数理解析研究所講究録
1093 巻 1999 年 15-20

一方向通貨交換問題における予測を用いたアルゴリズム

米澤 弘毅 (Kouki Yonezawa)* 岩間 一雄 (Kazuo Iwama)†
* 京都大学工学部情報学科
† 京都大学大学院情報学研究科

1 はじめに

オンライン金融問題における代表的戦略はいわゆる「脅威原理」に基づくものである. これは, 何時如何なる時点で脅威的な事態が生じても一定の利得を確保することを保証する戦略で, 別の言葉で言えば, 最悪の場合の結果を最善にすることを目的にした保守的で安全な戦略であると言える. これは, オンラインアルゴリズムの性能評価が競合比 (オフラインアルゴリズムの利得との比の最悪値) で計られることを考えれば自然なことではある. しかし, 実際的立場からは「面白み」に欠けるという指摘があることも確かである. この観点から, al-Binali は「ギャンブル性」の導入を提案した [2]. それは, 予測という概念の導入であり, 予測が当たればより良い結果が得られるが, 外れても脅威原理に基づく利得に比べて一定の減少のみに留まるというものである.

本稿で扱う金融問題は一方向通貨交換問題である. 一方向通貨交換問題とは, ある一定の期間, レートが変動していく中で, ドルから円への交換が許されているという条件下において, できるだけ多くの円を得ることを目標とする問題である [1]. この問題には, レートの変動が断続的に為される連続型モデルと, 期日が与えられ, その期日ごとにレートが一つだけ与えられるという離散型モデルがある. El-Yaniv らは, それぞれのモデルに対して競合比が有界であるオンラインアルゴリズムを設計し, それが最適なオンラインアルゴリズムであることを証明している [1].

[2] では, 離散型モデルに対して予測を導入したオンラインアルゴリズムを発表した. 交換レートに関する予測が正しければ良い競合比が得られ, 予測が間違っていても, 従来のアルゴリズムより少しだけ悪い値に抑えられるというアルゴリズムがある [2]. しかし, ここでの議論は単純な 1 回だけの予測の場合のみを論じているに過ぎず, またより現実的と考えられる連続型モデルに対する議論もされていなかった.

本研究では, 連続型モデルに対し, この予測行動の一般化を試みる. つまり, 予測の種類について, [2] で論じられているレートがある値を越えるという予測 (本論文では上予測と呼ぶ) の他に, レートがある値に達しないという下予測も許す. 更に 1 回だけの予測ではなく, ゲームが続いている限り 2 回 (以上) の予測も許す. これにより, 投資家の希望に応じて様々なパターンのアルゴリズムが設計できるようになった. 例えば, 予測が失敗しても, さらに新たな予測をすることによって, 従来のアルゴリズムでの結果を取り戻せる可能性があることもわかった. さらに, 両方向通貨交換問題について, レートの変動にある制限を加えたモデルにおいて, 同様に予測を用いたアルゴリズムを設計し, それが一方向通貨交換アルゴリズムに対して設計したアルゴリズムと比較して良い結果をもたらすことがわかった.

2 競合比

ある問題に対しては, 種々のオンラインアルゴリズムが構築されるが, その評価方法として, オンラインアルゴリズムとオフラインアルゴリズムの競合比 (Competitive Ratio) というものがある. これは次のようなものである.

ある問題 Σ に対し, 入力例を σ とし, また, 問題に対するあるオンラインアルゴリズムを A, 最適なオフラインアルゴリズムを OPT とする. また, σ に対して A の出力する解の利益を $perf_A(\sigma)$, OPT の出力する解の利益を $perf(\sigma)$ とすると, 競合比 r_A は, $\sup_{\sigma\in\Sigma}\frac{perf(\sigma)}{perf_A(\sigma)}$ で定義される [2]. これが 1 に近い程, 良いオンラインアルゴリズムであると言える.

3 通貨交換問題

3.1 一方向通貨交換問題

最初は一定額のドルのみを持っていて, ある期間内で, 連続的に変動していくレートの中で, ドルを円に交換することのみを許された条件下で, 最終的にできるだけ多くの円を得ることを目標とする問題である.

3.2 限定型両方向通貨交換問題

一般の両方向通貨交換問題は, ある期間内で, 連続して変動していくレートの中で, ドルと円の間の交換を許された条件下で, 最終的にできるだけ多くの円を得ることを目標とする問題である [1]. これに, レートの変動に関して制限を加える. その制限は, 次のようなものである.

