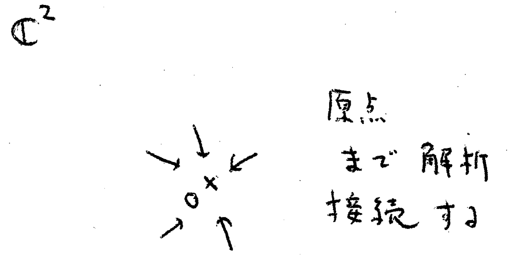
数理解析研究所講究録
1090巻 1999年 87-99

Higher codimensional BVP for $\mathcal{D}$-modules

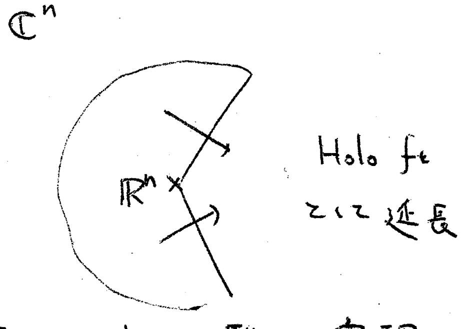
広島大学理　竹内 潔 (Kiyoshi Takeuchi)

§0. Introduction

本講演では、$\mathcal{D}$-加群の解の接続についてのいくつかの結果を報告する。よく知られているとおり、正則函数すなわちCauchy-Riemann系の解については、その定義域が自動的に延長するような現象が数多くみられる。例えば、多変数函数論の教科書の一番初めに出てくるHartogsの定理や、局所Bochner型の定理が、その代表例であろう。



Hartogs型の定理



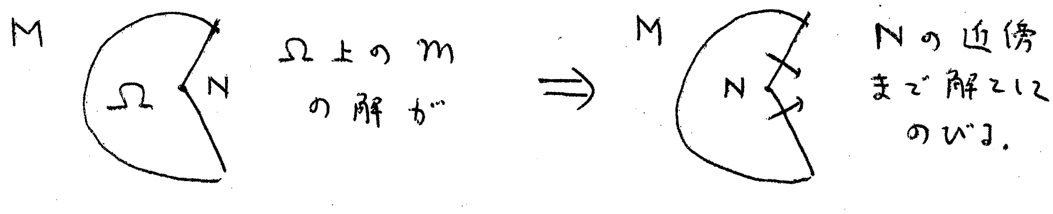
局所Bochner型の定理

「解がこのような延長現象を必ずおこすような偏微分方程式系のクラスを決定せよ」という問題は、多くの数学者たちの関心を集めてきた。局所Bochner型の延長問題については、

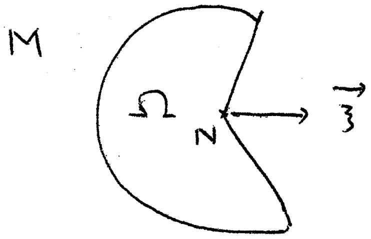
代数解析の立場からの、柏原－河合による楕円型境界値問題の結果［5］と、柏原－Schapira による Hyperbolic systems についての結果［8］が、最も決定的であろう（解の実解析性を仮定したり、解の定義されていない集合が十分に薄い場合には、金子・大阿久・内田氏らによる先駆的な研究がある）。ここでは上記の［5］および［8］の結果を、双方含むような形で拡張したものを、種々の函数空間において与える。柏原－河合の結果を非楕円型の system へ拡張するために、筆者が P. Schapira 氏と構成した Bimicrolocalization の理論［12］,［13］（片岡－戸瀬［3］も、第2超局所化と関係する場合に、同様の理論を考えていた）が、有効に用いられる。

§1. Microlocal Inverse Image の応用

以下、n次元の実解析多様体 M およびその余次元 $d \geq 1$ の部分多様体 $N \subset M$ を考える。$N \subset M$ の複素化 $Y \subset X$ をとり、いつものように $\mathcal{D}_X$－加群（＝線型偏微分方程式系）$\mathcal{M}$ を考える。我々がこれから考えようとしている問題は「$\mathcal{D}_X$－加群 $\mathcal{M}$ にどんな条件を課したら、その解が以下の図のような自動延長を起こすか？」である。



