数理解析研究所講究録
1083 巻 1999 年 113-124

$x_{n+1}-x_{n}+p(\sum_{j=0}^{N-1}x_{n-k+jd})=0$ の漸近安定性について

大阪府立寝屋川高等学校(大阪府立大学派遣研修員)
荻田 竜三 (Ryuzou Ogita)

1 はじめに

2個以上の遅れを持つ線形差分方程式

$$x_{n+1}-x_{n}+p(\sum_{j=0}^{N-1}x_{n-k+jd})=0 \tag{1}$$

の零解が、漸近安定になる必要十分条件を報告する．ただし、N, d, k は整数で、$N>0$, $d>0$, $k>(N-1)d$ とする．

11 月の研究集会では、$N=2$, $d=1$ の場合を述べた．今回最終的な以下の結果が得られたのでそれを報告する．

すなわち、差分方程式 (1) の零解が漸近安定になる必要十分条件は、

$$0<p<\frac{2\sin\left(\frac{\pi}{2M}\right)\sin\left(\frac{d\pi}{2M}\right)}{\sin\left(\frac{Nd\pi}{2M}\right)} \tag{2}$$

である．ただし、$M=2k+1+d-dN$ とおいた．

遅れが一つの場合、次の結果が知られている．差分方程式

$$x_{n+1}-x_{n}+qx_{n-k}=0$$

の零解が漸近安定になる必要十分条件は、

$$0<q<2\cos\frac{k\pi}{2k+1}$$

である．(Levin & May[5]、Kuruklis [4])

非線形の差分方程式を扱うためにも、平衡点での局所理論として線形差分方程式が重要である．2個以上の遅れを持つ場合については知られていない．

一方、線形常微分方程式では、複数の遅れをもつ場合について、漸近安定になる条件が知られている．すなわち、

$$\frac{dx(t)}{dt}+a\sum_{j=1}^{N}x(t-\tau_{j})=0, \quad (\tau_{j}=\tau+(j-1)d, \tau\geqq 0,\ d>0,\ \tau_{N}>0)$$

の零解が漸近安定になる必要十分条件は、

$$a > 0, \quad \frac{a(\tau_1+\tau_N)}{2} \frac{\sin\left(\dfrac{Nd}{\tau_1+\tau_N}\dfrac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{d}{\tau_1+\tau_N}\dfrac{\pi}{2}\right)} < \frac{\pi}{2}$$

である. (Hara, Miyazaki, Morii [1])

今回、差分方程式で対応する結果を得たことになる.

線形差分方程式の零解が漸近安定となる必要十分条件は、その特性方程式の根がすべて単位円の内部にあることである. 代数方程式の根がすべて単位円の内部にあるための必要十分条件として、Schur-Cohn の判定条件がある. その条件は、実際的には極めて複雑な不等式になり、それから上のような簡単な不等式を導くことは困難である. また、Rouché の定理の適用も、特性方程式の形から困難である.

本稿では、単位円周上に根が存在するとき、p の値とその根を決め、根 z を p の代数関数とみて、その動径方向の微分を計算した. そして、単位円周上に初めて根を持つような最小の正数 p を決定した.

2 準備

差分方程式 (1) の零解が漸近安定となる条件は、特性方程式

$$F(z) \equiv z^{k+1} - z^k + p(\sum_{j=0}^{N-1} z^{jd}) = 0 \tag{3}$$

の根が、すべて単位円の内部 $|z| < 1$ にあることである.

方程式 (3) は次のように表せる.

$$z^{k+1} - z^k + p\frac{z^{Nd}-1}{z^d-1} = 0 \tag{4}$$

補題 1. 単位円周上に方程式 (*3*) の根が存在したとする. そのとき、その根 z と実数 p は次のように表される. ただし $z=1$ は除く. $M = 2k+1+d-Nd$ とおく.

$$z = \exp\frac{(2m+1)\pi i}{M} = e^{\omega_m i} \quad , \quad p_m = 2(-1)^m \frac{\sin(\omega_m/2)\sin(d\omega_m/2)}{\sin(Nd\omega_m/2)}$$

ここで $\omega_m = \dfrac{(2m+1)\pi}{M}$ (m は整数、$0 < 2m+1 < 2M$) とおいた.

