

斥力型ポテンシャルに付随した線形固有値問題の解と

Davey-Stewartson 方程式の初期値問題

宇都宮大学工学部 矢嶋 徹 (Tetsu Yajima)  
山形大学工学部 西成活裕 (Katsuhiko Nishinari)

1 はじめに

Davey-Stewartson の I 型方程式 (以下 DS1 方程式 [1, 2])

$$\begin{aligned}iq_t + q_{xx} + q_{yy} + (U + V)q &= 0 \\ U &= \int_{-\infty}^y (|q|^2)_x dy + u(x, t) \\ V &= \int_{-\infty}^x (|q|^2)_y dx + v(y, t)\end{aligned}\tag{1.1}$$

は、2+1 次元における可積分方程式の 1 つであり、空間的な局在構造を示す解を持つ。その解はドロミオンと呼ばれ、逆散乱法、直接法などによって導出されているものである [3, 4]。一般に空間 1 次元の可積分方程式の場合、一般の初期条件のもとでの系の時間発展は、Lax 方程式から得られる固有値問題を解くことによって完全に理解することができる。それは、初期パルスをポテンシャルとする散乱問題の固有値問題であり、系の時間発展は、ある初期条件のもとで、完全に解けることになる。

それに対して DS1 方程式は、Lax 対が存在するものの、それから得られる固有値問題は、一般には複雑で簡単には取り扱うことができない。したがって、厳密解とは一致しないような初期波形の解析は、一般には難しく、あまり知られていないのが現状である。DS1 方程式の初期値問題の解析には、初期波形

$$q(x, y, t = 0)$$

の他に、(1.1) における境界条件

$$u(x, t), \quad v(y, t)$$

が重要な役割を果たす。講演者は、DS1 方程式に対するさまざまな条件下での数値解析や、厳密解の解析を行ない、以下の点を明らかにした [5, 6, 7]。

- 場  $U, V$  は, 方程式 (1.1) において, シュレディンガー方程式のポテンシャルとしての役割を果たす. 特にこれらの場が正值をとるときは, 引力ポテンシャルとして働き,  $q$  の波束を吸引する効果がある.
- $t \rightarrow \infty$  の漸近的な解の振る舞いは, 境界条件  $u, v$  の孤立パルスによって保たれる. これは, 厳密解でないような初期条件, 境界条件を与えたときでも同様である.
- 境界条件がガリレイ不変な形で, 初期波形が  $q(x, y, 0) = F(x)G(y)$  のように変数分離可能であるとき, 系の漸近的な振る舞いを完全に記述することができる.

本稿では, 以上のような結果を踏まえたうえで, これまでに知られている DS1 方程式 (1.1) の解とは異なる型の解を求めることを目的とする. たとえば, シュレディンガー方程式のポテンシャルとしての役割を果たす境界条件が引力ポテンシャルであるときは, 場  $U, V$  が引力最大に対応する点に場  $q$  の波束が吸引されてその局在構造が保たれる.  $U, V$  を境界においてドライブすることにより, それにひきずられる形で  $q$  の局在構造が 2 次元平面を運動することになる. 一方, それ以外の一般的な, 例えば斥力型ポテンシャルなどの場合に対して局在構造を示すような解は存在しないだろうか. また, 存在するとすれば, 安定性などのパルスの特性はどのようなものであるのかを確かめることも重要であると思われる.

次の節では, DS1 方程式の初期値問題を簡単に解説する. 第 3, 4 節では境界条件を設定したときの固有値問題とその結果を利用した新しい解の可能性について述べる. 最後に全体のまとめを行ない, 今後の展望についてまとめる.

