数理解析研究所講究録
1087巻 1999年 132-138

射影空間上の Critically finite map について

上田哲生 (Tetsuo Ueda)
京都大学総合人間学部

1 Fatou 写像

複素 n 次元射影空間を $\boldsymbol{P}^n$ で表わす．正則写像 $f:\boldsymbol{P}^n\to\boldsymbol{P}^n$ によって定まる力学系を考察する．以下では f の次数は 2 以上と仮定する．

定義　f の Fatou 集合 Ω を次のように定義する：

$$\Omega=\{\, p\in\boldsymbol{P}^n \mid f^j\ (j=1,2,\ldots)\ \text{は点}\ p\ \text{の或る近傍で正規族をなす}\,\}$$

定理 1 ([FS2], [HP], [U2])　Fatou 集合 Ω は擬凸かつ小林双曲的である．

Fatou 集合の考えを一般化して Fatou 写像を次のように定義する：

定義　複素空間 Z から $\boldsymbol{P}^n$ への正則写像 φ が（f に関する）Fatou 写像であるとは，写像列

$$f^j\circ\varphi : Z\to\boldsymbol{P}^n \quad (j=0,1,2,\ldots)$$

が正規族をなすことをいう．

開集合 $V\subset\boldsymbol{P}^n$ が Fatou 集合 Ω に含まれることは，包含写像 $V\to\boldsymbol{P}^n$ が Fatou 写像であることと同値である．Fatou 写像の概念とその特徴付けは [FS3] にも（implicitly に）ある．

Fatou 写像の性質を挙げよう．$\boldsymbol{P}^n$ 上の Riemann 計量から定まる距離を ρ で表わす．また d_Z で Z 上の Kobayashi 擬距離を表わす．

定理 2　次数 ≥ 2 の正則写像 $f:\boldsymbol{P}^n\to\boldsymbol{P}^n$ に対して，定数 $C>0$ があって次の条件を満たす：　$\varphi: Z\to\boldsymbol{P}^n$ が f に関する Fatou 写像ならば，不等式

$$\rho(\varphi(a_1),\varphi(a_2))\leq C d_Z(a_1,a_2)$$

が任意の $a_1,a_2\in Z$ について成り立つ．（定数 C は距離 ρ と写像 f にのみ依存し，Z や φ にはよらない．）

系 1　$\varphi:\ Z\ \to \boldsymbol{P}^n$ が単射 Fatou 写像ならば Z は Kobayashi 双曲的である.

系 2　Z を複素空間とし $\mathcal{F}_{Z,f}$ で Fatou 写像 $\varphi:\ Z\ \to \boldsymbol{P}^n$ の全体を表わすとき, $\mathcal{F}_{Z,f}$ は（コンパクト一様収束の位相で）コンパクトである.

Δ で単位円板 $\{\,\zeta \in \boldsymbol{C} |\ |\zeta|\ < 1\,\}$ を表わす. また $\Delta^* = \Delta - 0$ とする.

定理 3. $\varphi^*:\ \Delta^* \to \boldsymbol{P}^n$ が Fatou 写像ならば φ^* は Fatou 写像 $\varphi : \Delta \to \boldsymbol{P}^n$ に拡張される.

Z を複素空間 $g : Z\ \to \boldsymbol{P}^n$ を正則写像とする. 正則写像 $h : Z\ \to \boldsymbol{P}^n$ が f による g のリフトであるとは $f \circ h = g$ が成り立つことをいう. 正整数列 $\{\,j_\nu\,\}_\nu$ があって, 各 ν について f^{j_ν} による g の正則なリフト $g_\nu:\ Z\ \to \boldsymbol{P}^n$ の列が存在すると仮定する.

定理 4 ([U3])　(1) リフト $\{g_\nu\}$ は正規族をなす. (2) 列 $\{g_\nu\}$ の収束部分列の極限は Fatou 写像である.

