

水の波—short-crested waves and standing waves

九大応力研 岡村 誠 (OKAMURA Makoto)

standing wave (定在波) と short-crested wave について, これまでに行なわれてきた研究を簡単にまとめてみる. ただし, 定在波と short-crested wave で研究されていること全般ではなく, 特に波形を求めるときに高精度が要求される極限波と高調波共鳴に関係した現象を中心¹ に述べる.

1 はじめに

ここでは非圧縮, 非粘性流体の渦なし運動を仮定している. 表面張力も無視している. つまり, 水の波の最も単純な状況を考える.

2 定在波

2.1 無限深さの定在波の波形

まず最初は, 深さ無限大の定在波の波形を求める方法から見ていこう. 非線形定在波を求める最も素朴な方法は, 速度ポテンシャルと表面変位を振幅展開して求める方法 [1, 2, 3] である. 展開パラメーターを波高 ϵ ($\equiv 2\pi \times$ 振幅/波長) とする. この方法は波高が小さい場合は様々な水の波の波形を求めるのに有効である.

¹ この解説ではぼくの仕事を中心に述べているので, 公平なレビューではないことを断っておきます.

Penney & Price[1]は速度ポテンシャルと表面変位を振幅の5次まで展開して、定在波の波形を求めた。また、圧力を表面上の峰の周りで2次まで冪級数展開して、ある時刻($t = 0$)での峰近傍での局所波形を求めた。そして、その時刻での峰の流体の加速度が重力加速度に等しくなるときに定在波は峰でとがり、その頂角は 90° になる²ことを示した。Taylor[4]は表面波形がとがるのに空間について冪級数展開をしていることに疑問をもち、定在波の実験を行なった。すると、極限定在波の頂角は 90° らしい結果であったが、以下の理由から納得がいかなかった。定在波では $t = 0$ ですべての流体が静止する。だから、任意の頂角の波形をもった静止した流体を拘束しておいて、突然、その拘束を解除した状態も上の局所解析の解のはずである。それなのに冪級数展開した解だけが実際の定在波の局所解になっている理由は何か？言い換えると、定在波が冪級数展開できる解を選択する理由は何か？というものである。

波高がそれほど大きくない場合は展開次数が小さくても波形を正確に求めることができる。波高が大きくなれば、展開次数を大きくしてやればよいと思うかもしれない。しかし、定在波を振幅展開で求める場合、収束半径が最大波高の半分くらい[3]なので、波高が最大波高の半分くらいになるといくら展開次数を大きくしても展開は収束しない。そこで、パデ近似による解法が登場する[3]わけだが、パデ近似を使ってもかなり波高が大きくなると定在波の波形を正確に計算できない。

Mercer & Roberts[5]は水面波を表面上に渦糸を分布させることによって近似し、表面上の渦糸を時間発展させて、時間周期性³の拘束条件から渦糸の強さをNewton法で決めて定在波を求めた。これは、以前の方法よりはるかに精度良く大振幅定在波が求まったが、計算スキームの中に

² これを極限定在波という。

³ 1周期後に同じ波形に戻る。

表面変位の空間微分を含んでいるので、極限に近くなると精度が悪くなり、極限定在波の頂角も 60° から 70° の間というような大まかな予想しかできていない。

さらに、最近では通常の運動学的境界条件の代わりに $DP/Dt = 0$ ⁴ を使う方法 [6, 7, 8] が開発された。速度ポテンシャルだけを振幅展開して、その展開係数を Newton 法で求める。これによってほぼ極限定在波が求まって、頂角はほぼ 90° であることが示されている。一方、これと同じ境界条件を使って、Penney & Price [1] の局所解析を時間にも拡張した局所解析を行なった理論的結果 [9] が上記の速度ポテンシャルだけを振幅展開して数値的に求めた結果ともよく一致している。これは、少なくとも頂角が 90° になり、(速度ポテンシャルには) 特異性のない極限定在波は存在する⁵ ことを示している。このことは、Taylor の疑問に直接は答えていないが、ぼくの予想は以下のものである。「極限定在波は $t = 0$ のみ、波形が尖り、 $t \neq 0$ では波形の尖りがなくなる波である。だから、 $t = 0$ で速度ポテンシャルに特異性のある解は、 $t \neq 0$ でも特異性があるので定在波の解としては不適切である。これが、 $t = 0$ で速度ポテンシャルに特異性のある解を排除する⁶ 理由である。」

2.2 有限深さの定在波の波形

有限深さの定在波は、無限深さの場合と同様な方法 [6, 12, 13, 14, 15] で求められる。有限深さの極限波の頂角については、その性質が局所的 [9] なものだから、無限深さの定在波と同じ、 90° となる。有限深さの定在波で重要な概念は高調波共鳴 [12] である。高調波共鳴は無限深さの定在波

⁴ P : 圧力.