## 2 DS1 方程式の初期値問題

ここでは, Fokas と Santini によって与えられた, DS1 方程式の逆散乱法での取り扱いを簡単にまとめる [4]. DS1 方程式 (1.1) の Lax 対は, 次式で与えられる.

$$\begin{aligned}
 L_1 &= D + Q, & L_2 &= i\partial_t + J(\partial_x - \partial_y)^2 - 2Q(\partial_y - \partial_x) + W, \\
 J &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, & Q &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & q \\ -q^* & 0 \end{pmatrix}, \\
 W &= \begin{pmatrix} V & -\sqrt{2}q_y \\ -\sqrt{2}q_x^* & -U \end{pmatrix}, & D &= \begin{pmatrix} \partial_x & 0 \\ 0 & \partial_y \end{pmatrix}.
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

これらの  $L_1, L_2$  を用いて, DS1 方程式は

$$[L_1, L_2] = 0 \tag{2.2}$$

と書くことができる. この Lax 対に対応する  $2 \times 2$  の行列 Jost 関数を

$$L_1 M(x, y; k) \begin{pmatrix} e^{iky} & 0 \\ 0 & e^{-ikx} \end{pmatrix} = 0 \quad (k \text{ はスペクトルパラメタ}) \tag{2.3}$$

をみたすものとして定義する。いま、 $q$  をポテンシャルとして式 (2.3) から定められる散乱問題を考えると、 $S, T$  を散乱データとして漸近解の表現として次のような式を得る。

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} M_{11} \\ M_{21} \end{pmatrix} (k) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \int_{-\infty}^{\infty} dl e^{-i(l\xi+kn)} T(k, l) \begin{pmatrix} M_{12} \\ M_{22} \end{pmatrix} (l) \\ \begin{pmatrix} M_{12} \\ M_{22} \end{pmatrix} (k) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \int_{-\infty}^{\infty} dl e^{i(l\xi+kn)} S(k, l) \begin{pmatrix} M_{11} \\ M_{21} \end{pmatrix} (l) \end{aligned} \quad (2.4)$$

このような Jost 関数のうち、複素スペクトルパラメタ平面上の上半平面への解析接続を、 $M^-$  のように、肩に「-」をつけて表すと、DS1 方程式 (1.1) の解  $q(x, y)$  は

$$q(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} dl e^{kx+ly} S(k, l) M_{11}^-(l) \quad (2.5)$$

で表すことができる。散乱データを求めるには、そのフーリエ逆変換

$$\hat{S}(x, y, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} dl e^{i(kx+ly)} S(k, l)$$

を考えればよい。(1.1) により、 $\hat{S}$  は 2次元のシュレディンガー方程式

$$i\hat{S}_t + \hat{S}_{xx} + \hat{S}_{yy} + (u+v)\hat{S} = 0 \quad (2.6)$$

をみたす。ここで、 $u, v$  が時間的に変化しないものとする、 $\hat{S} = T(t)X(x)Y(y)$  と変数分離することができ、スツルム=リュービル固有値問題

$$\frac{dT}{dt} = i(m^2 + n^2)T, \quad \frac{d^2X}{dx^2} + uX = m^2X, \quad \frac{d^2Y}{dy^2} + vY = n^2Y \quad (2.7)$$

を考えればよいことになる。これは、 $u, v$  をポテンシャル、 $m, n$  を固有値とする散乱問題である。一般に離散固有値と連続固有値が得られるが、 $t \rightarrow \infty$  においては、離散固有値に依存する項が残り、

$$\hat{S}(x, y, t) \sim \sum_{p=1}^N \sum_{q=1}^M \rho_{pq} X_p(x) Y_q(y) e^{i(m_p^2 + n_q^2)t} \quad (2.8)$$

という漸近形をもつ。ここで、 $m_p, n_q$  は固有値、 $X_p, Y_q$  は規格化された固有関数、 $\rho_{pq}$  は結合定数で、

$$\rho_{pq} = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \hat{S}(x, y) X_p^*(x) Y_q^*(y)$$

