数理解析研究所講究録
1092巻 1999年 133-139

$N\times N$ 線形系に付随する Darboux 共変なソリトン方程式

名古屋大理　今井 健二（Kenji Imai）

§1. Introduction

非線形 Schrödinger (NLS) 方程式, modified K-dV (m-KdV) 方程式などソリトン方程式の多くは, ある種の線形方程式系と等価であることが知られている. この性質は, 線形方程式に対する幾つかの性質, 例えば, 逆散乱問題や gauge 変換, Darboux 変換といった対称性等と結びつけることによって, ソリトン方程式を解くことに利用されてきた [1][2].

そこで本講演ではこの性質に着目し, 以下の手順で線形方程式からソリトン方程式の系統的導出を行うことを考える.

(1) まず一般化された $N\times N$ 行列型の線形方程式系を導入する. この方程式系が解を持つための条件（積分可能条件という）がソリトン方程式に対応している. しかし, この段階ではまだ閉じた方程式は得られない.

(2) **(1)** の積分可能条件が閉じるための制限として, Darboux 変換に対する共変条件を課す.

(3) **(2)** の制限の下で **(1)** を計算して, ソリトン方程式を導く.

$N=2$, 即ち 2×2 線形系を用いる場合は, この方法は既に幾つかの成功がおさめられている [4][5][6]. 本講演では一般の N へと拡張する.

以下, その手順及び結果を順に述べる.

§2. $N \times N$ 線形系と Darboux 変換

まず, 以下のような $N \times N$ 行列型の線形方程式系を導入する.

$$\psi_{,\,x} = \sum_{k=-\overline{K}}^{K} U_k \lambda^k \psi, \qquad \psi_{,\,t} = \sum_{l=-\overline{L}}^{L} V_l \lambda^l \psi. \tag{1}$$

ここで, $\psi \equiv {}^t(\phi_1,\ \phi_2,\ \cdots,\ \phi_N)$ は $N-$固有ベクトル, $\lambda \in \mathbf{C}$ は固有値, U_k, V_l は $N \times N$ 係数行列, K, $\overline{K}$, L, $\overline{L}$ は非負整数とする.

線形方程式系 (1) の中の 2 式が同時に解を持つためには, 係数行列が積分可能条件

$$U_{k,\,t} - V_{k,\,x} + \sum_m [U_m,\ V_{k-m}] = 0 \tag{2}$$

を満足しなければならない ($[U,\ V] \equiv UV - VU$). 一般に, 関係式 (1) には不定性があり, 閉じた方程式ではない. 係数行列を適当に選んだときのみ, 式 (1) は閉じた方程式（例えば, ソリトン方程式）となる. 従って, 線形方程式系 (1) をソリトン方程式と関係づけるためには, 係数行列に何らかの制限が必要になる. 本研究では, この制限を Darboux 変換を用いて導入する.

次に, 線形系 (1) に対する Darboux 変換（DT）$(\psi,\ U_k,\ V_k) \mapsto (\psi^{(1)},\ {U_k}^{(1)},\ {V_k}^{(1)})$ は以下のように定義される.

$$\psi^{(1)} \equiv \lambda\psi - \sigma\psi, \tag{3}$$

$$\begin{aligned} &{U_K}^{(1)} = U_K, \quad {U_{K-1}}^{(1)} = U_{K-1} - [U_K,\ \sigma], \\ &{U_{K-2}}^{(1)} = U_{K-2} - [U_{K-1},\ \sigma] - [U_K,\ \sigma]\sigma, \cdots \quad , \\ &{U_{-\overline{K}}}^{(1)} = \sigma U_{-\overline{K}} \sigma^{-1} \end{aligned} \tag{4}$$

（${V_k}^{(1)}$ は ${U_k}^{(1)}$ と同様になる）. ここで $N \times N$ 行列 σ は, 線形方程式系 (1) の N 個の独立な解 $\phi_j = {}^t(\phi_{j1},\ \phi_{j2},\ \cdots,\ \phi_{jN})$ と