「レートは初期値 m から始まり, そこから単調に M' $(m < M' \le M)$ まで増加し, 次の瞬間 m に落ち, 以後, レートはずっと m のままである. 」

この条件下で, できるだけ多くの円を得ることを目標とする問題, と定義する.

3.3 変数の定義

主な変数は以下の通りである.

- M : レートの最大値.
- m : レートの最小値. 簡単のため, レートの初期値は m とする.
- $D(x)$: レート x で持っているドルの値.
  初期値 $D(m) = 1$ とする.
- $Y(x)$: レート x で持っている円の値.
  初期値 $Y(m) = 0$ とする.

M または m がわかっていないと, 定数の競合比は得られないことがわかっている [1].

4 Threat-based algorithm

一方向通貨交換問題問題に対する最適なアルゴリズムは, *threat-based algorithm* である [1]. これは, 次の規則によって取引をするものである. 但し, レートが x のときに持っているドルの値を $D(x)$, 円の値を $Y(x)$ とする. また, 以下の議論では, $D(m) = 1, Y(m) = 0$ とする.

規則 1 期間終了時には残っているドルをすべて円に交換する.

規則 2　規則 1 以外の場合は，それまでよりも高いレートでのみ取引する．

規則 3　規則 2 の条件で取引する場合，ドルが下のような値になるように取引を行う．

$$\begin{cases} x \in [m, r_0 m] & D(x) = 1 \\ x \in (r_0 m, M] & D(x) = 1 - \frac{1}{r_0} \ln \frac{x-m}{r_0 m - m} \end{cases}$$

このアルゴリズムの競合比は以下の式を満たす r_0 である．競合比がこれよりも良いオンラインアルゴリズムは存在しないことが示されている．

$$r_0 = \ln \frac{M-m}{r_0 m - m} \tag{1}$$

以下では，どのアルゴリズムでも規則 1 及び 2 に従って取引をする．

5　予測を用いたアルゴリズム

一方向通貨交換問題の離散型モデルに対しては，予測を用いたアルゴリズムが設計されている [2]．これは，「レートはある値 M_1 まで上がるだろう $(m < M_1 \leq M)$」という予測を元に，予測が当たれば競合比は r_0 より小さいものが得られ，もし外れても，我慢度 t というパラメータを用いて，競合比が tr_0 になるようなアルゴリズムである．

ここでは，予測の概念を連続型モデルに適用させる．我々は，レートに関する予測を 2 種類用意した．その 2 つとは次のものである．

- レートは M_1 を超えることがあるだろう
- レートはずっと M_1 未満だろう

前者を上予測，後者を下予測と呼ぶことにする．この予測を用いてアルゴリズムを設計する前に，設計を簡単にするための定理の証明を行う．但し以下では，m 及び M は与えられているものとし，これによって r_0 はわかっているものとする．

定理　レートの区間 $[N_1, N_2]$ 内で，アルゴリズム A が $D(N_1) = d_1$, $Y(N_1) = y_1$ を満たすとする．このとき，取引できる間は競合比 r を得られる最適なアルゴリズム A は一意に決定できる．

証明

1. $N_1 \leq rm$ のとき
   このとき，$D(N_1) = 1$, $Y(N_1) = 0$ である．もし $N_2 \leq rm$ ならば，A は全く取引しない．そうでなければ，threat-based strategy と同様にして，レート $x \in [rm, N_2']$ に対し，
   $$\begin{aligned} D(x) &= 1 - \frac{1}{r} \ln \frac{x-m}{rm-m} \\ Y(x) &= \frac{1}{r}\left(m \ln \frac{x-m}{rm-m} + x - rm\right) \end{aligned}$$
   が成り立つ．但し，N_2 まで取引できれば $N_2' = N_2$ であり，もし N_2 まで取引できなければ $N_2' < N_2$ となる．
2. $N_1 > rm$ のとき
   この場合は，次の 2 つの場合に分けられる．
   (a) $md_1 + y_1 \leq N_1/r$ のとき
   このときは，レート N_1 である量のドルを円に交換する．つまり，交換した後のドル及び円を d_1', y_1' とすると，$md_1' + y_1' = N_1/r$ となるように交換する．その後は，レート $x \in [N_1, N_2']$ に対して
   $$\begin{aligned} D(x) &= d_1' - \frac{1}{r} \ln \frac{x-m}{N_1-m} \\ Y(x) &= y_1' + \frac{1}{r}\left(m \ln \frac{x-m}{N_1-m} + x - N_1\right) \end{aligned}$$
   となる．
   (b) $md_1 + y_1 > N_1/r$ のとき
   このときは，円をドルに交換することが許されていないため，レートがある値 $\widetilde{N}_1 (> N_1)$ まで待つことになる．但し，$\widetilde{N}_1$ の条件は，$md_1 + y_1 = \widetilde{N}_1/r$ である．その後は，レート $x \in [\widetilde{N}_1, N_2']$ に対し，
   $$\begin{aligned} D(x) &= d_1 - \frac{1}{r} \ln \frac{x-m}{\widetilde{N}_1-m} \\ Y(x) &= y_1 + \frac{1}{r}\left(m \ln \frac{x-m}{\widetilde{N}_1-m} + x - \widetilde{N}_1\right) \end{aligned}$$
   となる．□