で得られる。以上の結果を (2.5) に代入することで、解  $q(x, y)$  を得ることができる。この解では、それぞれの固有値が局在パルスに対応している。ここで明らかのように、局在解にとって重要なものは、初期条件よりもむしろ、場  $U, V$  の境界条件であり、この点が 1次元のソリトン方程式と際だって異なっている点である。

### 3 初期条件と DS1 方程式の局在解

前節で、DS1 方程式の逆散乱の大枠を概観したが、ここで実際に初期条件が与えられたときの取り扱いを見てみよう [6, 7].

$$A(x, y; k) = M_{12}e^{-ikx}, \quad B(x, y; k) = M_{22}e^{-ikx}$$

と定義すると、固有値方程式 (2.3) により、

$$\frac{\partial A}{\partial x} = -\frac{1}{\sqrt{2}}q(x, y, 0)B, \quad \frac{\partial B}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{2}}q^*(x, y, 0)A \quad (3.1)$$

を得る. Jost 関数の境界条件を考え、散乱データと解の関係を用いると、 $t=0$ における散乱データのフーリエ逆変換  $\hat{S}(x, y)$  は、

$$\hat{S}(x, y, t=0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx} A(x \rightarrow -\infty, y; k)$$

と表すことができる.  $\hat{S}$  の時間発展は前節ですでに求めたから、場  $q$  の初期条件  $q(x, y, 0)$  に対して (3.1) の解を求めることができれば、DS1 方程式 (1.1) の初期値問題が完全に解けることになる.

ここで、 $q(x, y, 0)$  が、次のように変数分離される形であると仮定する.

$$q(x, y, 0) = cF_1(x)F_2(y), \quad (c \text{ は定数}) \quad (3.2)$$

このとき、(3.1) は、独立変数および従属変数の変換により定数係数の方程式

$$P_{\xi\eta} - \frac{|c|^2}{2}P = 0, \quad A = F_2P, \quad B = -\frac{\sqrt{2}P_x}{F_1c}, \quad \xi = \int_x^{\infty} F_1^2 dx, \quad \eta = \int_{-\infty}^y F_2^2 dy \quad (3.3)$$

に変形される. この方程式は、ちょうど虚数の質量をもつクライン=ゴールドン方程式と同じ形である. 方程式 (3.3) のグリーン関数は

$$G(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0) = -\theta(\xi - \xi_0)\theta(\eta - \eta_0)I_0 \left( |c|\sqrt{2(\xi - \xi_0)(\eta - \eta_0)} \right)$$

ただし、 $\theta$  はヘビサイドの階段関数、 $I_0$  は 0 次の第 1 種変形ベッセル関数で、

$$I_0(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^{2j}}{2^{2j}(j!)^2}$$

$A$ 、すなわち  $P$  に対する境界条件を考慮すると、

$$A(x, y; k) = \frac{cF_2(y)}{\sqrt{2}} \int_x^{\infty} dx' e^{-ikx'} F_1(x') I_0 \left( |c|\sqrt{2 \int_x^{x'} dt F_1^2(t) \int_{-\infty}^y dt F_2^2(t)} \right)$$

この結果、初期パルスが (3.2) のように書き表される場合の初期値問題が完全に解けた.

さて、ここで例として、厳密解である 1-ドロミオン解に出現する境界条件

$$u(x, t) = \frac{2\lambda^2}{\cosh^2(\lambda x)}, \quad v(y, t) = \frac{2\mu^2}{\cosh^2(\mu y)} \quad (3.4)$$

を考えてみよう。この条件を固有値方程式 (2.7) に代入して固有値と固有関数を求めると、離散固有値

$$m = i\lambda, \quad n = i\mu, \quad X = \frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{2} \cosh(\lambda x)}, \quad Y = \frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{2} \cosh(\mu y)} \quad (3.5)$$