さて, 次の定理は正則写像 φ が Fatou 写像ではない ための一つの条件を与える：

定理 5　Z を連結な複素空間とし $\varphi : Z \to \boldsymbol{P}^n$ を非定数正則写像で次の条件をみたすものとする：任意の点 $p \in \boldsymbol{P}^n$ に対してその適当な近傍 V をとれば $\varphi^{-1}(V)$ が空であるかまたは $\varphi^{-1}(V)$ の各連結成分が Z で相対コンパクトとなる.　このとき φ は Fatou 写像でない.

この定理から特に, Z が $\boldsymbol{P}^n$ の正次元代数的集合ならば包含写像 $Z\ \to \boldsymbol{P}^n$ は Fatou 写像でないことがわかる. これは $\boldsymbol{P}^n$ の上の相対境界を持たない分岐被覆の解析的集合の場合に拡張できる.

X, Y を純 n 次元複素空間とする. 正則写像 $\eta:\ Y\ \to X$ が有限（分岐）被覆であるとは, η が固有写像（コンパクト集合の逆像がコンパクト）であって, 各点 $x\in X$ の逆像 $\eta^{-1}(x)$ が有限個の点からなることをいう. 非定数正則写像 $f : \boldsymbol{P}^n\ \to\ \boldsymbol{P}^n$ は有限被覆であることに注意する. 正則写像 $\eta : Y\ \to X$ が（分岐）被覆であるとは, 各点 $x \in X$ に対して適当な近傍 V をとると, $\eta^{-1}(V)$ の各連結成分 V_λ について $\eta|V_\lambda\ :\ V_\lambda \to V$ が有限被覆となることをいう.

系　$\eta:\ Y\ \to \boldsymbol{P}^n$ を分岐被覆とし, Z を Y の（正次元）解析的部分集合とする. このとき $\eta|Z:\ Z\ \to \boldsymbol{P}^n$ は Fatou 写像ではない.

2 Critically finite な写像

以下では2次元の場合を考える．写像 $f:\ \boldsymbol{P}^2\ \to \boldsymbol{P}^2$ の分岐点全体の集合を C で表わす．これは純1次元の代数的集合である． 集合

$$D=\bigcup_{j=1}^{\infty} f^j(C)$$

を post-critical set とよぶ．次が成り立つとき f は critically finite であるという：

(CF) D は $\boldsymbol{P}^2$ の解析的集合（従って純1次元代数的集合）である．

一般に $f^j(D)=\bigcup_{k=j}^{\infty} f^k(C)$, $j=1,2,\ldots$ は減少列である．その極限を

$$E=\bigcap_{j=1}^{\infty} f^j(D).$$

で表わすと（仮定 **(CF)** のもとで）集合 E も純1次元代数的集合である．また $f(E)=E$. ここで $C'=C\cap E$ として，次の条件をおく：

(SCF$_1$) 集合 C' は有限個の点からなる.（すなわち C と E とは共通の既約成分を持たない.）

さらに（条件 **(CF)**, **(SCF$_1$)** のもとで）

$$D'=\bigcup_{j=1}^{\infty} f^j(C').$$

とおくと $D'\subset E\cap \mathrm{sing}(D)$ となることが証明できる．ここで $\mathrm{sing}(D)$ は D の特異点全体からなる集合を表わす． D' もまた有限個の点からなる．

減少列 $f^j(D')=\bigcup_{k=j}^{\infty} f^k(C')$, $j=1,2,\ldots$ の極限を

$$E'=\bigcap_{j=1}^{\infty} f^j(D')$$

とすれば $f(E')=E'$ で $f|E'$ は有限集合 E' の上の置換となる．ここで $C''=C\cap E'$ とおいて最後の条件をおく：

(SCF$_2$) 集合 C'' は空である．

条件 **(CF)**,**(SCF$_1$)**,**(SCF $_2$)** が成り立つとき f は strictly critically finite **(SCF)** であると定義する．

