数理解析研究所講究録
1092巻 1999年 1-10

ファラデー共鳴の直接数値シミュレーション

阪府大工　近野 雅嗣 (Masatsugu Chikano)
阪府大工　村上 洋一 (Youichi Murakami)

1　はじめに

ファラデー共鳴とは液体の満たされた容器を加振する場合に生じるパラメトリック共鳴のことである。加振を強くするとこの共鳴により表面に波が生じる。この波の振動数は不安定により加振振動数の半分となることが多い。加振を$g_y = g + a_g(= a\omega^2)\cos\omega t$で表すと、不安定の分岐パラメーターは$a_g$と$\omega$となるが、ここでは$\omega$をとめて$a_g$を変化させる。粘性が小さく流体層が深い場合、ポテンシャル流として比較的簡単に扱うことができる。Kumar and Tuckerman (1994) は粘性が無視できない場合について扱い、ナヴィエストークス方程式をもとに線形安定解析を行った。この理論的扱いにおいては、生じる波は表面全体に広がって振動すると仮定している。

ところで、最近、Lioubashevski et al (1996) の実験では粘性の大きな流体を非常に薄くして用い、従来と定性的に異なる興味深い結果を得ている。この実験では水の80倍程度の粘性を持つ液体を、直径144[mm]、深さ1.3[mm]の容器に入れて加振する。すると静止状態から、まず1次不安定として容器の真ん中のみ、または容器の壁付近の一部の領域のみで波が生じる。彼らは初期条件の違いによりこの‘閉じ込められた波’の発生する領域が変化することから、実験容器の非一様性ではないと結論している。更に加振を大きくしていくと2次不安定として空間に局在する孤立した波が生じ、大きな振幅で振動しながら進行していく。図1に1次不安定の波を、図2に2次不安定の波を示す。

図1　1次不安定の波

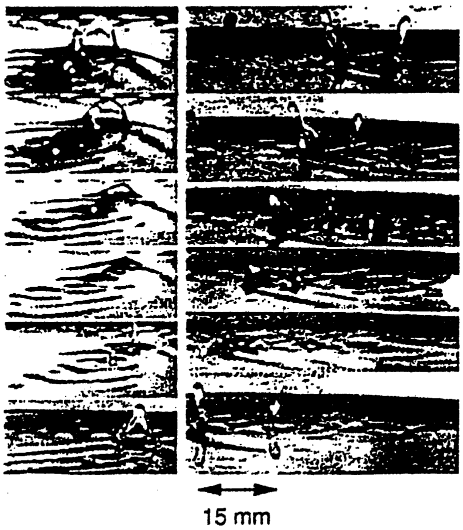

図2　2次不安定の波

Lioubashevski et al の実験で液体の粘性が $0.00008[m^2/s]$、加振角振動数が $257.5[s^{-1}]$ の時、粘性境界層厚さは $\delta = \sqrt{\nu/\omega} = 0.56[mm]$ で、深さ $h = 1.3[mm]$ との比をとると $\delta/h = 0.43$ となる。この場合、粘性境界層が流体層の半分程度を占めており、粘性を無視することができず、ポテンシャル理論は使えない。数値シミュレーションをする場合、ナヴィエストークス方程式を直接扱うのが自然である。今回の計算では1次不安定を再現し、その空間構造を明らかにすることを目標としている。

2 問題の定式化

前記の現象をナヴィエストークス方程式を直接数値計算することで調べる。ここでは空気の層の運動は無視する。固体壁では粘性境界条件、自由表面では、表面張力と粘性による応力境界条件を用いる。境界条件の取り扱いにおいては近似は一切していない。液面高さは位置の一価関数として境界適合格子を用いる。1次不安定の波を対象としているので、液面高さが位置の一価関数であるという仮定は問題はないと思われる。現象は3次元的であるが、この計算は計算時間を節約するため2次元で行った。基礎方程式を以下に示す。

・連続の式（非圧縮）

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{1}$$

・ナヴィエストークス方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)u \tag{2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)v + g_y \tag{3}$$