逆に上式で p が与えられたとき、$z = e^{\omega_m i}$ が根となる.

証明. $|z|=1, z\neq 1$ である根 z に対して、p は実数であるから、(4) より

$$
\begin{aligned}
-p &= \frac{z^k(z-1)(z^d-1)}{z^{Nd}-1} \\
&= \frac{\bar{z}^k(\bar{z}-1)(\bar{z}^d-1)}{\bar{z}^{Nd}-1} \\
&= z^{Nd-1-d-k}\frac{(1-z)(1-z^d)}{1-z^{Nd}}
\end{aligned}
$$

となり、$z^{2k+1+d-Nd}=z^M=-1$ が導かれる．したがって、$z=\exp\dfrac{(2m+1)\pi i}{M}=e^{\omega_m i}$ と表せる．ただし、$0<2m+1<2M$.

$z=e^{\omega_m i}$ のとき、p_m は次の計算で求められる．

$$
\begin{aligned}
p_m &= -\frac{e^{k\omega_m i}(e^{\omega_m i}-1)(e^{d\omega_m i}-1)}{e^{Nd\omega_m i}-1} \\
&= -e^{(k-Nd/2+1/2+d/2)\omega_m i}\frac{(e^{\omega_m i/2}-e^{-\omega_m i/2})(e^{d\omega_m i/2}-e^{-d\omega_m i/2})}{e^{Nd\omega_m i/2}-e^{-Nd\omega_m i/2}} \\
&= -e^{\frac{2m+1}{2}\pi i}\frac{2i\sin(\omega_m/2)2i\sin(d\omega_m/2)}{2i\sin(Nd\omega_m/2)} \\
&= 2(-1)^m\frac{\sin(\omega_m/2)\sin(d\omega_m/2)}{\sin(Nd\omega_m/2)}
\end{aligned}
$$

逆に p が与えられたとき、$z=e^{\omega_m i}$ が (3) をみたすことが分かる． □

注意 k,N,d,m の選び方によっては、p が存在しないことがある．例えば、$k=19, N=4, d=3, m=7$ とすれば、$z=i$ となり p は存在しない．

さて、特性方程式 $F(z)=0$ を p について解き、p を z の正則関数 $p(z)$ とみる．

$$
p(z)=-\frac{z^k(z-1)}{z^{(N-1)d}+\cdots+1}=-\frac{z^k(z-1)(z^d-1)}{z^{Nd}-1}=-\frac{z^k f(z)}{z^{Nd}-1}
$$

ここで $f(z)=(z-1)(z^d-1)$ とおいた．

z で微分して、

$$
\frac{dp}{dz}=-\frac{z^{k-1}g(z)}{(z^{Nd}-1)^2}
$$

となる．ここで $g(z)=(kf(z)+zf'(z))(z^{Nd}-1)-Ndz^{Nd}f(z)$ とおいた．

補題 2. 単位円 $|z|=1$ 上、p が存在するような z で、$\dfrac{dp}{dz}\neq 0$ である．

証明. (I) $z^{Nd} \neq 1$ のとき、$g(z)=0$ とする.
$g(z)$ を $f(z)(z^{Nd}-1)$ で割って、

$$k+\frac{z}{z-1}+\frac{dz^d}{z^d-1}-\frac{Ndz^{Nd}}{z^{Nd}-1}=0$$

となる. 両辺の共役をとると、

$$k-\frac{1}{z-1}-\frac{d}{z^d-1}+\frac{Nd}{z^{Nd}-1}=0$$

辺々を加えて、

$$2k+1+d-Nd=0$$

これは $k>(N-1)d$ に矛盾する.
(II) $z^{Nd}=1$ かつ $z^d \neq 1$ のとき、p は有限でない.
(III) $z^d=1$ のとき、$-\dfrac{d}{dz}\left\{\dfrac{z^k(z-1)}{z^{(N-1)d}+\cdots+1}\right\}$ を計算すると、

$$\frac{dp}{dz}=-\frac{z^{k-1}}{N}\left\{(k+1)z-k-(z-1)\frac{d(N-1)}{2}\right\}$$