[U3] では f が SCF ならば f の Fatou 集合が空であることを示した．この結果を次のように強めることができる．

定理 6. $f: \boldsymbol{P}^2 \to \boldsymbol{P}^2$ が SCF とする．また $K \subset \boldsymbol{P}^2$ は少なくとも 2 点を含む弧状連結集合とする．このとき $\{f^j|K\}$ は一様収束する部分列をもたない．

定理 7. $f: \boldsymbol{P}^2 \to \boldsymbol{P}^2$ が SCF ならば非定数 Fatou 写像は存在しない．

定理 8. $f: \boldsymbol{P}^2 \to \boldsymbol{P}^2$ が SCF ならば周期点はすべて反発的であってこれらは $\boldsymbol{P}^2$ で稠密である．

後の方の結果は既に [J] で与えられている．定理 6, 7, 8 を示すには次の定理を用いる：

定理 9. f が SCF ならば，次の条件を満たす分岐被覆 $\eta: Y \to \boldsymbol{P}^2$ が存在する：任意の整数 $j \geq 1$ および任意の点 $\hat{p} \in Y$, $q \in \boldsymbol{P}^2$ で $\eta(\hat{p}) = f^j(q)$ なるものに対して，分岐被覆写像 $\zeta: Y \to \boldsymbol{P}^2$ を $f^j \circ \zeta = \eta$ かつ $\zeta(\hat{p}) = q$ なるように定めることができる．

写像 ζ は η の f^j によるリフトである．従ってこのような ζ たちは正規族をなすことに注意する．

定理 6 の証明の概略を述べる．定理の仮定のもとで，Fatou 写像 $\zeta_*: Y \to \boldsymbol{P}^n$ を，η の f^{j_ν} によるリフト ζ_ν の極限として定めることができる．このとき

$$Z = \{\, \hat{p} \in Y \mid \eta(\hat{p}) = \zeta_*(\hat{p}) \,\}$$

が正次元の解析的集合となるようにできる．η の Z への制限 $\eta|Z$ は Fatou 写像であるが，一方で $\zeta_*|Z$ に一致する．これは定理 5 の系に反する．

3 斉次写像と Green 関数

定理 5 を示すために，$f: \boldsymbol{P}^n \to \boldsymbol{P}^n$ に対応する斉次写像 $F: \boldsymbol{C}^{n+1} \to \boldsymbol{C}^{n+1}$ を考察する．

$\mathcal{X} = \boldsymbol{C}^{n+1} - \{0\}$ とし $\pi: \mathcal{X} \to \boldsymbol{P}^n$ を自然な射影とする．正則写像 $f: \boldsymbol{P}^n \to \boldsymbol{P}^n$ に対して斉次多項式写像 $F: \boldsymbol{C}^{n+1} \to \boldsymbol{C}^{n+1}$ で $\pi \circ (F|\mathcal{X}) = f \circ \pi$ かつ $F^{-1}(0) = \{0\}$ なるものがとれる．ここで F は $x = (x_0, \ldots, x_n)$ を変数とする斉 d 次多項式 $f_0(x), \ldots, f_n(x)$ の組で定義されている．$\deg f = d$ を f の次数とよぶ．

F に関する Green 関数 G を

$$G(x) = \lim_{j \to \infty} \frac{1}{d^j} \log \|F^j(x)\| \quad (x \in \boldsymbol{C}^{n+1})$$

で定める．これは $\boldsymbol{C}^{n+1}$ 上の多重劣調和関数である．G はまた次のように表わすことができる：

$$G(x) = \log \|x\| + \gamma(\pi(x)).$$

ここで γ は $\boldsymbol{P}^n$ 上の連続関数.