・表面での境界条件（ $y = h(x,t)$ ）

$$\frac{\partial h}{\partial t} + u\frac{\partial h}{\partial x} = v \tag{4}$$

$$P = -\frac{\sigma(\partial^2 h/\partial x^2)}{\rho[1+(\partial h/\partial x)^2]^{3/2}} + \frac{2\nu}{1+(\partial h/\partial x)^2}\left[\frac{\partial v}{\partial y} - \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2\right] \tag{5}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{2(\partial h/\partial x)}{1-(\partial h/\partial x)^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) = 0 \tag{6}$$

Lioubashevski ・固体壁での境界条件（ $y = 0$ ）

$$u = v = 0, \qquad \frac{\partial p}{\partial y} = \nu\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + g_y \tag{7}$$

・固体壁での境界条件（ $x = 0, L_x$ ）

$$u = v = 0, \qquad \frac{\partial p}{\partial x} = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{8}$$

3 数値計算法

図3のように高さ方向のみ座標変換することにより、物理空間を計算空間に対応させる。計算スキームはSMAC法を採用し、時間については1次の前進オイラー法、空間は2次の中心差分、ただし移流項には1次の風上差分を用いている。離散化する際はくいちがい格子を用いている。ポアソン方程式はSOR法で解く。コードの流れは、仮の速度を求め、その速度で液面高さを動かし、その領域で連続の式を満たすように速度を補正する。その補正された速度で液面高さを動かし、さらに速度を補正する。この反復を速度の補正分が十分に小さくなるまで行う。

計算におけるパラメーターは、容器の幅 $L = 0.072[m]$、容器の深さ $h = 0.0013[m]$、粘性係数 $\nu = 0.00008[m^2/s]$、密度 $\rho = 1000[kg/m^3]$、表面張力係数 $\sigma = 0.031[N/m]$、加振角振動数 $\omega = 257.5[s^{-1}]$ とする。Lioubashevski et al の実験と合わせているが* 、容器の大きさは半分にしている。加振振幅は不安定の分岐パラメーターとなっており、流体にかかる力が$16.7g$の時 $a = 2.466 \times 10^{-3}[m]$ となる。刻みは水平方向に$N_X = 250$等分で1波長を約30分割、高さ方向に$N_Y = 20$等分、時間刻みは$\Delta t = 0.00001$で加振周期を約2500分割していることになる。

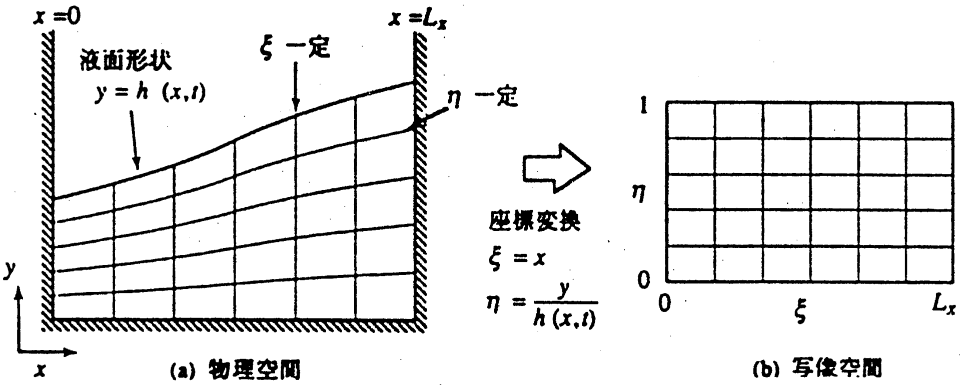

図3 座標変換

4 計算結果

図4に臨界加振重力である$a_g = 16.6g$での表面波形の時間変化を示す。$T = 0$での波形は初期条件として入れておいたものであり、$T = 1$では減衰してほとんど見えなくなる。図5に流線を、図6に渦度分布を示す。表面に波は立っていないが内部では運動していることがわかる。また境界層厚さは $\delta = \sqrt{\nu/\omega} = 0.56[mm]$ となるが、ちょうどその領域ではほとんど運動していない。次に加振重力が臨界値を超えた$a_g = 17.0g$での表面波形の時間変化を図7に示す。$T = 0$での初期の波形が$T = 1$ではいったん減衰して、不安定による波が新