以下，それぞれの予測を用いてアルゴリズムの設計を行う．1 段階の場合は，どちらも 2 つのアルゴリズムをつなぎ合わせたものになる．

5.1　上予測を採用する場合

「レートは M_1 を超えることがあるだろう」という予測を用いたアルゴリズム を設計する．これは，レートが M_1 を超えれば，r_0 より良い競合比 r_1^* が得られ，もし超えなくても，競合比は tr_0 までで抑えられるというものである．但し，$M_1 > tr_0 m$ とする．

1. レートが $[m, M_1]$ の間は，開始時のドルと円，競合比 tr_0 がわかっているから，定理より競合比 tr_0 を得られるアルゴリズムが設計可能である．この区間のレート x で持っているドル及び円の値を $D_1(x), Y_1(x)$ とすると，
   $$\begin{aligned} D_1(x) &= 1 - \frac{1}{tr_0} \ln \frac{x-m}{tr_0 m - m} \\ Y_1(x) &= \frac{1}{tr_0}\left(m \ln \frac{x-m}{tr_0 m - m} + x - tr_0 m\right) \end{aligned}$$
   となる．
2. レートが $[M_1, M]$ の間は，定理より競合比 r_1^* を得られるアルゴリズムが設計できる．この区間のレート x で持っているドル及び円の値を $D_2(x), Y_2(x)$ とすると，
   $$\begin{aligned} D_2(x) &= d - \frac{1}{r_1^*} \ln \frac{x-m}{M_1-m} \\ Y_2(x) &= y + \frac{1}{r_1^*}\left(m \ln \frac{x-m}{M_1-m} + x - M_1\right) \end{aligned}$$
   となる．但し，d 及び y はレート M_1 で競合比 r_1^* を満たすような定数である．この 2 つは後で求める．

以下，$D_i(x), Y_i(x)$ は同様の意味で用いる．d, y については，以下の条件が存在する．

$$\begin{aligned} D_1(M_1) - d &= \frac{1}{M_1}(y - Y_1(M_1)) \\ md + y &= \frac{M_1}{r_1^*} \end{aligned}$$

この条件から，$d = D_1(M_1) - \frac{M_1}{M_1-m}\left(\frac{1}{r_1^*} - \frac{1}{tr_0}\right) (= D_2(M_1))$, $y = Y_1(M_1) + \frac{M_1^2}{M_1-m}\left(\frac{1}{r_1^*} - \frac{1}{tr_0}\right) (= Y_2(M_1))$ と求められる．このような条件を満たす r_1^* は一意に定まる．r_1^* は，$D_2(M) = 0$ としたときの解であるから，r_1^* は次の方程式の解 r_1 である．

$$1 - \frac{1}{tr_0} \ln \frac{M_1-m}{tr_0 m - m} - \frac{M_1}{M_1-m}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{tr_0}\right) - \frac{1}{r_1} \ln \frac{M-m}{M_1-m} = 0$$

これを解くと，r_1^* は次のように表せる．

$$r_1^\star = \frac{M_1 - m}{(M_1 - m)\left(1 - \frac{1}{tr_0}\ln\frac{M_1 - m}{tr_0 m - m}\right) + \frac{M_1}{tr_0}} \times \left(\frac{M_1}{M_1 - m} + \ln\frac{M - m}{M_1 - m}\right) \qquad (2)$$

ちなみに, レート $x \in [m, M_1]$ では, $mD_1(x)+Y_1(x) \leq \frac{x}{tr_0}$ が, レート $x \in [M_1, M]$ では, $mD_2(x) + Y_2(x) = \frac{x}{r_1^\star}$ が成り立っている.