さて

$$\mathcal{H} = \{ x \in \boldsymbol{C}^{n+1} \mid h \text{ は } x \text{ の或る近傍の上で多重調和} \}$$

とおくと Fatou 集合 Ω は $\mathcal{H}$ で特徴付けることができる. すなわち $\mathcal{H} = \pi^{-1}(\Omega)$. この一般化として Fatou 写像の特徴付けを与えよう:

命題 10. 正則写像 $\varphi : Z \to \boldsymbol{P}^n$ に関して次の条件は互いに同値である:

(1) φ は f に関する Fatou 写像である;

(2) 写像列 $\{ f^j \circ \varphi \}$ はコンパクト一様収束する部分列を含む;

(3) V が Z の開部分集合で $\Phi_V : V \to \mathcal{X}$ が $\varphi|V$ の正則なリフトならば, $h \circ \Phi_V$ は V 上の多重調和関数である;

(4) 任意の $x \in Z$ に対して x の或る近傍 V と $\varphi|V$ の π によるなリフト Φ_V で $h \circ \Phi_V$ が恒等的に 0 となるものがとれる.

定理 5 の証明 Green 関数 G は $\boldsymbol{P}^n$ 上の連続関数 $\gamma(p)$ を用いて $G(x) = \log \|x\| + \gamma(\pi(x))$ と表わされるのであった. $\varphi(Z)$ の閉包 $\overline{\varphi(Z)}$ において γ が最小値をとる点 p_0 をとる. 座標のユニタリ変換で $p_0 = (1:0:\cdots:0)$ と仮定してよい.

$U_0 = \boldsymbol{P}^n - \{ x_0 = 0 \}$ とおく. また $\varepsilon > 0$ について p_0 の ε 近傍を

$$B_\varepsilon = \{p = (1:x_1:\cdots:x_n) \in U_0 | \sum_{k=1}^{n} |x_k| < \varepsilon^2\}$$

とおく. $p_0 \in \overline{\varphi(Z)}$ だから集合 $\varphi^{-1}(B_\varepsilon)$ は空ではない.

さらに仮定より ε を十分小さくとって $\varphi^{-1}(B_\varepsilon) \neq Z$ かつ $\varphi^{-1}(B_\varepsilon)$ の各連結成分が相対コンパクトとできる.

正則なセクション $s : U_0 \to \mathcal{X}$ を $s((1:x_1:\cdots:x_n)) = (1, x_1, \ldots, x_n)$ で定義する. このとき $p = (1:x_1:\cdots:x_n) \in U_0$ に対して $\|s(p)\| = (1 + \sum_{k=1}^{n} |x_k|^2)^{1/2}$ である.

$$\eta(s(p)) = \log \|s(p)\| + \eta(p) \geq \log \sqrt{1+\varepsilon^2} + \eta(p_0) \quad \text{for } p \in \overline{\varphi(Z)} \cap \partial B_\varepsilon.$$

一方 $h(s(p_0)) = \eta(p_0)$ で η が連続だから δ を $0 < \delta < \varepsilon$ かつ

$$h(s(p)) < \log \sqrt{1+\varepsilon^2} + \eta(p_0) \quad \text{for} \quad p \in B_\delta$$

となるよう定めることができる. $a \in Z$ を $\varphi(a) \in B_\delta$ なるようにとり, W を $\varphi^{-1}(B_\varepsilon)$ の連結成分で a を含むものとする. このとき

$$h(s(\varphi(z))) > \eta(p_0) + \log \sqrt{1+\varepsilon^2} \quad \text{for } z \in \partial W.$$

$$h(s(\varphi(a))) < \eta(p_0) + \log \sqrt{1+\varepsilon^2}.$$

よって $h \circ s \circ \varphi|W$ は非定数で W の内点で最小値をとる. よって多重調和ではない.

命題 10 より φ は Fatou 写像ではない.