*Lioubashevski et al の論文には密度 ρ、表面張力係数 σ の値が記載されていなかったので上記の値を用いたが、後に直接問い合わせると密度 $\rho = 900[kg/m^3]$、表面張力係数 $\sigma = 0.030[N/m]$ であった。

たに生じてくる。この波が時間とともに$(T=2,3)$成長し、それ以降は同じ振幅で振動を続ける。表面の波形以外の線はその点における速度ベクトルを表している。図8に流線の、図9に渦度分布の変化の様子を示す。この場合も境界層領域ではほとんど運動していない。

図10に$a_g=16.9g$での左から1/10の表面の点の時間変化を示す。初期の波形が減衰し、不安定による波が成長して、ある振幅に達すると定常振動を続ける様子がここでも確認できる。図11は図10の$T=4.5$から$T=5.0$までを拡大したものである。サインカーブで振動しているわけではなく、ハーモニックな振動とサブハーモニックな振動が合わさって振動していることがわかる。

図12に実験および線形安定性理論による、加振振動数と臨界加振重力との関係を示す。計算では加振振動数$f=41[Hz]$は固定したままで、加振重力を動かした。その結果、a_gが$16.6g$を超えない範囲では表面に波は立たず、超えると波が生じたので、計算による臨界加振重力は$16.6g$となり、実験および理論と、グラフから判断する限り一致している。

5 まとめ

粘性の強い場合のファラデー共鳴の２次元直接数値シミュレーションコードを波高が一価の境界適合格子を用いて作成した。そして計算による臨界加振重力が、実験結果および線形理論と一致することを確認した。しかし、計算した範囲においては、目標としていた１部の領域のみで波が生じるという現象（‘閉じ込められた波’）は再現できなかった。発生した定在波に、さらに孤立した撹乱を加えてシミュレーションを行った場合においても、もとの定在波に戻るという結果を得た。また、孤立した初期値から出発しても、空間的に一様な定在波が発生した。この現象は３次元特有の現象であることを示唆している。