Ωのひらいている方向を指定している covector $\vec{\xi} \in \mathring{T}^*_N M$ をとると、



この問題は、cohomology の消滅：

$$H^j \mu_N [\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{B}_M)]_{\vec{\xi}} = 0 \quad \text{for} \quad j < d$$

を示すために必要な $\mathcal{M}$ の条件を求める問題になる。ここに $\mathcal{B}_M$ は M 上の Hyperfunction の層で、$\mu_N : D^b(M) \to D^b(T^*_N M)$ は佐藤の microlocalization functor である。柏原－河合 [5] は、楕円型方程式（すなわち、その特性多様体 char $\mathcal{M}$ が char $\mathcal{M} \cap \mathring{T}^*_M X = \phi$ をみたす、$\mathcal{D}_X$-加群 $\mathcal{M}$）に対して、同型：

$$\mathbb{R}\theta_! \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{C}_{N|X}) \xrightarrow{\sim} \mu_N [\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{B}_M)] \otimes or_{N|M}$$

$$(\theta : T^*_N X \longrightarrow T^*_N M, \ \mathcal{C}_{N|X} \text{ は } T^*_N X \text{ 上の sheaf})$$

を示すことによって、上のような cohomology の消滅を示した。さて、$\mathcal{D}_X$-加群 $\mathcal{M}$ が楕円型でない場合は、この同型は一般には成り立たない。しかしながら、我々の Bimicrolocalization の理論を用いて構成される fiber product $T^*_N M \underset{M}{\times} T^*_M X$ 上の層 $\mathcal{C}_{NM}$ を用いると、導来圏 $D^b(T^*_N M)$ の中での

distinguished triangle :

$$\mathbb{R}\theta_! \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{C}_{N|X}) \to \mu_N[\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{B}_M)] \otimes or_{N|M}$$
$$\to \mathbb{R}\overset{\circ}{\pi}_* \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{C}_{NM}) \to +1$$
$$(\overset{\circ}{\pi} : T_N^*M \underset{M}{\times} \overset{\circ}{T}{}_M^*X \twoheadrightarrow T_N^*M)$$

が存在して、同型が成り立たない障害が層複体 $\mathbb{R}\overset{\circ}{\pi}_*$ $\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{C}_{NM})$ として具体的に構成できるのである。このように研究対象 $\mu_N[\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{B}_M)]$ を「2つの複体に分解」することで、一般の非楕円型の system の研究が可能になる。 大雑把にいうて、system $\mathcal{M}$ が $\overset{\circ}{T}{}_M^*X$ 上で $\vec{\xi} \in \overset{\circ}{T}{}_N^*M$ 方向に、マイクロ双曲型か、Bony−Schapira の意味で部分楕円型ならば、$\overset{\circ}{\pi}^{-1}(\vec{\xi})$ 上で、

$$H^j \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{C}_{NM}) \simeq 0 \quad \text{for} \quad j<d$$

が成り立ち、以下の延長定理が示される。(詳しくは [14] および [15] を見られたい。)

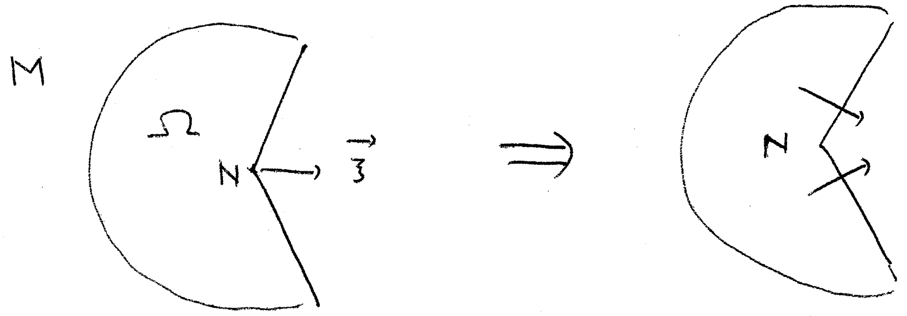
<u>定理1</u> $\mathcal{M}$ が Y に対して非特性 ($\mathrm{char}\,\mathcal{M} \cap \overset{\circ}{T}{}_Y^*X = \phi$) で、$\overset{\circ}{T}{}_M^*X$ 上で $\vec{\xi} \in \overset{\circ}{T}{}_N^*M$ 方向にマイクロ双曲型か、部分楕円型ならば、

$$H^j \mu_N[\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{B}_M)]_{\vec{\xi}} \simeq 0 \quad \text{for} \quad j<d$$

