時，点$\left(\frac{p_1+p_2+q_1+q_2}{4},\frac{p_1+p_2-q_1-q_2}{4}\right)$のみ。　$p_1-p_2<q_1-q_2$ の時 $\left(\frac{p_1+q_1}{2},\frac{p_1-q_2}{2}\right)$ と $\left(\frac{p_2+q_2}{2},\frac{p_2-q_1}{2}\right)$ を結ぶ線分上のすべての点。

次いで，$D\subset\mathbb{R}^3$の場合を考える。この場合も$\mathbb{R}^3$上の2点から等距離にある点の集合は，2点を結ぶ線分の中点を通り

この線分と垂直な平面になるとは限らない。

需要点の座標を $a_i=(\alpha_i,\beta_i,\gamma_i)$ とする。そして

$$p_1=\max_i(\alpha_i+\beta_i+\gamma_i),\quad p_2=\min_i(\alpha_i+\beta_i+\gamma_i)$$
$$q_1=\max_i(\alpha_i-\beta_i+\gamma_i),\quad q_2=\min_i(\alpha_i-\beta_i-\gamma_i)$$
$$r_1=\max_i(\alpha_i+\beta_i-\gamma_i),\quad r_2=\min_i(\alpha_i+\beta_i-\gamma_i)$$

とおくと，6枚の平面 $x+y+z=p_1$, $x+y+z=p_2$, $x-y+z=q_1$, $x-y+z=q_2$, $x+y-z=r_1$, $x+y-z=r_2$ によって囲まれる平行六面体は直角距離の意味ですべての需要点を含む最小被覆円ということになる。この平行六面体を最小被覆平行六面体と呼ぶことにする。

性質4. $D\subset\mathbb{R}^3$ 内のすべての需要点を含む最小被覆平行六面体は8つの点 $\left(\frac{q_1+r_1}{2},\frac{p_1-q_1}{2},\frac{p_1-r_1}{2}\right)$, $\left(\frac{q_2+r_1}{2},\frac{p_1-q_2}{2},\frac{p_2-r_1}{2}\right)$, $\left(\frac{p_2+r_2}{2},\frac{p_1-q_2}{2},\frac{p_1-r_2}{2}\right)$, $\left(\frac{q_1+r_2}{2},\frac{p_1-q_1}{2},\frac{p_1-r_2}{2}\right)$, $\left(\frac{q_2+r_1}{2},\frac{p_2-q_1}{2},\frac{p_2-r_1}{2}\right)$, $\left(\frac{q_2+r_1}{2},\frac{p_2-q_2}{2},\frac{p_2-r_1}{2}\right)$, $\left(\frac{q_2+r_2}{2},\frac{p_2-q_2}{2},\frac{p_2-r_2}{2}\right)$, $\left(\frac{q_2+r_2}{2},\frac{p_2-q_1}{2},\frac{p_2-r_2}{2}\right)$ を頂点とする平行六面体である。

結果4. 直角距離による minimax 問題は下記のような形で与えられる解をもつ。

- $p_1-p_2>\max(q_1-q_2,\ r_1-r_2)$ の時，

  4点 $\left(\frac{q_1+r_1}{2},\frac{p_1-q_1}{2},\frac{p_2-r_2}{2}\right)$, $\left(\frac{q_1+r_2}{2},\frac{p_2-q_2}{2},\frac{p_1-r_1}{2}\right)$, $\left(\frac{q_2+r_1}{2},\frac{p_1-q_2}{2},\frac{p_2-r_2}{2}\right)$, $\left(\frac{q_2+r_2}{2},\frac{p_2-q_2}{2},\frac{p_1-r_1}{2}\right)$ を頂点とする平行四辺形上のすべての点。

・ $q_1-q_2>\max(r_1-r_2,\ p_1-p_2)$ の時，

4点 $(\frac{q_1+r_1}{2}, \frac{p_1-q_2}{2}, \frac{p_2-r_1}{2})$, $(\frac{q_1+r_2}{2}, \frac{p_2-q_1}{2}, \frac{p_1-r_1}{2})$, $(\frac{q_2+r_2}{2}, \frac{p_1-q_2}{2}, \frac{p_2-r_2}{2})$, $(\frac{q_2+r_2}{2}, \frac{p_2-q_1}{2}, \frac{p_1-r_2}{2})$ を頂点とする平行四辺形上のすべての点。

・ $r_1-r_2>\max(p_1-p_2,\ q_1-q_2)$ の時，

4点 $(\frac{q_1+r_1}{2}, \frac{p_1-q_1}{2}, \frac{p_2-r_2}{2})$, $(\frac{q_1+r_2}{2}, \frac{p_2-q_1}{2}, \frac{p_1-r_2}{2})$, $(\frac{q_1+r_1}{2}, \frac{p_2-q_1}{2}, \frac{p_2-r_2}{2})$, $(\frac{q_2+r_2}{2}, \frac{p_2-q_2}{2}, \frac{p_2-r_1}{2})$ を頂点とする平行四辺形上のすべての点。

・ $p_1-p_2=q_1-q_2=r_1-r_2$ の時，

$(\frac{q_1+q_2+r_1+r_2}{2}, \frac{p_1+p_2-q_1-q_2}{2}, \frac{p_1+p_2-r_1-r_2}{2})$ のみ。 ▨

5. max mini 配置問題

この場合，問題の性質から max mini 配置問題の解は以下の性質から導れるように考えられるが，具体的な解を示すのは困難である。

性質5. D内の需要点が3点以上ある場合，ユークリッド距離であっても，直角距離であっても，需要点を内部には含まず，しかしその周上には少なくとも3点含む円は必ず存在する。

ユークリッド距離に関しては，次の結果が成立する。ところで，問題の性質上，Dは3点以上の需要点を持つことを

前提とする。

結果5. Dの需要点を内部には含まず、しかし周上には少なくとも3点含む円の中で半径最大な円の中心、およびDの境界上の点の中に、max mini配置問題の解は存在する。

参考文献

[1] H. Hotelling,"Stability in competition", The Economic Journal Vol.30(1929),pp.41-57.

[2] J. Elzinga and D.W. Hearn,"Geometric solution for some minimax Location problems ",Trans.Sci. Vol.6(1972),pp.379-394.

[3] M.I. Shamos and D. Hoey,"Closest-point problems",16th IEEE Ann.Symp.Found.Comput.Sci.(1975),pp151-162.

[4] S. Osumi,"Modeling amd Analysis of Competitive Facility Location Problem", 大阪府立大学博士学位論文 (1997).