4 射影平面上の 2 次正則写像

$\boldsymbol{P}^n$ 上の d 次正則写像の全体を $\mathcal{H}_{n,d}$ で表わす．$\mathcal{H}_{n,1}$ は $\boldsymbol{P}^n$ の自己同型写像（射影変換）の全体である．

定義 $\mathcal{H}_{n,d}$ の元 f, g が同値であるとは，L_1，$L_2 \in \mathcal{H}_{d,1}$ が存在して $L_2^{-1} \circ f \circ L_1 = g$ となることをいう．

f, g が共役ならば同値である．すなわち上の意味での同値関係による分類は共役類よりも粗い分類である．容易にわかるように，$\boldsymbol{P}^1$ 上の 2 次写像（すなわち $\mathcal{H}_{1,2}$ の元）はすべて $z \mapsto z^2$ に同値である．$\boldsymbol{P}^2$ 上の 2 次写像については次の定理が成り立つ．

定理 $\mathcal{H}_{2,2}$ の元は次のいずれかの写像に同値である：

(1) $(x:y:z) \mapsto (x^2:y^2:z^2)$

(2) $(x:y:z) \mapsto (x^2+yz:y^2:z^2)$

(3) $(x:y:z) \mapsto (x^2+2yz:y^2+2zx:z^2)$ （係数 2 は後の計算を簡単にするため）

(4) $(x:y:z) \mapsto (x^2+\lambda xy+y^2 : z^2+xy : yz)$ $(\lambda \in \boldsymbol{C} - \{\pm 1\})$

注 定理の写像について，分岐点集合 C と分岐値集合 $f(C)$ は次の通り：

(1) $C : xyz = 0$，$f(C) : xyz = 0$

(2) $C : xyz = 0$，$f(C) : (x^2 - yz)yz = 0$

(3) $C : (xy - z^2)z = 0$，$f(C) : (x^2y^2 - 4(x^3+y^3)z + 18xyz^2 - 27z^4)z = 0$

(4) $C : (x^2 - y^2)y - 2(x - \lambda y)z^2 = 0$，$f(C)$：9 個の尖点をもつ 6 次曲線

各同値類に属する写像の例を挙げる．((3.1) は CF だが SCF でない．それ以外は SCF.)

(1.1) $(x:y:z) \mapsto ((y-2x)^2 : (y-2z)^2 : y^2)$

(1.2) $(x:y:z) \mapsto ((-x+y+z)^2 : (x-y+z)^2 : (x+y-z)^2)$

(2.1) $(x:y:z) \mapsto (2z^2 - 2(x^2-2yz) : z^2 : z^2 + 4y^2 - 2(x^2-2yz)^2)$

(3.1) $(x:y:z) \mapsto (x^2 - 2yz : y^2 - 2zx : z^2)$

(4.1) $(x:y:z) \mapsto (2i(z^2+xy) : y^2 - x^2 : (2-2i)yz)$

References

[FS1] J. Fornaess and N. Sibony, Critically finite rational maps on $\boldsymbol{P}^2$, Contemporary Math. 137 (1992) 245-260.

[FS2] J. Fornaess and N. Sibony, Complex dynamics in higher dimension I, Asterisque 222 (1994), 201-231.

[FS3] J. Fornaess and N. Sibony, Complex dynamics in higher dimension II, Annals of Math. Studies 137 (1995) 135-182.

[HP] J. H. Hubbard and P. Papadopol, Superattractive fixed points in C^n, Indiana Univ. Math. J. 43 (1994), 321-365.

[J] M. Jonsson, Some properties of 2-critically finite holomorphic maps of P^2, to appear in Ergodic Theory Dynam. Systems.

[K] S. Kobayashi, Hyperbolic Manifolds and Holomorphic Mappings, Marcel Dekker, 1970.

[U1] T. Ueda, Complex dynamical systems on projective spaces, Chaotic Dynamical Systems, World Scientific Publ. 1993.

[U2] T. Ueda, Fatou sets in complex dynamics on projective spaces, J. Math.Soc.Japan Vol.46 (1994)

[U3] T. Ueda, Critical orbits of holomorphic maps on projective spaces, to appear in The Journal of Geometric Analysis.