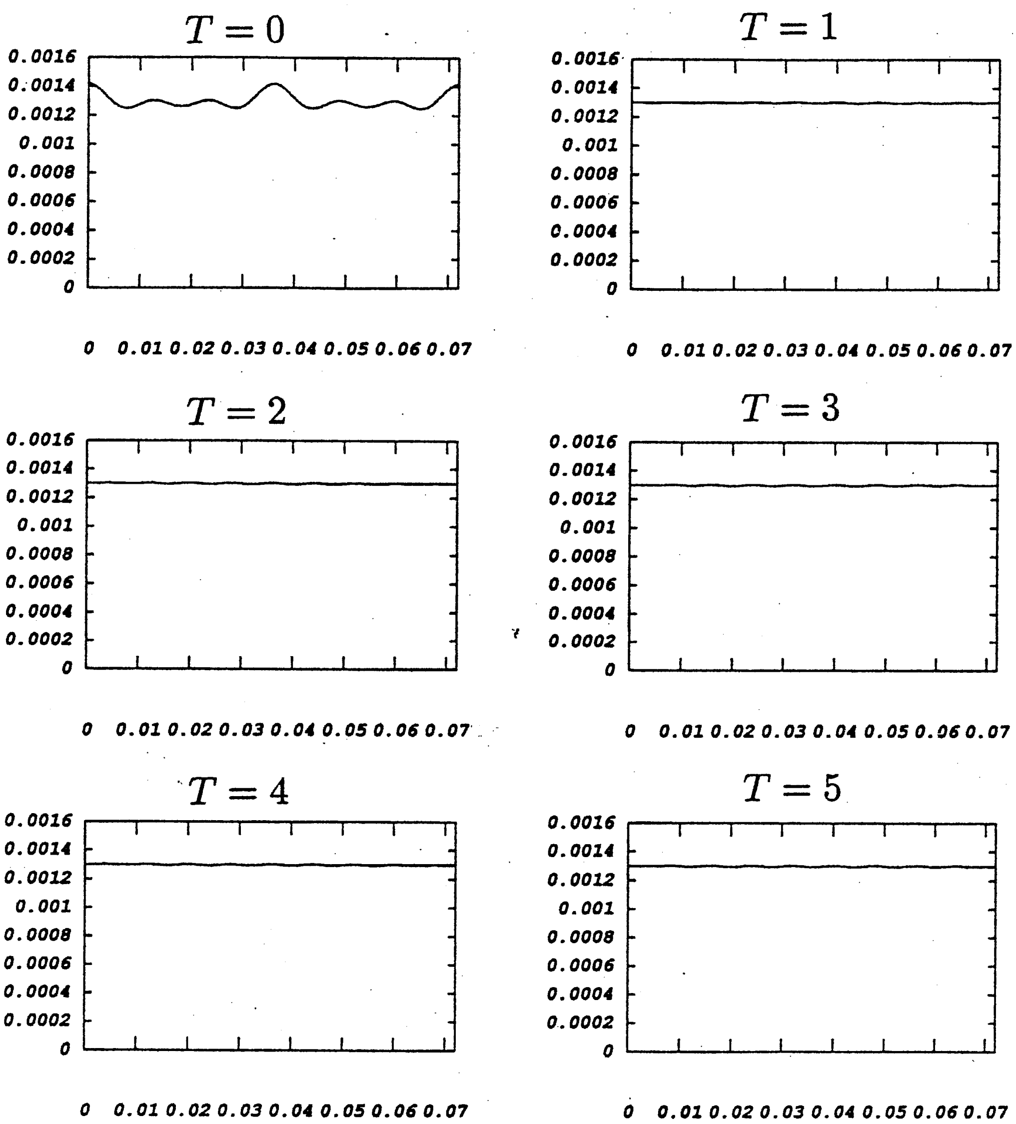

図4 表面波形の時間変化 (16.6g)

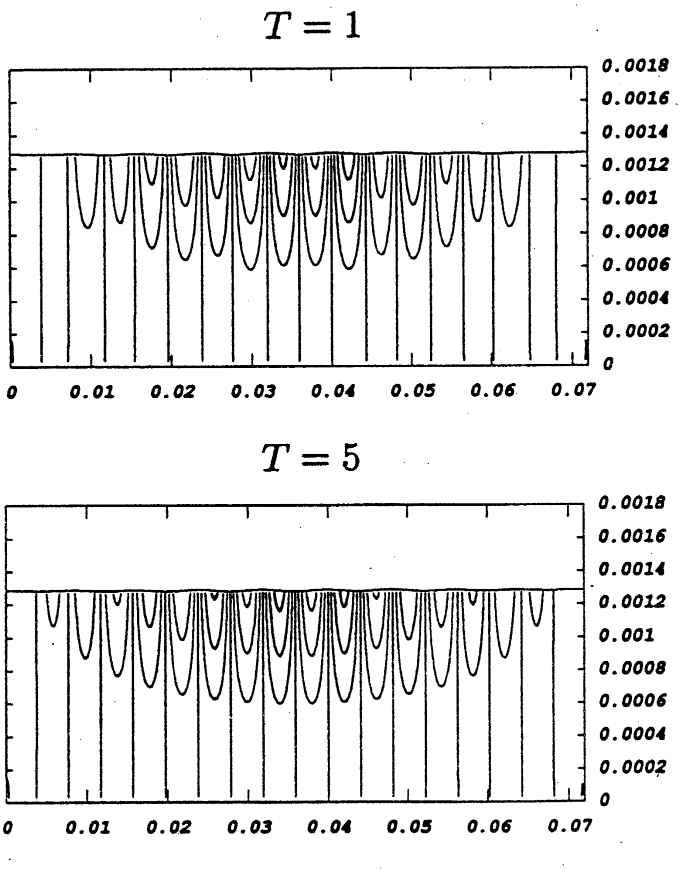

図5 流線 (16.6g)