を得る。これらはそれぞれ (2.7) の第 2, 3 式の単一固有値、固有関数であるから、 $t \rightarrow \infty$  における解の漸近形は 1 パルスを表すことになる。この様子を図示すると、場  $U, V$  のピークが重なり合う部分に  $q$  のパルスが形成されていくことになる (下図)。講演者は初期条件がガウスの正規分布型の関数

$$q(x, y, 0) = ce^{-a^2(x^2+y^2)}$$

の初期条件に対して数値計算を行ない、ドロミオン解に一致する漸近パルスの出現を確かめた。

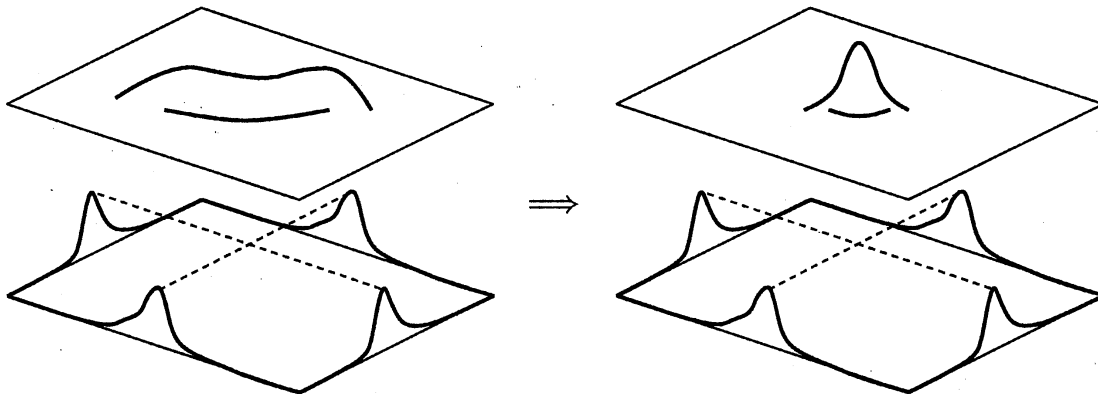


図 1: 1 ドロミオン境界条件下での初期波形の漸近的な振る舞いの模式図。場  $U, V$  の交点に場  $q$  の局在構造が引き付けられて最終的にパルスが形成される。終パルスの大きさは、主に初期条件によって決まる。

## 4 斥力型境界条件の下での解

以上のようにして、DS1 方程式の初期値問題を解くことができるが、ここで、斥力ポテンシャル型の境界条件を考えてみよう。これまでの、引力ポテンシャルとして振る舞う場  $U, V$  に、 $q$  の波が引き付けられて局在構造を保つという描像から考えると、単一ピークの斥力ポテンシャルに対しては、このような状況は実現しにくいと考えられる。斥力ポテンシャルからは、場  $q$  の局在構造が離れていくからである。しかし、たとえば斥力ポテンシャルの谷間にあるような場合、両方の斥力ポテンシャルから反発を受けるため、ある程度安定な局在構造が存在する可能性があると考えられる。ここでは、前節までの結果を利用して、このようなパルスを作ってみよう。

まず、斥力境界条件は時間的に変化せず、次のような箱型のものであると考える：

$$u(x) = \begin{cases} 0 & (|x| < L) \\ \infty & (|x| > L) \end{cases}, \quad v(y) = \begin{cases} 0 & (|y| < L) \\ \infty & (|y| > L) \end{cases} \quad (4.1)$$

このとき、固有状態は三角関数を用いて表すことができ、

$$X_p = \left\{ \cos \left[ \left( p - \frac{1}{2} \right) \frac{\pi x}{L} \right], \sin p\pi x \right\}_{p=1,2,\dots}, \quad m_p = \left( p - \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{L} \quad (4.2)$$