$m = 100, M = 200, t = 1.01$ のときの M_1 と $r_1^\star$ の関係を図1に示す. なお, このとき $r_0 \approx 1.28$ である.

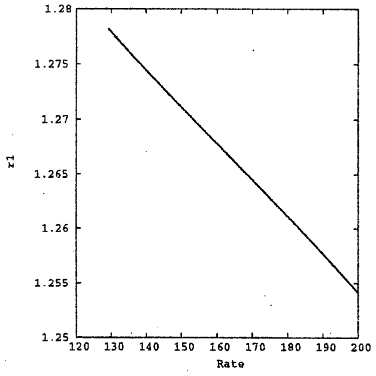

図 1: 上予測での M_1 と $r_1^\star$ の関係

このグラフを見ると, 予測が当たる確率と得られる $r_1^\star$ はトレードオフになっているという意味で, ごく自然の結果である.

5.2 二段階上予測

レートが M_1 になった後, さらに上予測をすることにより, 2回目の予測が当たればさらに良い競合比が得られるようなアルゴリズムを設計する. 但し, 1回目の予測が当たり, 2回目が外れたときは, 競合比は $tr_1^\star$ である.

二段階予測を用いたアルゴリズムは, 3つのアルゴリズムをつなぎ合わせたものと考えられる. レートによって以下の3つの区間が考えられる. 以下その解析を行う.

- レートが $[m, M_1]$ の間は競合比 tr_0 を得るアルゴリズムを設計する. 定理より, レート $x \in [tr_0 m, M_1]$ に対して, $D_1(x) = 1 - \frac{1}{tr_0}\ln\frac{x-m}{tr_0 m - m}$ である.
- レートが $[M_1, M_2]$ の間は競合比 $tr_1^\star$ を得るアルゴリズムを設計する. レート M_1 及びレート M_2 でのドル及び円 $(D_2(M_1), Y_2(M_1)$ は, 前の区間でのアルゴリズムのドル及び円の値 (ここでは, $D_1(M_1), Y_1(M_1)$), 競合比 $tr_1^\star$ から求められる. よって, レート $x \in [M_1, M_2]$ に対して, $D_2(x) = D_2(M_1) - \frac{1}{tr_1^\star}\ln\frac{x-m}{M_1-m}$ である. 但し, $r_1^\star$ は式 (2) を満たす.
- レートが $[M_2, M]$ の間は競合比 $r_2^\star$ を得るアルゴリズムを設計する. この区間のレート x で持つべきドルの値を $D_3(x)$ とすると, $D_3(x) = D_3(M_2) - \frac{1}{r_2^\star}\ln\frac{x-m}{M_2-m}$ である.

3番目の事実より, n 段階上予測によるアルゴリズムも, 最初と最後の区間のアルゴリズムと, その区間で得たい競合比を決めれば区間毎のアルゴリズムが決まるので, 全体のアルゴリズムも決定できる.

$D_2(M_1)$ 及び $D_3(M_2)$ の値は次のようになる.

$$D_2(M_1) = D_1(M_1) - \frac{M_1}{t(M_1 - m)}\left(\frac{1}{r_1^\star} - \frac{1}{r_0}\right)$$

$$D_3(M_2) = D_2(M_2) - \frac{M_2}{M_2 - m}\left(\frac{1}{r_2^\star} - \frac{1}{tr_1^\star}\right)$$

M_1 を固定して考える. $m = 100, M = 200, t = 1.01$ として, M_1 を 120 及び 150 に固定したときの M_2 と $r_2^\star$ との関係を図2に示す. この結果も, 図1と同じくごく自然な結果であると言える.

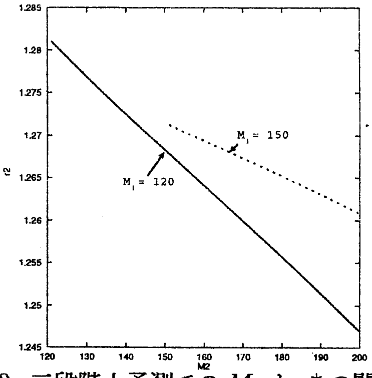

図 2: 二段階上予測での M_2 と $r_2^\star$ の関係

5.3 下予測を採用する場合

「レートはずっと M_1 未満だろう」という予測を用いたアルゴリズムを設計する. つまり, レートがずっと M_1 未満ならば, 競合比 $r_1^\star$ を得ることができ, レートが M_1 を超えることがあっても, 競合比は tr_0 で抑えることができるものである.