となる. $\dfrac{dp}{dz}=0$ ならば、z は有理数となり、$z=1$ では不成立. $z=-1$ では、$2k+1-d(N-1)=0$ となるから、$k>(N-1)d$ に矛盾する.
以上より、補題が証明された. □

補題 2 より、p が存在するような各 $z=e^{\omega_m i}$ の近傍で 1 対 1 の写像になり、$p(z)$ の逆関数が存在する. そして、

$$\frac{dz}{dp}=-\frac{(z^{Nd}-1)^2}{z^{k-1}g(z)}$$

となる. さらに $z=re^{i\vartheta}$ と表すと

$$\frac{dz}{dp}=\frac{z}{r}\left(\frac{dr}{dp}+ir\frac{d\vartheta}{dp}\right)$$

となる.
ここで p が実数の範囲で動くとき、$\dfrac{dr}{dp}$ は $\dfrac{r}{z}\left(-\dfrac{(z^{Nd}-1)^2}{z^{k-1}g(z)}\right)=rw$ の実部 $r\Re w$ である. ここで $w=-\dfrac{(z^{Nd}-1)^2}{z^kg(z)}$ とおいた.
この実部を計算する.

補題 3. p が存在するような点 $z=e^{\omega_m i}$ において、次の等式が成り立つ.

$$\Re w=\frac{2(\cos Nd\omega_m-1)^2Mp}{|g(z)|^2} \tag{5}$$

証明. まず、準備として、$|z|=1$ により

$$f(\bar{z})=\frac{f(z)}{z^{d+1}},\quad f'(\bar{z})=\frac{h(z)}{z^d}\quad (h(z)=d+1-dz-z^d\text{とおく})$$

に注意する. さらに、$z^M=-1$ を用いて次の変形が出来る.

$$\begin{aligned}\bar{z}^k g(\bar{z}) &= \frac{(kf(z)+h(z))(1-z^{Nd})-dNf(z)}{z^{k+Nd+d+1}}\\ &= -\frac{(kf(z)+h(z))(1-z^{Nd})-dNf(z)}{z^{2Nd-k}}\end{aligned}$$

さて、$W=-(w+\bar{w})|g(z)|^2=-2|g(z)|^2\Re w$ とおく.

$$W=\frac{(z^{Nd}-1)^3z^k}{z^{2Nd}}(2kf(z)+h(z)+zf'(z)-dNf(z))$$

ここで、$2kf(z)+h(z)+zf'(z)=(2k+d+1)f(z)$ となるから、

$$W=\frac{(z^{Nd}-1)^3z^k}{z^{2Nd}}(2k+d+1-Nd)f(z)$$

となる. さらに、

$$W=-\frac{(z^{Nd}-1)^4}{z^{2Nd}}\cdot\frac{-z^kf(z)}{z^{Nd}-1}(2k+1+d-Nd)=-\frac{(z^{Nd}-1)^4}{z^{2Nd}}Mp$$

であり、$\dfrac{(z^{Nd}-1)^4}{z^{2Nd}}=(2\cos Nd\omega_m-2)^2$ であるから、与式が証明された. □

以上をまとめると、

命題 1. 特性方程式 $F(z)=0$ の根 z が単位円周上にあるとき、次の命題が成り立つ. $2k+1+d-Nd=M$ とおく.

1. z は -1 の M 乗根であり、$\omega_m=\dfrac{(2m+1)\pi}{M}$ と表すと、

$$z=e^{\omega_m i},\quad p_m=2(-1)^m\frac{\sin(\omega_m/2)\sin(d\omega_m/2)}{\sin(Nd\omega_m/2)}$$

2. $z=e^{\omega_m i}$ で根の絶対値 r を p で微分すると、

$$\frac{dr}{dp}=\frac{2(\cos Nd\omega_m-1)^2rMp}{|g(z)|^2}$$

となる.