が成りたち、解の自動延長 :

$$\Gamma_\Omega \mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{B}_M)\Big|_N \xleftarrow{\sim} \mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{B}_M)\Big|_N \quad \text{----} \ (\#)$$

が引き起こされる。



Ω上での解が $\longmapsto$ Nの n.h.d まで解としてのびる。

また、上の定理において、$\mathcal{B}_M$ を実解析解 $\mathcal{A}_M$ でおきかえても同型(#)が示せる。つまり、実解析解の延長は、やはり実解析解になる。この定理の原型は、やや不完全な形で[14]において初めて得られた。この時点では、$\mathcal{D}_X$-加群 $\mathcal{M}$ の特性多様体の幾何学的条件だけで定理を述べることができなかった。その後、柏原-Schapira [9] や D'Agnolo らによる microlocal Inverse image を用いて $\mathcal{D}_X$-加群 $\mathcal{M}$ の特性多様体を cut-off することにより、[15] において現在の完全な形になった。なお、部分楕円型の case を扱うのに、戸瀬氏の修論の idea や J-M. Delort 氏の最近の仕事の idea を利用した。

§2. Distribution 解の延長について

本節においては、Distribution 解の延長が再び Distribution と

なるための system $\mathcal{M}$ の条件を考えよう。まず $\mathcal{M}$ が部分楕円因子を含まぬ場合は、前節の定理は $\mathcal{M}$ が Y に対して非特性でなくても成り立つ（[15] に公表予定）：

定理2 $\vec{\xi} \in \overset{\circ}{T}{}^*_N M$ を1つ fix する。$\operatorname{char} \mathcal{M} = \bigcup_{j=1}^{k} V_j$ を $\mathcal{M}$ の特性多様体の既約分解とし、各 V_j は以下のいずれかの条件をみたすとする。（$d \geq 2$ とする）

(i) V_j は Y に対し非特性で elliptic i.e. $\overset{\circ}{T}{}^*_M X \cap V_j = \phi$

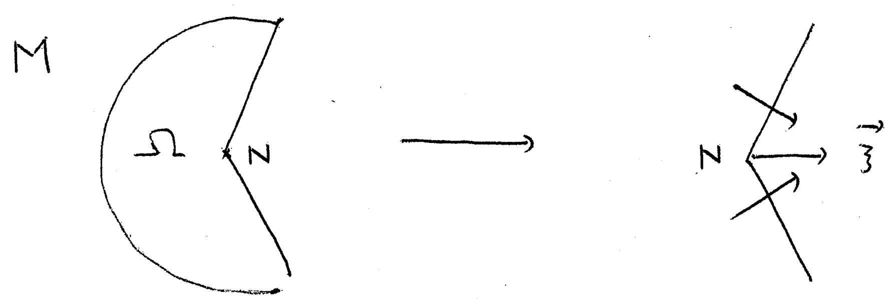
(ii) V_j は $\vec{\xi} \in \overset{\circ}{T}{}^*_N M$ 方向に双曲型.（$\vec{\xi} \notin C_{T^*_M X}(V_j)$）

このとき、次が成りたつ。

$$H^j \mu_N [R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{B}_M)]_{\vec{\xi}} = 0 \quad \text{for} \quad j < d$$

また、解の自動延長が成り立つ：

$$\Gamma_\Omega \mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{B}_M)\big|_N \xleftarrow{\sim} \mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{B}_M)\big|_N .$$



上の定理における (ii) の V_j は T^*X の中で余次元1でよく、Y に対して非特性, i.e. $\overset{\circ}{T}{}^*_Y X \cap V_j = \phi$（$d \geq 2$ の時は強い条件）である必要はない。また実解析解は、実解析解と