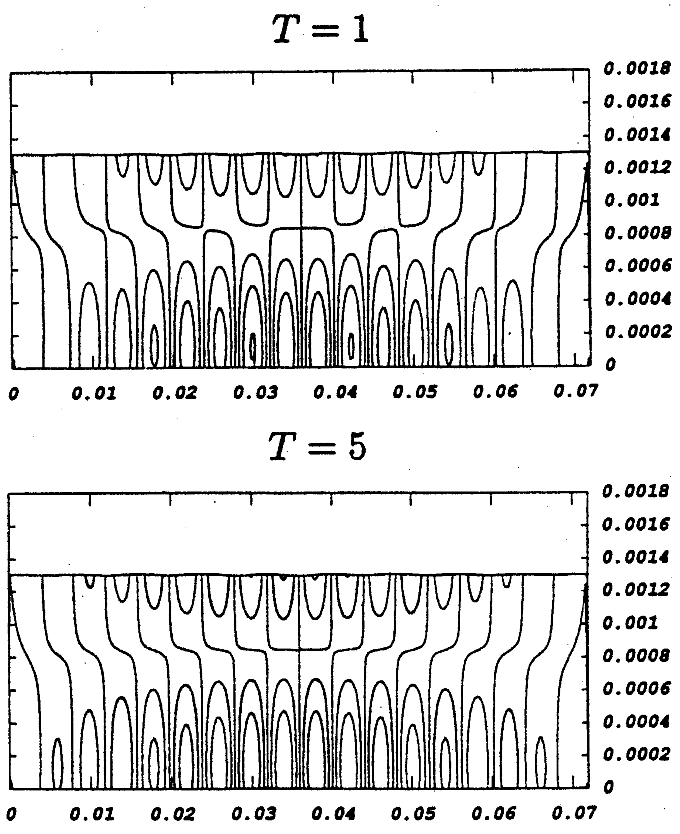

図6 渦度分布 (16.6g)