レートによって以下の2つの区間が考えられる. 以下その解析を行う.

- レートが $[m, M_1]$ の間は競合比 $r_1^\star$ を得るアルゴリズムを設計する. 開始時のドルと円, 競合比 $r_1^\star$ がわかっているので, 定理よりレート $x \in [r_1^\star m, M_1]$ では, $D_1(x) = 1 - \frac{1}{r_1^\star}\ln\frac{x-m}{r_1^\star m - m}$ である.
- レートが $[M_1, M]$ の間は競合比 tr_0 を得るアルゴリズムを設計する. $mD_1(M_1) + Y_1(M_1) = M_1/r_1^\star > M_1/r$ であるから, 定理より, $mD_1(M_1) + Y_1(M_1) = \widetilde{M_1}/tr_0$ を満たすような $\widetilde{M_1}$ まで待たなければならない. 上式より $\widetilde{M_1} = \frac{tr_0}{r_1^\star}M_1$ と求められる. すると, $D_2(x), Y_2(x)$ は次のように書ける.

$$D_2(x) = D_1(M_1) - \frac{1}{tr_0}\ln\frac{x-m}{\widetilde{M_1} - m}$$

$$Y_2(x) = Y_1(M_1) + \frac{1}{tr_0}\left(m\ln\frac{x-m}{\widetilde{M_1} - m} + x - \widetilde{M_1}\right)$$

但し, $\widetilde{M_1} \leq M$ でなければならないので, M_1 の取り得る値は, $m < M_1 \leq \frac{r_1^\star}{tr_0}M$ となる. レート $x \in [m, M_1]$ では $mD_1(x)+Y_1(x) \leq \frac{x}{r_1^\star}$ が成り立ち, レート $x \in [M_1, M]$ では, $mD_2(x) + Y_2(x) \leq \frac{x}{tr_0}$ が成り立つ.

$r_1^\star$ は次の方程式を満たす r_1 である.

$$1 - \frac{1}{r_1}\ln\frac{M_1 - m}{r_1 m - m} - \frac{1}{tr_0}\ln\frac{M - m}{\widetilde{M_1} - m} = 0 \qquad (3)$$

$m = 100, M = 200, t = 1.01$ のときの M_1 と $r_1^\star$ の関係を図3に示す.

この図を見ると, M_1 が 140 から 150 のところでは, M_1 が 180 のところと比べてみても, $r_1^\star$ はそんなに変わらないのに予測が当たる確率には大きな違いがある. よって, M_1 を 140 ～ 150 に取ることは得策ではないと言える.

5.4 二段階下予測

上予測では, 予測が外れたかどうかは期間が終わらなければわからない. これに対して下予測では, 予測が外れたことはレートが M_1 になった時点でわかる. そこで, 今度

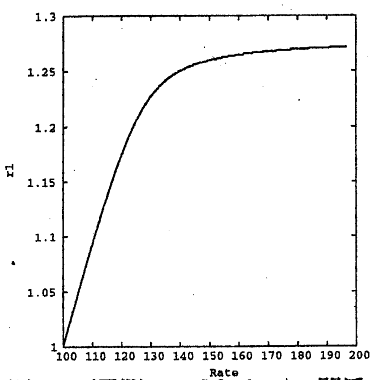

図 3: 下予測での M_1 と $r_1^\star$の関係

は, 下予測に基づいて取引をして, レートが M_1 になり, 予測が外れたことがわかったら, そこでもう一度下予測をして, その予測が当たれば, 従来のアルゴリズムでの競合比 r_0 を取り戻すことを考える.

1回目の予測が外れた場合, 次に「レートはずっと M_2 未満だろう」という予測に従ってアルゴリズムを設計する. これは, もし1回目の予測が当たれば競合比 $r_1^\star$ が得られ, 1回目の予測が外れても, 2回目の予測が当たれば競合比 r_0 が得られ, もし2回目も外れてしまったら競合比 r_2 ($> r_0$) を得るように取引するものである.

レートによって以下の3つの区間が考えられる. 以下それぞれの区間でアルゴリズムを設計する.