対応する固有値 λ_j $(j = 1,\ 2,\ \cdots,\ N)$ を用いて以下のように与えられる.

$$\sigma \equiv \Psi_1 \Lambda_1 {\Psi_1}^{-1},$$
$$\Psi_1 \equiv \begin{pmatrix} \phi_{11} & \phi_{21} & \cdots & \phi_{N1} \\ \phi_{12} & \phi_{22} & \cdots & \phi_{N2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \phi_{1N} & \phi_{2N} & \cdots & \phi_{NN} \end{pmatrix},$$
$$\Lambda_1 \equiv \mathrm{diag}[\lambda_1,\ \lambda_2,\ \cdots,\ \lambda_N].$$

線形系 (1) は DT (3), (4) に対して共変である, つまり

$$\psi^{(1)}{}_{,\,x} = \sum_{k=-\overline{K}}^{K} {U_k}^{(1)} \lambda^k \psi^{(1)}, \qquad \psi^{(1)}{}_{,\,t} = \sum_{l=-\overline{L}}^{L} {V_l}^{(1)} \lambda^l \psi^{(1)}$$

を満足する. DT は線形方程式の対称性の中でも, ソリトン方程式と密接に結びついていることが知られている. 即ち, 係数行列の変換 (4) が soliton 解を与えるのである [2]. また Bächlund 変換との関連も議論されている [3].

そこで本研究では, 線形系 (1) の係数行列に「DT に対する共変条件」を課すことにする. 従って以下では, DT に対する不変量（例えば, U_K）を定数と置いて, 係数行列を確定する.

§3. 多成分型のソリトン方程式の導出

本講演では, $K = 1, \overline{K} = 0$ の場合を考える. 線形系 (1) の第 1 式の係数行列 U_1, U_0 は

$$U_1 = \mathrm{diag}[\underbrace{d^1,\ \cdots,\ d^1}_{N_1\text{個}},\ \underbrace{d^2,\ \cdots,\ d^2}_{N_2\text{個}},\ \cdots,\ \underbrace{d^\nu,\ \cdots,\ d^\nu}_{N_\nu\text{個}}],$$

$$U_0 = \left(\begin{array}{c|c|c|c} Q^{11} & Q^{12} & \cdots & Q^{1\nu} \\ \hline Q^{21} & Q^{22} & \cdots & Q^{2\nu} \\ \hline \vdots & \vdots & & \vdots \\ \hline Q^{\nu 1} & Q^{\nu 2} & \cdots & Q^{\nu\nu} \end{array}\right).$$

と与えることができる. ここで $N_1 + N_2 + \cdots + N_\nu = N$, d^j は定数（ただし $i \neq j$ のとき $d^i \neq d^j$）, Q^{ij} は $N_i \times N_j$ ブロック行列である $(i,\ j = 1,\ 2,\ \cdots,\ \nu)$. このとき対角ブロック行列 Q^{ii} は DT 不変量になるので, $Q^{ii} = \mathrm{const.} = 0$ と置く.

線形系 (1) の第 2 式の係数行列 V_n については, 以下の 2 つの場合が考えられる. まず, A^j, B^j, $\cdots$ を $N_j \times N_j$ 行列かつ $A^j = \mathrm{const.}$ $(j = 1,\ 2,\ \cdots,\ \nu)$ として,

$$V_L = \left(\begin{array}{c|c|c|c} A^1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & A^2 & \cdots & 0 \\ \hline \vdots & \vdots & & \vdots \\ \hline 0 & 0 & \cdots & A^\nu \end{array}\right), V_{L-1} = \left(\begin{array}{c|c|c|c} B^1 & * & \cdots & * \\ \hline * & B^2 & \cdots & * \\ \hline \vdots & \vdots & & \vdots \\ \hline * & * & \cdots & B^\nu \end{array}\right), \cdots$$

の形で与えることができる. ただしブロック分割の仕方は U_0 の場合と同じである. このとき,

case 1: a^j, b^j, $\cdots$ を定数として, A^j, B^j, $\cdots$ を以下のように与える.

$$A^j = \mathrm{diag}[a^j,\ \cdots,\ a^j],\ B^j = \mathrm{diag}[b^j,\ \cdots,\ b^j], \cdots.$$

case 2: A^j, B^j を一般の $N_j \times N_j$ 行列としてそのまま扱う.