で、離散固有値は無数個存在する。 $Y_q$  も同様である。

このような固有関数に対して解を構成しよう。式 (3.2) のような場合、実空間における散乱データの初期値  $\hat{S}(x, y, 0)$  は

$$\hat{S}(x, y, 0) = \frac{cF_1(x)F_2(y)}{\sqrt{2}} I_0 \left( |c| \sqrt{2 \int_{-\infty}^x dt F_1^2(t) \int_{-\infty}^y dt F_2^2(t)} \right) \quad (4.3)$$

で表される。一般の時刻  $t$  での  $\hat{S}$  は、

$$\hat{S}(x, y, t) = \sum_{p,q} \rho_{p,q} X_p e^{im_p^2 t} Y_q e^{in_q^2 t}, \quad \rho_{p,q} = \int_{-L}^L dx \int_{-L}^L dy X_p(x) Y_q(y) \hat{S}(x, y, 0)$$

となる。このとき、波数空間での散乱データ  $S(k, l, t)$  をフーリエ変換によって求めると、 $S$  は次のように「縮退した」形となる。

$$S(k, l, t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{p,q} \rho_{p,q} \int_{-\infty}^{\infty} dx X_p e^{im_p^2 t - ikx} \int_{-\infty}^{\infty} dy Y_q e^{in_q^2 t - ily} \equiv \sum_j T_j(k) T_k(l),$$

$$T_j(k) = \sum_p \frac{|c|^j \sqrt{|c|}}{j! \sqrt{2} \sqrt{2^{j+1} \pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx X_p(x) e^{im_p^2 t - ikx} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} dx F_1(x) X_p^*(x) \int_{-\infty}^{\infty} dx' F_1^2(x')$$

この場合、Lax 方程式は適当な変数変換の下で代数方程式に帰着される。 $T_j(k)$  のフーリエ変換を  $\sigma_j(p)$  で表し、

$$\alpha_{kj} = \int_{-\infty}^{\xi} dp \sigma_k^*(p) \sigma_j(p) \quad \beta_{kj} = - \int_{-\infty}^{\eta} dp \sigma_k(p) \sigma_j^*(p)$$

で新しい量を導入すると,

$$\mathbf{F}_j - \sum_{i=1}^{\infty} \beta_{ji} \mathbf{G}_i = \begin{pmatrix} \sigma_j \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G}_j - \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_{ji} \mathbf{F}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \sigma_j^* \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

ただし,  $\mathbf{F}, \mathbf{G}$  はそれぞれ

$$\mathbf{F}_j = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dl e^{il\eta} T_j(l) \begin{pmatrix} M_{11}^- \\ M_{21}^- \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G}_j = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dl e^{-il\eta} T_j^*(l) \begin{pmatrix} M_{12}^+ \\ M_{22}^+ \end{pmatrix}$$

で定義されるものである ( $M$  の肩の  $+$  は, 下半平面への解析接続であることを示す).

さてここで, 与えられた初期条件に対する  $q$  を求めよう. (4.3) での変形ベッセル関数を, 初期波形の振幅が小さいと仮定して展開し, 最低次の項を残して計算すると,

$$\sum_j \frac{2\sigma_j(\xi)\sigma_k(\eta)}{1 + \alpha_j\beta_k}$$

となる. この式により, 求めるべき解を初期条件のパラメーターで表すことが可能となった. 初期パルス例として, 次のような関数を考えよう (図 2):

$$q(x, y, 0) = c \cos^2 ax \cos^2 ay, \quad a \equiv \frac{2\pi}{L} \quad (4.5)$$

この初期条件に対して  $\alpha_j, \beta_j, \sigma_j$  を計算して (4.5) の表式を計算し, 図示すると, 下記図 3 のようになる.