⁵ 速度ポテンシャルは振幅展開されていることに注意.

⁶ 言い換えると、定在波が冪級数展開できる (速度ポテンシャルに特異性のない) 解を選択する

では現れないことを注意しておこう。深さに依存して、基本モードと共鳴する高調波モードがいろいろあるが、その中で最も強いのは無次元深さ $d_c = 0.62 \dots$ の時の (5,3) モード⁷ が共鳴する場合である。

有限深さの定在波で興味ある現象は、振幅展開法で普通に⁸ 求めた有限深さの定在波で、深さを無限大にした解と深さ無限大の定在波が一致しない [24] ことである。この現象では (4,2) モードが重要な役割をする。無限深さの時には (4,2) モードの大きさが 4 次にもかかわらず、6 次のところで⁹ その係数 A_{42} が決まる。つまり、4 次の段階では $A_{42} \times 0 = 0$ となつて、 A_{42} が決まらないのである。これは通常の高調波共鳴¹⁰ とは異なる。ところが、有限深さの時には、通常どおり、4 次のところで A_{42} が決まる。この事情より、有限深さの定在波と無限深さの定在波をつなぐ解は、深さが波長より十分大きいという情報を取り入れないと求まらない。

2.3 定在波の安定性

弱非線形定在波の線形安定性については Zakharov 方程式 [25] を使って調べて、進行波の場合にみられる変調不安定に加えて、右向きと左向きに進むモードの相互作用による定在波固有の不安定が存在する [10] ことがわかっている。大振幅定在波の線形安定性解析 [5] も行われており、進行波 (Stokes 波) [11] と同じようにエネルギー最大となる波高のところで不安定が現れる。

砕波現象をモデル化して、10 波長の定在波に微小攪乱が加わった波の時間発展を数値的に調べ、搬送波の振動数低下現象 [26] を再現してい

⁷ 波数が基本波数の m 倍、振動数が基本振動数の n 倍のモードを (m, n) モードという。

⁸ 深さが波長より十分大きいという情報を取り入れずに

⁹ m 次のモードの係数は、 m 次の段階で決まる。

¹⁰ 通常の高調波共鳴の場合には A_{42} の大きさを 4 次として計算すると、 $A_{42} \times 0 \neq 0$ となって矛盾する。つまり、 A_{42} は 4 次より大きいとしなければいけない。だから、例えば、 A_{42} を 1 次 (基本モードと同じ大きさ) として解を再構成する。

る。さらに時間が経過すると振動数再低下 [7] が起こる。

3 short-crested wave

3.1 short-crested wave の波形

short-crested wave とは線形理論の範囲では 2 次元進行波列 (Stokes 波) が、垂直な壁にある角度¹¹ θ で入射した時に、その入射波と反射波とが重なったところに行ける 3 次元波である。それは、形を変えずに進行する波であるが、Stokes 波と違って、横方向¹² に周期構造をもつ波で、3 次元波の中で最も簡単な波である。short-crested wave は $\theta = 0^\circ$ では定在波に、 $\theta = 90^\circ$ では Stokes 波になる。

short-crested wave は進行速度で動く座標系に移り、その座標系で振幅展開をして求めると、定在波と同様な振幅展開法が使える。これまでの無限深さの short-crested wave の解法は振幅展開 [16]、パデ近似 [17, 18] による方法で、あまり精度よく大振幅の波形が求められていなかった。定在波を精度良く求められた Mercer & Roberts [5] による方法は short-crested wave を求めるときには残念ながら使えない。最近、定在波での解法を拡張して、通常の変動学的境界条件の代わりに $DP/Dt = 0$ を使って short-crested wave を求める方法 [19] が開発された。これによると、 $\theta = 45^\circ$ のときには、極限に近い short-crested wave が求められ、ある断面で見ると頂角が Stokes 波の 90° を示し、別の断面で見ると定在波の 120° を示している。

有限深さの short-crested wave もパデ近似を使って、大振幅の波形が求められていて、最大波高を評価している。 [17]

¹¹ 入射波の進行方向と壁に垂直な方向とのなす角度。

¹² 進行方向に垂直な方向。

short-crested wave に特徴的なのは、1) 無限深さの場合でもほとんどすべての角度 θ で高調波共鳴が弱いながらも起こること; 2) 振幅展開法で普通に¹³ 求めた無限深さの short-crested wave ($0^\circ < \theta < 90^\circ$) で、 $\theta = 0^\circ$ や $\theta = 90^\circ$ としても、定在波や Stokes 波にならない [16, 18] ことである。