以下, 上の 2 つの場合について積分可能条件 (2) を計算した結果を報告する.

3.1 *case 1*

$L \leq 3, \overline{L}=0$ のとき以下の非線形方程式が得られる.

$$
\begin{aligned}
Q^{ij}_{,\,t} = & \sum_k \sum_l \sum_m a^{iklmj} Q^{ik} Q^{kl} Q^{lm} Q^{mj} \\
& \quad + \sum_k \sum_l \{ a^{ikljj} Q^{ik} Q^{kl} Q^{lj}_{,\,x} + \overline{a}^{iklj} Q^{ik} Q^{kl}_{,\,x} Q^{lj} \\
& \qquad\qquad - a^{iiklj} Q^{ik}_{,\,x} Q^{kl} Q^{lj} \} \\
& \quad + \sum_k \{ a^{ikjjj} Q^{ik} Q^{kj}_{,\,xx} - a^{iikjj} Q^{ik}_{,\,x} Q^{kj}_{,\,x} + a^{iiikj} Q^{ik}_{,\,xx} Q^{kj} \} \\
& \quad + a^{ijjjj} Q^{ij}_{,\,xxx} \\
& + \sum_k \sum_l b^{iklj} Q^{ik} Q^{kl} Q^{lj} \\
& \quad + \sum_k \{ b^{ikjj} Q^{ik} Q^{kj}_{,\,x} - b^{iikj} Q^{ik}_{,\,x} Q^{kj} \} + b^{ijjj} Q^{ij}_{,\,xx} \\
& + \sum_k c^{ikj} Q^{ik} Q^{kj} + c^{ijj} Q^{ij}_{,\,x}
\end{aligned} \tag{5}
$$

ここで a^{iklmj}, $\overline{a}^{iklj}$, b^{iklj}, c^{ikj} は定数 a^j, b^j, c^j 及び d^j を用いて構成される定数係数である. 記号 "a" は $L=3$ に, "b" は $L=2$ に, "c" は $L=1$ に対応する. また $\sum_k$ は $k=1, 2, \cdots, \nu$ の和である.

特に, $\nu=2$ (2ブロック) のとき $Q_{12}=Q$, $Q_{21}=R$ とおくと, 方程式 (5) は matrix NLS-mKdV 方程式

$$
\begin{aligned}
Q_{,\,t} = & \frac{a^1-a^2}{(d^1-d^2)^3}\{-3(QRQ_{,\,x}+Q_{,\,x}RQ)+Q_{,\,xxx}\} \\
& + \frac{b^1-b^2}{(d^1-d^2)^2}\{-2QRQ+Q_{,\,xx}\} + \frac{c^1-c^2}{d^1-d^2}Q_{,\,x}, \\
R_{,\,t} = & \frac{a^2-a^1}{(d^2-d^1)^3}\{-3(RQR_{,\,x}+R_{,\,x}QR)+R_{,\,xxx}\} \\
& + \frac{b^2-b^1}{(d^2-d^1)^2}\{-2RQR+R_{,\,xx}\} + \frac{c^2-c^1}{d^2-d^1}R_{,\,x}
\end{aligned}
$$

に帰着される [7]. また $L=1, \nu \geq 3$ のとき matrix 型の N 波共鳴相互作用方程式

$$Q^{ij}_{,\,t} = \sum_k \{\frac{c^i - c^k}{d^i - d^k} - \frac{c^k - c^j}{d^k - d^j}\} Q^{ik} Q^{kj} + \frac{c^i - c^j}{d^i - d^j} Q^{ij}_{,\,x}$$

に帰着される [8].