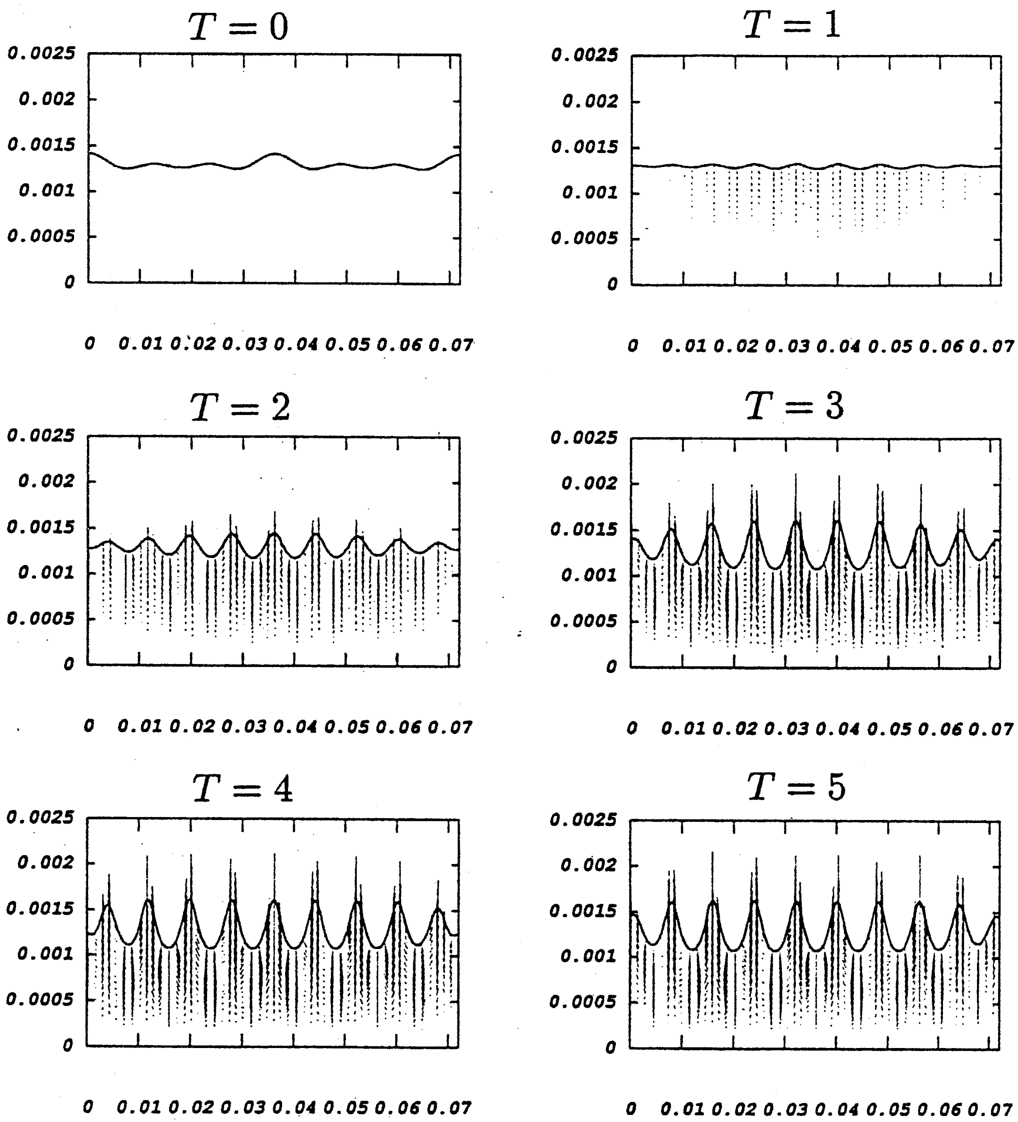

図 7 表面波形の時間変化 (17.0g)

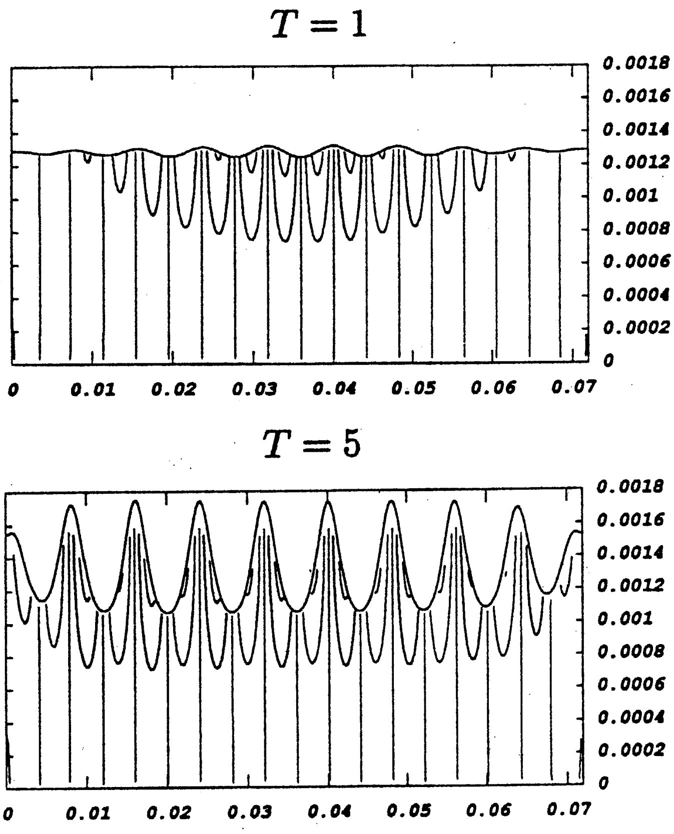

図８ 流線 (17.0g)