2) に関して一言述べておこう。 $\theta \rightarrow 0^\circ$ で定在波に近づく場合 [22] は θ が小さいという情報を、 $\theta \rightarrow 90^\circ$ で Stokes 波に近づく場合 [23] は $\theta - 90$ が小さいという情報を取り入れて解析して、short-crested wave と定在波・Stokes 波をつなぐ解が求められている。前者の解析では、(4,2) モードが重要な役割をする。このあたりの事情は普通に求めた有限深さの定在波と無限深さの定在波の関係と同じである。だから、 $\theta \rightarrow 0^\circ$ の short-crested wave と定在波とを結ぶ解を求めるには、まず、 θ が十分小さいという情報を入れて解を求める。すると、ある θ_c で、(4,2) モードが基本モードと共鳴する¹⁴ ことがわかるので、通常の高調波共鳴の解析によって解を求めるということになる。

3.2 short-crested wave の安定性

波高があまり大きくない short-crested wave の線形安定性については、理由はよくわからないが、 $\theta \approx 55^\circ$ で安定化するモードがある [20, 21] ということだけを述べておこう。波高が大きい場合の short-crested wave の線形安定性の研究はまだないようである。

¹³ θ が 0° や 90° に近いという情報を取り入れずに

¹⁴ ゼロに近い θ_c で、(4,2) モードが基本モードと共鳴することは、 $\theta = 0$ の定在波でも共鳴の影響を受けていてもいいはずだ。これが定在波を求めるとき、4 次のところで $A_{42} \times 0 = 0$ となって、 A_{42} が決まらない理由だろう。

参考文献

- [1] W. G. Penney & A. T. Price (1952) *Phil. Trans. R. Soc. London*, **A244**, 254–284.
- [2] H. Aoki (1980) *J. Phys. Soc. Jpn.*, **49**, 1598–1606.
- [3] L. W. Schwartz & A. K. Whitney (1981) *J. Fluid Mech.*, **107**, 147–171.
- [4] G. I. Taylor (1953) *Proc. Roy. Soc.*, **A218**, 44–59.
- [5] G. N. Mercer & A. J. Roberts (1992) *Phys. Fluids*, **A4**, 259–269.
- [6] C. P. Tsai & D. S. Jeng (1994) *Appl. Ocean Res.*, **16**, 185–193.
- [7] M. Okamura (1996) *Wave Motion*, **23**, 279–287.
- [8] 岡村 誠 (1997) 京大数理研講究録, **993**, 134–143.
- [9] M. Okamura (1998) *Wave Motion*, **28**, 79–87.
- [10] M. Okamura (1984) *J. Phys. Soc. Jpn.*, **53**, 3788–3796.
- [11] M. Tanaka (1983) *J. Phys. Soc. Jpn.*, **52**, 3047–3055.
- [12] I. Tadjbakhsh & J. B. Keller (1960) *J. Fluid Mech.*, **8**, 442–451.
- [13] J. -M. Vanden-Broeck & L. W. Schwartz (1981) *Phys. Fluids*, **24**, 812–815.
- [14] G. N. Mercer & A. J. Roberts (1994) *Wave Motion*, **19**, 233–244.
- [15] Y. Goda (1967) *Coastal Eng. in Jpn.*, **10**, 1–11.
- [16] J. R. C. Hsu, Y. Tsuchiya & R. Silvester (1979) *J. Fluid Mech.*, **90**, 179–196.

- [17] T. R. Marchant & A. J. Roberts (1987) *J. Austral. Math. Soc.*, **B29**, 103–125.
- [18] A. J. Roberts (1983) *J. Fluid Mech.*, **135**, 301–321.
- [19] 岡村 誠 (1998) 京大数理研講究録, **1030**, 173–179.
- [20] M. Ioualalen & C. Kharif (1994) *J. Fluid Mech.*, **262**, 265–291.
- [21] S. I. Badulin, V. I. Shrira, C. Kharif & M. Ioualalen (1995) *J. Fluid Mech.*, **303**, 297–326.
- [22] M. Okamura (1996) *J. Phys. Soc. Jpn.*, **65**, 2841–2845.
- [23] A. J. Roberts & D. H. Peregrine (1983) *J. Fluid Mech.*, **135**, 323–335.
- [24] M. Okamura (1997) *J. Phys. Soc. Jpn.*, **66**, 3801–3808.
- [25] V. E. Zakharov (1968) *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, **2**, 190–194.
- [26] B. M. Lake, H. C. Yuen, H. Rungaldier & W. E. Ferguson (1977) *J. Fluid Mech.*, **83**, 49–74.