以上を基礎にして、特性方程式 (3) $z^{k+1}-z^k+p(\sum_{j=0}^{N-1} z^{jd})=0$ の根が、すべて単位円の内部 $|z|<1$ にある条件を求める.

明らかに、$p<0$ ならば 1 以上の正の根が存在する. また、$p=0$ ならば、方程式は原点に k 重根と 1 に単根を持つ. $p>0$ の範囲で p が増加するにつれて、根は原点と 1 から移動して単位円の中に入り、さらに p が増加すると、$\dfrac{dr}{dp}>0$ だから単位円の外へ出る.

根の動きを大雑把に述べる. $p\to\pm\infty$ では $z^{Nd}=1,\ z^d\neq 1$ をみたす z に根が近づく. 今すべての p_m が定義されていると仮定する. $p=-\infty$ で s 個、$p=+\infty$ で $(N-1)d-s$ 個の根が単位円の内部にあるとすると、$p=0$ までに $k-s$ 個の根が単位円を通過して内部に入り、0 より少し大きい値ですべての根が単位円の内部に入る。さらに p が増加して $p=+\infty$ までに $k+1-((N-1)d-s)$ 個の根が単位円を通過して外部に出る. 合わせて $2k+1-(N-1)d$ 個の根が単位円を通過する. これは、$z^M=-1$ をみたす z の個数 M と一致する.

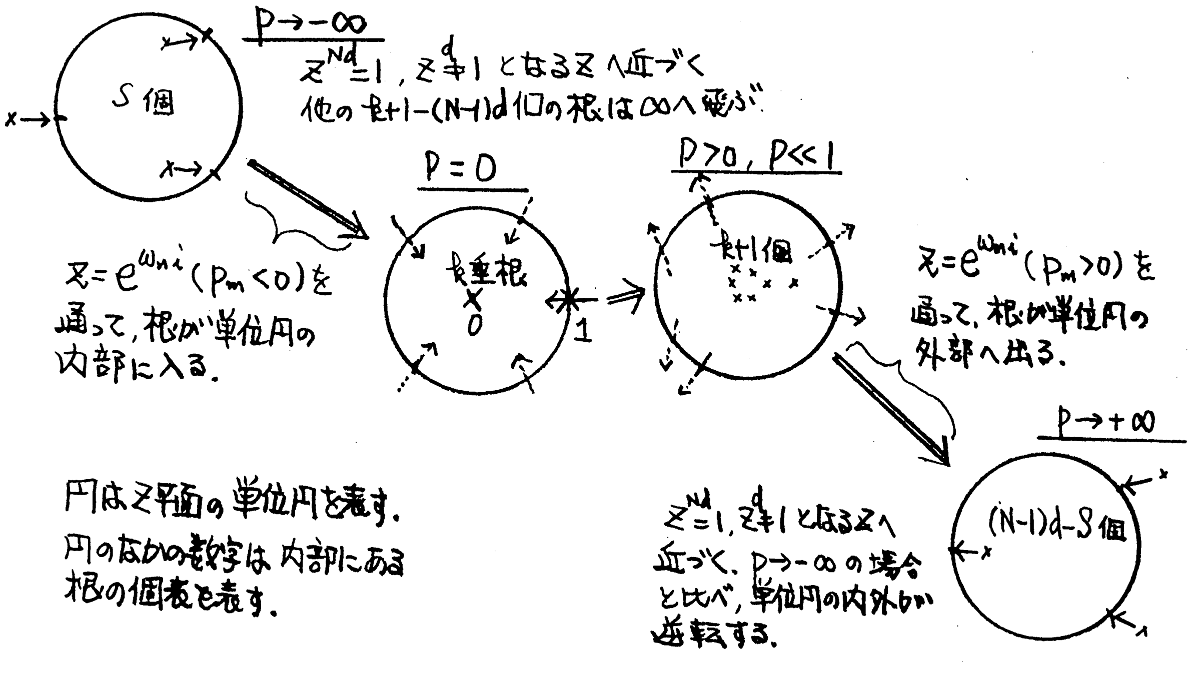

図-1　p の値の変化による特性方程式 (3) の根の動き

すべての根が単位円の内部に存在するのは、$p=0$ から最初に単位円周上にくる p の正の値までである. その値が漸近安定となる限界の値である.