3.2 *case 2*

簡単のため $L=2, \overline{L}=0$ かつ $\nu=2$（2ブロック）の場合を考える. このとき以下の閉じた非線形方程式が得られる.

$$\begin{aligned} Q^{ij}_{,\,t} &= \gamma^{ij}\gamma^{ij}(A^i Q^{ij} - Q^{ij} A^j)_{,\,xx} \\ &\quad + \gamma^{ij}(B^i Q^{ij} - Q^{ij} B^j)_{,\,x} + C^i Q^{ij} - Q^{ij} C^j, \\ B^i_{,\,x} &= \gamma^{ij}[Q^{ij} Q^{ji}, A^i], \\ C^i_{,\,x} &= \gamma^{ij}\gamma^{ij}\{(Q^{ij} A^j Q^{ji})_{,\,x} - A^i Q^{ij}_{,\,x} Q^{ji} - Q^{ij} Q^{ji}_{,\,x} A^i\} \\ &\quad + \gamma^{ij}[Q^{ij} Q^{ji}, B^i] \end{aligned} \tag{6}$$

$(i,\, j = 1 \text{ or } 2)$. ここで A^i, B^i, C^i は $N_i \times N_i$ 行列で, $A^i = \text{const.}$ かつ $\gamma^{ij} = (d^i - d^j)^{-1}$. 非線形方程式 (6) は $N=3$ の場合に, 以下のような 2 変数 $q_1,\, q_2$ に対する新しい方程式を特殊な例として含んでいる（ここではこれを nonlocal coupled NLS 方程式と呼ぶ事にする）.

$$\begin{aligned} q_{1,\,t} &= \mathrm{i}a\{q_{1,\,xx} - 2\kappa(|q_1|^2 + |q_2|^2)q_1\} + b_1 q_{1,\,x} + c q_2, \\ q_{2,\,t} &= \mathrm{i}a\{q_{2,\,xx} - 2\kappa(|q_1|^2 + |q_2|^2)q_2\} + b_2 q_{2,\,x} - c^* q_1, \\ c_{,\,x} &= \kappa(b_2 - b_1) q_1 {q_2}^*. \end{aligned} \tag{7}$$

ここで a, b_1, b_2 は実定数, $\kappa = \pm 1$, $*$ は複素共役を表す. この方程式の線形項について見てみると, 郡速度は異なる $(b_1 \neq b_2)$

が, 分散が同じ（a）であることを表している. 従って, 分散関係式 $\omega = ak^2 + a_1 k + a_2$ を持つ物理系における波数の異なる2波の相互作用と考えられる. また非線形項について見てみると, まず補助変数 c を除けば通常の coupled NLS 方程式と同じである. c は方程式 (7) の第3式を x について積分して消去することができるので, 非局所的な非線形性を表している.

参考文献

[1] M. J. Ablowitz and P. A. Clarkson: Solitons, Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scattering (Cambridge University Press, Cambridge, 1991).

[2] V. B. Matveev and M. A. Salle: Darboux Transformations and Solitons (Springer-Verlag, Belin Heidelberg, 1991).

[3] M. Wadati, H. Sanuki and K. Konno: Prog. Theor. Phys. **53** (1975) 419.

[4] H. Hayashi and K. Nozaki: J. Phys. Soc. Jpn. **63** (1994) 27.

[5] K. Imai: J. Phys. Soc. Jpn. **67** (1998) 1811.

[6] K. Imai: to be published in J. Phys. Soc. Jpn. (1999).

[7] T. Tsuchida and M. Wadati: J. Phys. Soc. Jpn. **67** (1998) 1175.

[8] M. J. Ablowitz and R. Haberman: J. Math. Phys. **16** (1975) 2301.