して延長する。(ii)の条件をみたす V_j が余次元1となる例を挙げよう。

例 $d = 2$ とする。$Q \in \mathcal{D}_X$ を ξ 方向に双曲型の作用素とし、$E_1, E_2 \in \mathcal{D}_X$: 楕円型作用素をとって

$$\mathcal{M} := \mathcal{D}_X / \mathcal{D}_X E_1 Q + \mathcal{D}_X E_2 Q$$

$$\underset{\text{同値}}{\Longleftrightarrow} \quad \begin{cases} E_1 Q u = 0 \\ E_2 Q u = 0 \end{cases} \quad \text{という方程式}$$

とおくと、この $\mathcal{D}_X$-加群 $\mathcal{M}$ は上の定理の仮定をみたす。

この結果は [5] と [8] を mix したような一般化で、両者に含まれない例が数多く存在することが、上の例からもわかるであろう。ここで最近の D'Agnolo-Schapira [1] による(柏原-大島の意味での)確定特異点型の system の特徴付けと、D'Agnolo-Tonin [2] の idea を用いることで、定理2の Distribution version が得られる。

定理3 $\mathcal{M}$, Ω, ξ は定理2のとおりとする。さらに、$\mathcal{M}$ の特性多様体 $\mathrm{char}\,\mathcal{M} = V \subset T^*X$ や $\mathcal{M}$ 自身に次の条件を課す。

(i) V は real (i.e. V は $V_{\mathbb{R}} = V \cap T^*_M X$ の複素化) reg inv. on $\mathring{T}^*_M X = T^*_M X \setminus M$。

(ii) $\mathcal{M}$ は $V \cap \mathring{T}^*_M X$ 上で V に沿って（柏原－大島の意味で）確定特異点を持つ。

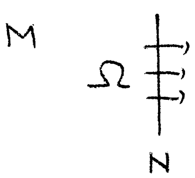
この時、次の『Distribution 解の延長』が成りたつ：

$$\Gamma_\Omega \mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{D}b_M)\big|_N \xleftarrow{\sim} \mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{D}b_M)\big|_N$$

証明は、実量子化接触変換を用いて特性多様体をまっすぐにのばして、de Rham 系の直和による $\mathcal{M}$ の resolution を microlocal につくることで得られる。すなわち、左辺の解 $u \in \Gamma_\Omega \mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{D}b_M)\big|_N$ を定理2で Hyperfunction 解として延長しておいて、microlocal な議論で Ω の向こう側でも temperedness が保たれることを示すのである。この方法は余次元 d が1の場合も有効で、次の結果が得られる。

<u>定理4</u>　Nの余次元 d を1とし、Nの片側を Ω とする。coh $\mathcal{D}_X$-module $\mathcal{M}$ は $\pm\vec{\xi} \in \mathring{T}^*_N M$ 方向に双曲型で、定理3の条件(i)(ii)をみたすとする。このとき、

$$R\Gamma_\Omega R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{D}b_M)\big|_N \xleftarrow{\sim} R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{D}b_M)\big|_N$$



（Nの余次元が1）

distribution として延長

この結果は［10］において公表予定で、東大数理院生の小清水寛化との共同研究である。

§3. 確定特異点型 system に対する Hartogs type の定理

この節では、$\mathcal{D}_X$-module $\mathcal{M}$ が $Y \subset X$ に対して特性的な場合の結果を述べよう。§1 および §2 では（$\mathcal{M}$ が Y に対して非特性の場合は）、$\mathcal{M}$ の特性多様体 $\mathrm{char}\,\mathcal{M}$ の幾何学的条件で解の延長のための条件が特徴付けられた。しかし、$\mathcal{M}$ が Y に対して特性的な場合は、Y 上の $\mathrm{char}\,\mathcal{M}$ の fiber はとても大きく、そのような事は望めそうにない。そこで、ここでは $\mathcal{M}$ の Y に沿ったある種のモノドロミーによってその条件を特徴付けよう。$N \subset M$ および $Y \subset X$，$d = \mathrm{codim}^{\mathbb{R}}_{M} N$ などは、前のとおりとする。$\mathcal{I}_Y \subset \mathcal{O}_X$ で Y の定義 ideal をあらわすことにし、次の定義を復習しよう。