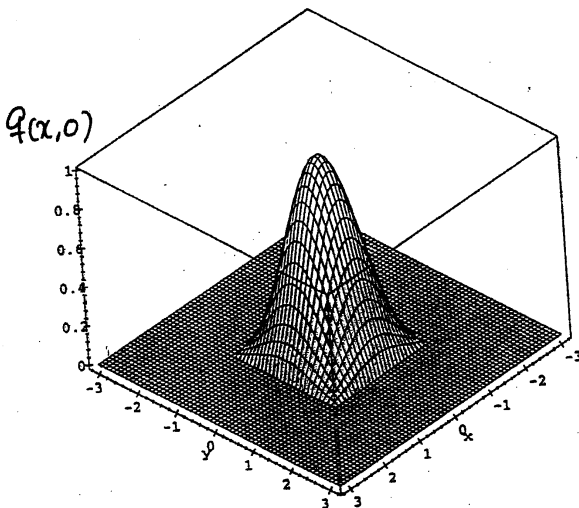


図 2

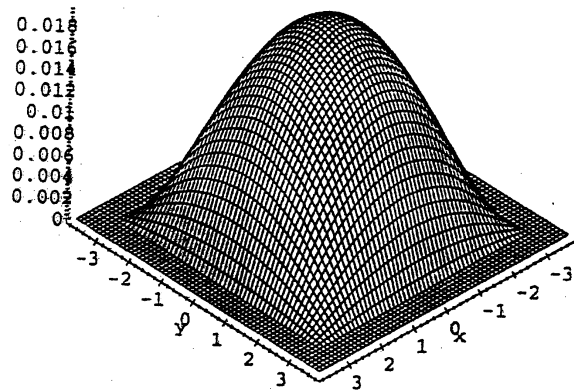


図 3

図3においては、ポテンシャルの箱の中で、なだらかなパルス状の漸近波形が示されている。斥力型ポテンシャルが壁状に切り立ったものであることを想起すると、漸近波形はポテンシャルの中にもう少し一様に分布すべきではないかと予想されるが、これは、ベッセル関数を近似したことによる変形であると考えられる。

## 5 まとめ

本稿では、すでに求められた DS1 方程式の描像に入らないような、新しい解の可能性を考察してきた。ここでは、特殊な例ではあるが、斥力ポテンシャルの箱の中に閉じ込められた局在構造が成立し得ることを示した。これは、従来知られてきたドロミオンの局在構造の束縛方法とは本質的に異なるものである。

このような斥力ポテンシャルに付随した局在構造は、より一般の条件下においては、その特徴などについてはあまり明らかにはなっていない。DS1 方程式は、プラズマ中や流体などでの非線形表面波をよく記述する方程式として知られているが、前節で考察した条件に対応する場合として、媒質中に摂動では扱い切れないような不純物・障害物などがあるような状況が考えられる。実際の場合に即してこのような状況を考えるとき、 $u, v$  が有限高、有限幅の斥力ポテンシャルである可能性を考慮する必要があるであろう。しかしながら、このようなポテンシャルに対しては、波動関数の浸み出しが発生し、 $q$  のパルスが減衰していくことが予想される。応用上の観点からは、このような場合のパルスの安定性などを考察することは、非常に意義深いものがある。また、連続固有値が果たす役割についてもきちんと議論する必要があるだろう。また、状況に応じて、数値計算などによる評価を行なっていく必要があると思われる。

## 参考文献

- [1] D. J. Benny and G. J. Roskes. *Stud. Appl. Math.* **48** (1969) 377.
- [2] A. Davey and K. Stewartson. *Proc. Roy. Soc. London Ser. A*, **338** (1974) 101.
- [3] M. Boiti, J. J.-P. Leon, L. Martina and F. Pempinelli. *Phys. Lett. A*, **132** (1988) 432.
- [4] A. S. Fokas and P. M. Santini. *Physica D* **44** (1990) 99.
- [5] K. Nishinari and T. Yajima. *Phys. Rev. E* **51** (1995) 4986.
- [6] K. Nishinari, T. Yajima and T. Nakao. *J. Phys. A* **29** (1996) 4237.
- [7] T. Yajima and K. Nishinari. *J. Phys. Soc. Jpn.* **67** (1998) 1157.