つまり $p>0$ の範囲で、m が変化するとき $p_m=2(-1)^m\dfrac{\sin\omega_m/2\sin d\omega_m/2}{\sin Nd\omega_m/2}$ の最小値を求めればよい.

以下、共役複素数を考慮に入れて、$0<\omega_m\leqq\pi$ の範囲で考える.

3 漸近安定性について

次の定理を証明する.

定理 1. N 個の遅れをもつ差分方程式

$$x_{n+1} - x_n + p(\sum_{j=0}^{N-1} x_{n-k+jd}) = 0 \tag{1}$$

の零解が漸近安定となる必要十分条件は、

$$0 < p < \frac{2\sin\left(\dfrac{\pi}{2(2k+1+d-dN)}\right)\sin\left(\dfrac{d\pi}{2(2k+1+d-dN)}\right)}{\sin\left(\dfrac{Nd\pi}{2(2k+1+d-dN)}\right)} \tag{2}$$

である.

前節までの結果により、p_0 が正の最小値であることを示せば、定理の証明が終わる.

以下 $N = 2$ と $N \geqq 3$ の二つの場合に分けて証明する.

3.1 $N = 2$ の証明

$N = 2$ の場合の 差分方程式 (1) は、次の式である.

$$x_{n+1} - x_n + p(x_{n-k+d} + x_{n-k}) = 0 \tag{6}$$

この零解が漸近安定となるための必要十分条件は、次の通りであることを示す.

$$0 < p < \frac{\sin(\omega_0/2)}{\cos(d\omega_0/2)} = \frac{\sin\dfrac{\pi}{2M}}{\cos\dfrac{\pi}{2M}} \qquad (M = 2k+1-d)$$

証明. $\dfrac{1}{p_m}$ が $m = 0$ のときに最大になることを示す.

$z^d = -z^{2k+1}$ より、

$$\frac{1}{p_m} = \frac{z^{2k+1}-1}{z^k(z-1)} = \frac{z^{k+\frac{1}{2}} - z^{-k-\frac{1}{2}}}{z^{\frac{1}{2}} - z^{-\frac{1}{2}}} = \frac{\sin(2k+1)\omega_m/2}{\sin\omega_m/2}$$

となる. よって次の不等式を証明すればよい.

$$\frac{\sin(2k+1)\omega_0/2}{\sin\omega_0/2} \geqq \frac{\sin(2k+1)\omega_m/2}{\sin\omega_m/2} \tag{7}$$

以下、$\theta = \dfrac{\omega_0}{2} = \dfrac{\pi}{2M}$ とおく．$\dfrac{\omega_m}{2} = (2m+1)\theta$ である．

次に範囲を考える．$\theta \leqq (2m+1)\theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ であり、$0 < d \leqq k-1$ であるから、$\dfrac{\pi}{2} \leqq (2k+1)\theta \leqq \pi - \theta$ となる．$K'\theta = \pi - (2k+1)\theta$ とおきかえると、

$$\sin(2k+1)\theta = \sin K'\theta, \quad \sin(2k+1)(2m+1)\theta = \sin(2m+1)K'\theta$$