定義（柏原 [4]、柏原－河合 [6]）

(i) 層 $\mathcal{D}_X|_Y$ の V-filtration $\{V_j(\mathcal{D}_X)\}_{j\in\mathbb{Z}}$ を次で定める。

$$V_j(\mathcal{D}_X) := \{P \in \mathcal{D}_X|_Y \,;\, P\mathcal{I}_Y^k \subset \mathcal{I}_Y^{k-j} \text{ for } {}^\forall k \in \mathbb{Z}\}$$

ここで、$\mathcal{I}_Y^k = \mathcal{O}_X$ for $k \leq 0$ とする。

(ii) coh $\mathcal{D}_X$-module $\mathcal{M}$ が specializable (resp. regular specializable) along Y とは、${}^\forall m \in \mathcal{M}|_Y$ に対して、${}^\exists$多項式 $b(t) \neq 0$ および ${}^\exists Q \in V_{-1}(\mathcal{D}_X)$ (resp. s.t. $\deg b \geq \deg Q$) が存在して、$[\,b(\theta) + Q\,]\,m = 0$ をみたすことをいう。ここで、$\theta = z_1 D_1 + \cdots + z_d D_d$ $(Y = \{z_1 = \cdots = z_d = 0\} \subset X)$

とした。

(iii) $m \in \mathcal{M}|_Y$ に対して、(ii) の条件：$\exists Q \in V_{-1}(\mathcal{D}_X)$ s.t. $[b(\theta)+Q]m = 0$ をみたす $b(t) \neq 0$ で最小次数のものを、m の b-ft といい、この b-ft $b_m(t)$ を用いて、

$$\mathrm{ord}_Y(m) := b_m^{-1}(0) \subset \mathbb{C}$$ とおく。

さて、Y に沿って specializable な $\mathcal{D}_X$-加群 $\mathcal{M}$ については、$\exists A \subset \mathbb{C}$：有限集合 s.t.

$$\mathrm{ord}_Y(\mathcal{M}) := \bigcup_{m \in \mathcal{M}} \mathrm{ord}_Y(m) \subset [A+\mathbb{Z}] \subset \mathbb{C}$$ とできる。

以上の準備の下で、Y に沿った Holomorphic hyperfunction $\mathcal{B}^\infty_{Y|X}$ に対する消滅定理（[16]）を述べよう。

定理5 $X = \{(z'=(z_1,\cdots,z_d), z'')\} \supset Y = \{z'=0\}$ とする。z''-変数の正則 ft 係数の t の多項式 $b(z'',t) \neq 0$ を考える。

(i) $\forall (0,z'') \in Y$ に対して、$b(z'', -j-d) \neq 0$ for $j = 0,1,2,\cdots$ とする。$\deg b \geq \deg Q$ をみたす $Q \in V_{-1}(\mathcal{D}_X)$ をとって、$\mathcal{M} = \mathcal{D}_X / \mathcal{D}_X[b(\theta)+Q]$ とおくと、

$$\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{B}^\infty_{Y|X}) \simeq 0$$

(ii) $\mathcal{M}$ を Y に沿って regular specializable で $\mathrm{ord}_Y(\mathcal{M}) \cap \mathbb{Z} = \phi$ な $\mathcal{D}_X$-module とすると、

$$\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{B}^{\infty}_{Y|X}) \simeq 0$$

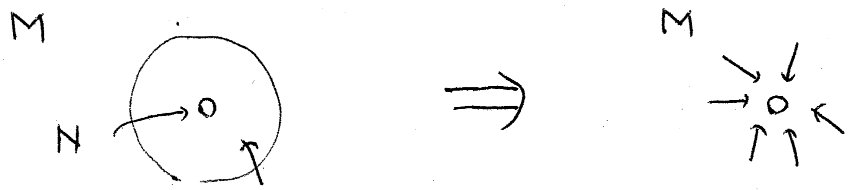
この定理の証明には、評価のともなう、かなりに deep な Laurent - Monteiro Fernandes [11] の結果が用いられる。実際、彼らの結果をうまく利用したのに過ぎないのだが、柏原－大島 [7] の結果の余次元 d が 2 以上の場合への（そして system への）一般化が得られる。上の定理に functor $\mathbb{R}\Gamma_N(*)$ を施すと、次の Hartogs 型の結果が得られる。