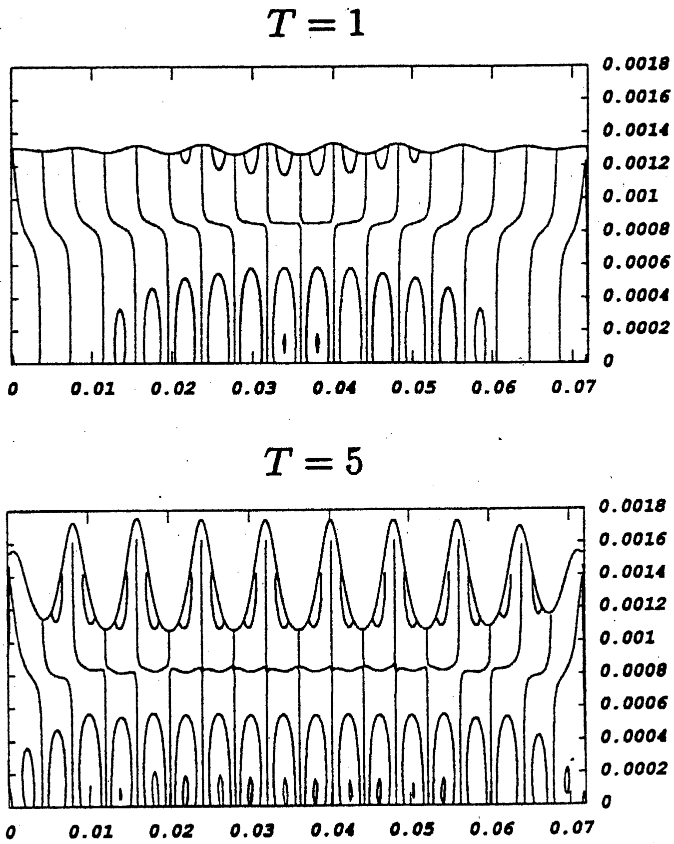

図９ 渦度分布 (17.0g)

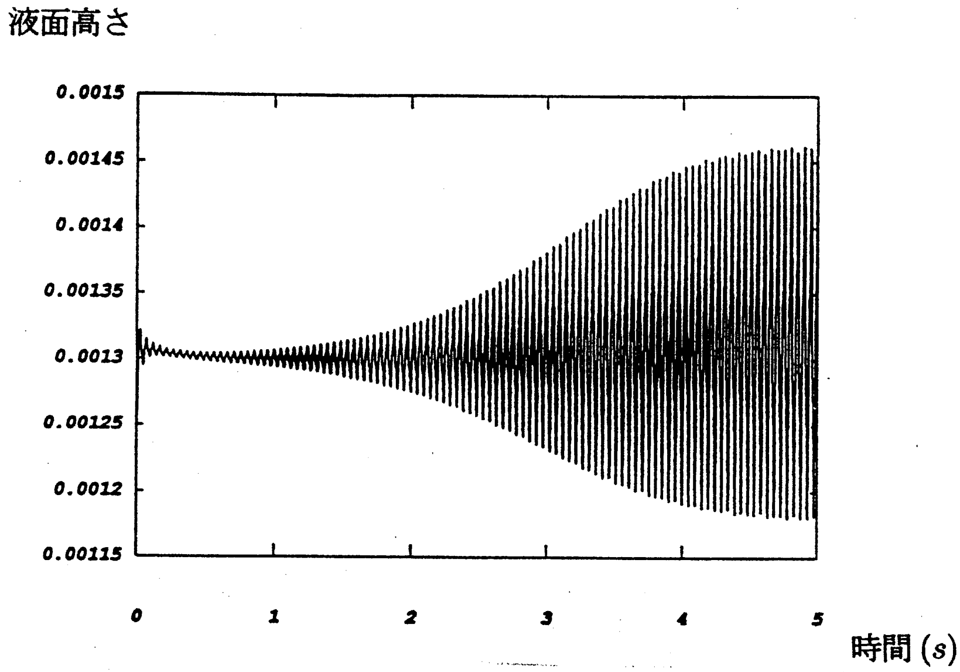

図１０ 液面高さの時間変化 (16.9g)