となり、$\theta \leqq K'\theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ である．また、$N' = 2m+1$ とおく．不等式 (7) は次の不等式になる．

$$\sin K'\theta \sin N'\theta \geqq \sin\theta \sin K'N'\theta$$

これは次の補題 4 により証明される． □

補題 4. 実数 x, y が $\theta \leqq x\theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$, $\theta \leqq y\theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲を動くとき、次の不等式が成り立つ．

$$\sin x\theta \sin y\theta \geqq \sin\theta \sin xy\theta \tag{8}$$

証明. 領域 $D = \{(x,y) | \theta \leqq x\theta \leqq \dfrac{\pi}{2}, \ \theta \leqq y\theta \leqq \dfrac{\pi}{2}\}$ とする．

$$G(x,y) = \sin x\theta \sin y\theta - \sin\theta \sin xy\theta$$

とおく．$G(x,y)$ は D で微分可能であり、最小値は境界 ∂D での値か、極値でとる．

境界 ∂D では、明らかに $G(x,y) \geqq 0$ である．

偏導関数を求めると、

$$\begin{aligned}\frac{\partial G}{\partial x} &= \theta\cos x\theta \sin y\theta - y\theta \cos xy\theta \sin\theta \\ \frac{\partial G}{\partial y} &= \theta\sin x\theta \cos y\theta - y\theta \cos xy\theta \sin\theta\end{aligned}$$

となる．極値をとる x, y は、$\dfrac{\partial G}{\partial x} = \dfrac{\partial G}{\partial y} = 0$ をみたすから、そのような x, y は $\dfrac{x}{\tan x\theta} = \dfrac{y}{\tan y\theta}$ をみたす．$0 < t\theta \leqq \pi/2$ では、$\phi(t) = \dfrac{t}{\tan t\theta}$ は減少関数だから、結局 $x = y$ となる．つまり極値を取る点は、直線 $x = y$ 上にある．よって、この直線上の $G(x,x)$ の値が正であることを示せばよい．

$(x\theta)^2$ で割った次の式を証明する．

$$\frac{\sin^2 x\theta}{(x\theta)^2} \geqq \frac{\sin x^2\theta}{x^2\theta}\frac{\sin\theta}{\theta} \tag{9}$$

$x^2\theta \geqq 2\pi$ のときは、$\theta \leqq x\theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ より

$$\frac{\sin^2 x\theta}{(x\theta)^2} - \frac{\sin x^2\theta}{x^2\theta}\frac{\sin\theta}{\theta} \geqq \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 - \frac{1}{2\pi} > 0$$

が成立し、$\pi \leqq x^2\theta \leqq 2\pi$ のときは $\sin x^2\theta \leqq 0$ であるから、明らかである.

したがって、$0 < x^2\theta < \pi$ の場合のみ考えればよい. $\psi(t) = \log\dfrac{\sin t}{t}$ とおく. 下の補題5より、$\psi(t)$ は上に凸になるので、

$$\psi\left(\frac{x^2\theta+\theta}{2}\right) \geqq \frac{1}{2}\{\psi(x^2\theta)+\psi(\theta)\}$$

となる. また $\dfrac{x^2\theta+\theta}{2} \geqq x\theta$ であり、$\psi(t)$ は減少関数だから、$\psi(x\theta) \geqq \psi\left(\dfrac{x^2\theta+\theta}{2}\right)$ が成り立つ. これより $2\psi(x\theta) \geqq \psi(x^2\theta)+\psi(\theta)$ となり、これをあらわすと、

$$2\log\frac{\sin x\theta}{x\theta} \geqq \log\frac{\sin x^2\theta}{x^2\theta} + \log\frac{\sin\theta}{\theta}$$

が成立する. すなわち不等式 (9) が示された. したがって、すべての極値は正となり、また境界での値が非負なので結局、不等式 (8) が証明された. □

補題 5. $0 < t < \pi$ で $\psi(t) = \log\dfrac{\sin t}{t}$ とおく. $\psi(t)$ は減少関数で、上に凸である.

証明. $\psi'(t) = \dfrac{(t-\tan t)\cos t}{t\sin t} < 0, \quad \psi''(t) = \dfrac{\sin^2 t - t^2}{(t\sin t)^2} < 0$ より分かる. □

二つの遅れを持つ線形常微分方程式で次の結果が知られている. ([2] p87-89)

$$\frac{dx(t)}{dt} + ax(t-\tau_1) + ax(t-\tau_2) = 0, \quad (\tau_1, \tau_2 \geqq 0,\ \tau_1+\tau_2 > 0)$$

の零解が漸近安定になる必要十分条件は、次の不等式である.

$$a > 0, \quad a(\tau_1+\tau_2)\cos\left(\frac{\tau_1-\tau_2}{\tau_1+\tau_2}\frac{\pi}{2}\right) < \frac{\pi}{2}$$

$N=2$ の結果はこれに対応する、差分方程式版である.