Corollary　$\mathcal{M}$ は定理5の (i) か (ii) の条件をみたすとする。このとき、$\mathbb{R}\Gamma_N \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{B}_M) \simeq 0$ で、Hartogs type の延長定理：

$$\Gamma_{M-N}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{B}_M)\Big|_N \xleftarrow{\sim} \mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{B}_M)$$

が成立。

$d=2$ の場合



Nの外の$\mathcal{M}$の解が　　Nまで解として延長する。

以上で、$\mathcal{M}$ が Y に対して特性的な $\mathcal{D}_X$－加群に対しては、$\mathcal{M}$ の Y に沿ったモノドロミー（order）のようなものが、解の延長を考えるのに重要であることが、おわかりいただけたと思う。解の定義されていない集合が薄くなく、むつかしい場合（局所 Bochner 型）は、大学院生の方々の challenging な問題としてよいかも知れない。

References

[1] A. D'Agnolo and P. Schapira : The Radon-Penrose transform for D-modules., J. Funct. Anal., **139**, pp.349-382 (1996).

[2] A. D'Agnolo and F. Tonin : Cauchy problem for hyperbolic D-modules with regular singularities., to appear in Pacific Journal of Mathematics.

[3] K. Kataoka and N. Tose : Some remarks in 2nd microlocalization., (in Japanese), R.I.M.S. Kôkyu-roku, Vol. **660** (1988), 52-63.

[4] M. Kashiwara : Vanishing cycle sheaves and holonomic systems of differential equations., Lect. Note in Math., **1016**, Springer, pp.134-142 (1983).

[5] M. Kashiwara and T. Kawai : On the boundary value problem for elliptic systems of linear partial differential equations I-II, Proc. Japan. Acad., Vol 48 (1971), 712-715; ibid., Vol 49 (1972), 164-168.

[6] M. Kashiwara and T. Kawai : Second microlocalization and asymtotic expansions., Lect. Notes Phys. **126**, Springer, pp.21-76 (1980).

[7] M. Kashiwara and T. Oshima : Systems of differential equations with regular singularities and their boundary value problems., Ann. of Math., Vol 106, pp.145-200 (1977).

[8] M. Kashiwara and P. Schapira : Micro-hyperbolic systems., Acta Math., **142**, pp.1-55 (1979).

[9] M. Kashiwara and P. Schapira : Sheaves on manifolds., Grundlehlen der Math. Wiss., **292**, Springer-Verlag (1990).

[10] H. Koshimizu and K. Takeuchi : Extension theorems for the distribution solutions to D-modules with regular singularities., to appear.

[11] Y. Laurent and T. Monteiro Fernandes : Systèmes différentiels Fuchsiens le long d'une sou-variété., Publ. RIMS, Kyoto Univ, Vol 24, pp.397-431 (1988).

[**12**] P. Schapira and K. Takeuchi : Déformation binormale et bispécialisation., C.R. Acad. Sc. t.319, Série I (1994), 707-712.

[**13**] K. Takeuchi : Binormal deformation and bimicrolocalization., Publ. R.I.M.S., Kyoto Univ., Vol **32** (1996), 277-322.

[**14**] K. Takeuchi : Edge-of-the-wedge type theorems for hyperfunction solutions., Duke Math. J., **89**, pp.109-132 (1997).

[**15**] K.Takeuchi : Microlocal inverse image and bimicrolocalization., to appear in Publ. R.I.M.S., Kyoto Univ., Vol **34** (1998)

[**16**] K.Takeuchi : A Hartogs-type Theorem for Solutions to Systems with Regular Singularities., submittting.

K. TAKEUCHI
Department of Mathematics
Hiroshima University
1-3-1, Kagamiyama, Higashi-hiroshima, Hiroshima, 739, JAPAN
e-mail: takeuchi@top2.math.sci.hiroshima-u.ac.jp