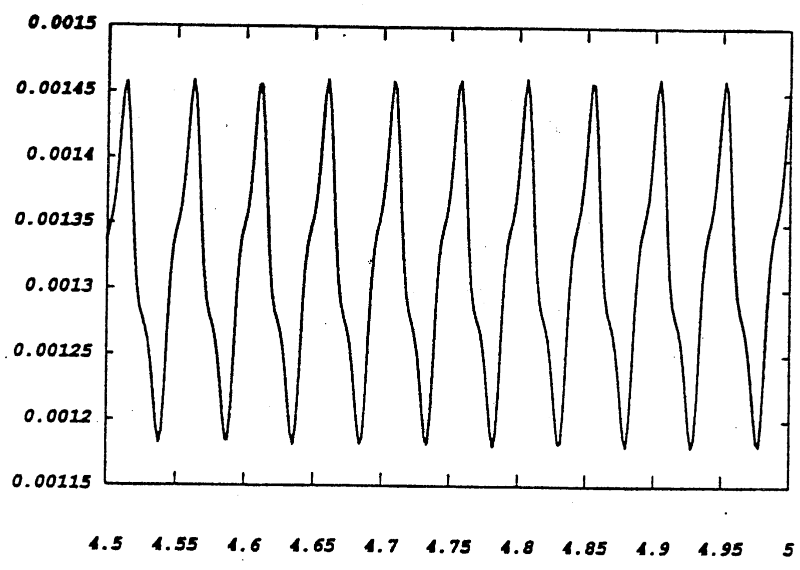

図１１ 液面高さの時間変化 (16.9$g, T = 4.5 - 5.0$)

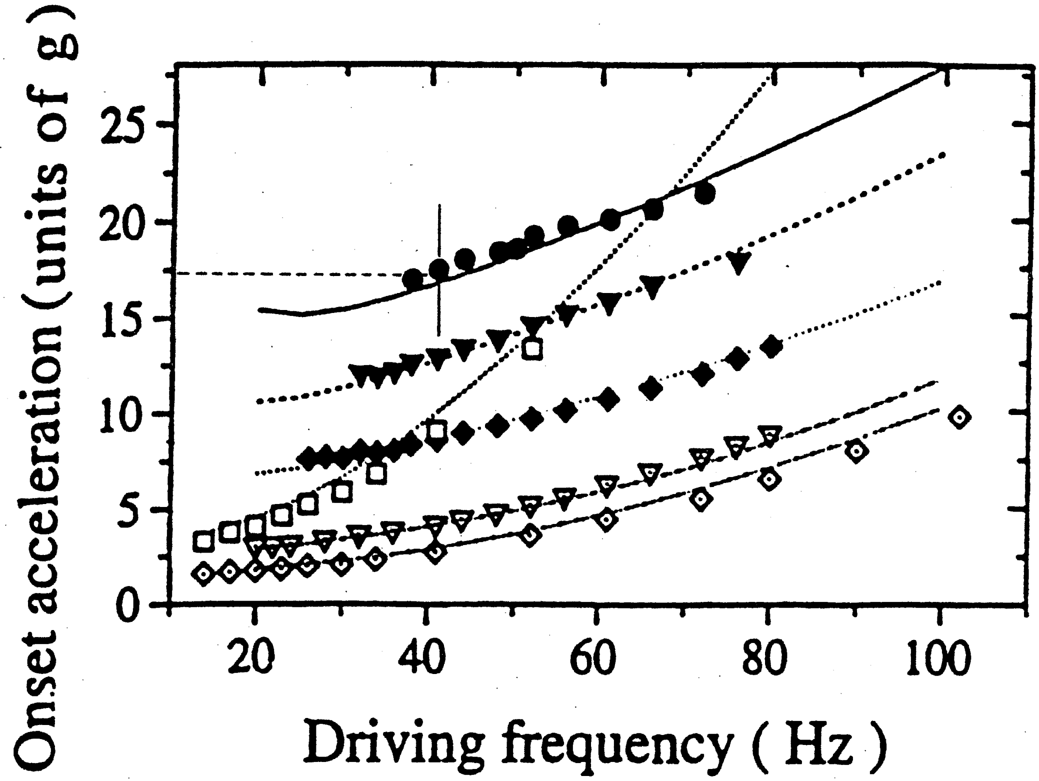

図１２ 実験、理論による加振振動数と臨界加振重力の関係