また、この証明で、ディリクレ核 $D_k(x) = \dfrac{\sin(k+1/2)x}{\sin(1/2)x}$ の $x = \dfrac{(2m+1)\pi}{2M}$ での値のなかで、$x = \dfrac{\pi}{2M}$ のときが最大であることを示している.

3.2 $N \geqq 3$ の場合の証明

さて、$N \geqq 3$ の場合、p_0 が正の最小値であることを示す.

証明. $|p|$ を評価する.

補題 6. 任意の t に対して次の不等式が成り立つ. ただし、N は正の整数とする.

$$\left|\frac{\sin Nt}{\sin t}\right| \leqq N$$

証明. $f(t) = \dfrac{\sin Nt}{\sin t}$ とおく. $t = k\pi$ では $f(k\pi) = \lim_{t \to k\pi} f(t)$ と定義すると、$C^{\infty} class$ である. 明らかに周期は 2π で、$f(-t) = f(t)$, $|f(\pi - t)| = |f(t)|$ であるから、区間 $[0, \frac{\pi}{2}]$ で不等式を証明すればよい. 区間 $[0, \frac{\pi}{N}]$ で

$$\frac{\sin Nt}{\sin t} = N \frac{\frac{\sin Nt}{Nt}}{\frac{\sin t}{t}}$$

区間 $[0, \pi]$ で $\dfrac{\sin t}{t}$ は減少関数であるから、$\dfrac{\sin Nt}{\sin t} \leqq N$ となる.

区間 $[\frac{\pi}{N}, \pi]$ で $\left|\dfrac{\sin Nt}{\sin t}\right| \leqq \dfrac{1}{2\pi/\pi N} = \dfrac{N}{2} < N$ となるから、不等式が成り立つ. □

この補題を用いて、$m \geqq 1$ のときの $\dfrac{1}{|p_m|}$ を上からの評価する.

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{p_m}\right| &= \left|\frac{\sin(2m+1)\frac{Nd\pi}{2M}}{2\sin(2m+1)\frac{d\pi}{2M}\sin(2m+1)\frac{\pi}{2M}}\right| \\ &\leqq \frac{N}{2 \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \frac{(2m+1)\pi}{2M}} = \frac{NM}{2(2m+1)} \end{aligned} \tag{10}$$

次に $\dfrac{1}{p_0}$ を下から評価するが、二つの場合に分ける.

(I) $\dfrac{Nd}{M} \leqq 1$ の場合

$$\frac{1}{p_0} \geqq \frac{\frac{2}{\pi} \cdot \frac{Nd\pi}{2M}}{2 \cdot \frac{d\pi}{2M}\frac{\pi}{2M}} = \frac{2NM}{\pi^2}$$

これより、$m > 0$ では $\dfrac{2NM}{\pi^2} > \dfrac{NM}{2(2m+1)}$ であるから、p_0 が最小の正の数である.

(II) $\dfrac{Nd}{M} > 1$ の場合

まず $\dfrac{Nd}{M}$ の範囲を確認する．$M = 2k + 1 + d - Nd$, $k > (N-1)d$ であるから、

$$1 < \frac{Nd}{M} < \frac{Nd}{Nd - d + 1} < \frac{N}{N-1} \tag{11}$$

となる．

$m = 0$ のとき、下からの評価を $\dfrac{Nd\pi}{2M}$ の代わりに補角 $\pi - \dfrac{Nd\pi}{2M}$ を用いると、次の不等式が得られる．

$$\frac{1}{p_0} \geqq \frac{2M(2M - Nd)}{d\pi^2} \tag{12}$$

$\dfrac{|p_m|}{p_0}$ を計算する．(11) の範囲を考慮に入れて、

$$\left|\frac{p_m}{p_0}\right| > \frac{2M(2M - Nd)}{d\pi^2} \cdot \frac{2(2m+1)}{NM} > \frac{4(2m+1)}{\pi^2}\left(1 - \frac{2}{N}\right) \tag{13}$$

これより、次のことが分かる．

1. $N \geqq 12$ ならば、$m \geqq 1$ のとき $|p_m| > p_0$ となる．
2. $N \geqq 4$ ならば、$m \geqq 2$ のとき $|p_m| > p_0$ となる．
3. $N = 3$ ならば、$m \geqq 4$ のとき $|p_m| > p_0$ となる．

残る場合を評価する．

$N \geqq 4$ かつ $m = 1$ の場合．

(11) の範囲より、$\dfrac{3d\pi}{2M} < \dfrac{\pi}{2}$ が成り立つ．これより、

$$|p_1| \geqq 2 \cdot \frac{2}{\pi}\frac{3d\pi}{2M} \cdot \frac{2}{\pi}\frac{3\pi}{2M} = \frac{18d}{M^2}$$

(12) を使って比較すると、

$$\frac{|p_1|}{p_0} = \frac{36}{\pi^2}\left(2 - \frac{Nd}{M}\right) > \frac{36}{\pi^2}\left(2 - \frac{N}{N-1}\right) > \frac{24}{\pi^2} > 1$$

となり、$N \geqq 4$ で求める結果が得られる．

$N = 3$ かつ $m = 1, 2, 3$ の場合を調べる．

$u = \dfrac{d\pi}{2M}$ とおく．条件より $\dfrac{\pi}{6} < u < \dfrac{\pi}{4}$ となる．

$$\frac{p_m}{p_0} = \frac{\sin(2m+1)u \cdot \sin 3u}{\sin 3(2m+1)u \cdot \sin u}\frac{\sin(2m+1)u/d}{\sin u/d} \tag{14}$$

と表され、第2因子が $\dfrac{\sin(2m+1)u/d}{\sin u/d} > \dfrac{\frac{2}{\pi}(2m+1)u/d}{u/d} = \dfrac{2(2m+1)}{\pi}$ となる.

また、補題6より $\left|\dfrac{\sin(2m+1)u \cdot \sin 3u}{\sin 3(2m+1)u \cdot \sin u}\right| \geqq \left|\dfrac{\sin 3u}{3\sin u}\right|$ となり、$m=2,3$ では1以上になる.

$m=1$ では、$p_1 > 0$ となるのは $\dfrac{2\pi}{9} < u < \dfrac{\pi}{4}$ の範囲であり、そこで値を評価すると簡単に $\dfrac{p_1}{p_0} > 1$ が分かる.

以上ですべての場合を尽くすことができた. □

研修期間中、大阪府立大学工学部数理工学科第1グループの方々(原教授、馬助手、城崎講師や松永君たち)及び大阪電気通信大学の坂田先生に大変お世話になった. 色々とアドヴァイスを貰った. 久しぶりに数学を話す楽しさを味わえた. 1年間の居候に相手をしていただいて感謝している.

参考文献

[1] T. Hara , R. Miyazaki & T. Morii, *Asymptotic stability condition for linear differential-difference equation with n delay*, Dynam. Systems. Appl. 6 (1997),493-506

[2] Y. Kaung, " *Delay Differential Equations with Application in Population Dynamics*". Academic Press, San Diego, 1993

[3] V. L. Kocic & G. Ladas, "*Global Behavior of Nonlinear Difference Equation of Higher Order with Applications*", Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1993

[4] S. A. Kuruklis, *The aymptotic stability of* $x_{n+1} - ax_n + bx_{n-k} = 0$, J. Math. Anal. Appl. 188 (1994) 719-731

[5] S. A. Leven & R. M. May, *A note on difference-delay equation*, Theor.Pop.Biol.9(1976),178-187