・レートが $[m, M_1]$ の間は, 競合比 $r_1^\star$ を得るアルゴリズムを設計する. 定理より, レート $x \in [r_1^\star m, M_1]$ の時には, $D_1(x) = 1 - \frac{1}{r_1^\star} \ln \frac{x-m}{r_1^\star m - m}$ となる. $r_1^\star$ は式 (3) を満たす.

・レートが $[M_1, M_2]$ の間は, 競合比 r_0 を得るアルゴリズムを設計する. レート $\widetilde{M_1}$ までは取引しないのは一段階と同様であるが, $\widetilde{M_1} = \frac{r_0}{r_1^\star} M_1$ である. これより, レート $x \in [\widetilde{M_1}, M_2]$ では $D_2(x) = D_1(M_1) - \frac{1}{r_0} \ln \frac{x-m}{\widetilde{M_1}-m}$ となる.

・レートが $[M_2, M]$ の間は, 競合比 r_2 を得るアルゴリズムを設計する. 先程と同様に, レート $x \in [\widetilde{M_2}, M]$ では, $D_3(x) = D_2(M_2) - \frac{1}{r_2} \ln \frac{x-m}{\widetilde{M_2}-m}$ である. 但し, $\widetilde{M_2} = \frac{r_2}{r_0} M_2$ である.

r_2 が得られるのは, $D_3(M) = 0$ のときであるから, r_2 は次の式を満たす.

$$1 - \frac{1}{r_1^\star} \ln \frac{M_1 - m}{r_1^\star m - m} - \frac{1}{r_0} \ln \frac{M_2 - m}{\widetilde{M_1} - m} - \frac{1}{r_2} \ln \frac{M - m}{\widetilde{M_2} - m} = 0$$

まず, M_1 を固定したときの M_2 と r_2 の関係について調べる. $m = 100, M = 200, t = 1.01, r_0 \approx 1.28, M_1 = 120$ としたときの M_2 と r_2 の関係を図4に示す. このとき, $r_1^\star \approx 1.17$ である.

図4から, M_2 と r_2 との関係はほぼ線型とみなしてよい. M_1 を他の値に取ってみても同様であった. これも, ごく自然な結果である.

次に, r_2 を固定したときの M_1 と M_2 の関係について調べる. r_2 の値をどれほどに設定するかは問題ではあるが, 2回失敗しているという意味で, $r_2 = t^2 r_0$ とした.

$m = 100, M = 200, t = 1.01, r_0 \approx 1.28, r_2 = t^2 r_0$ としたときの M_1 と M_2 の関係を図5に表す.

図5より, この条件下では, M_1 の増加に従って, M_2 は指数的に増加していくことがわかる. そして, 予測が失敗したときに r_0 を取り戻す確率を上げたければ, レートを140付近にするのが得策であると思われる. しかし, 図3を見るとわかるように, $r_1^\star$ の立場からだと, M_1 を140付近

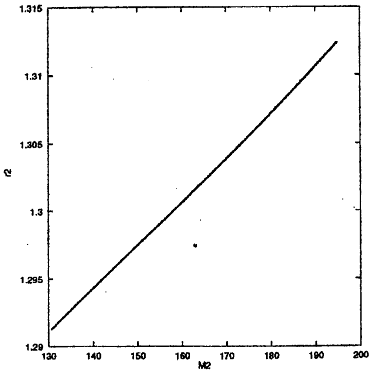

図 4: M_1 を固定したときの M_2 と r_2 の関係

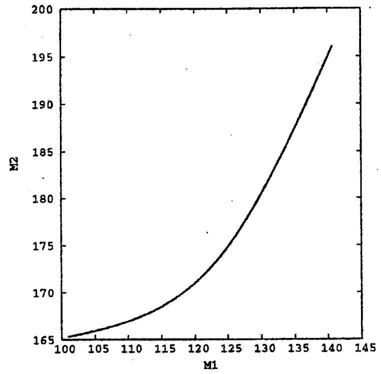

図 5: r_2 を固定したときの M_1 と M_2 の関係

にするのはあまり好ましくない. この条件では, 以下のような性質がある.

1. M_1 を120やそれ以下に設定すると, $r_1^\star$ は良いが M_2 の条件は厳しくなる.
2. M_1 を140近辺に設定すると, 1回目の予測に失敗しても r_0 を得る確率は高くなるが, $r_1^\star$ の結果はあまり良くない.
3. M_1 を M の近くに設定すると, 予測が当たる確率は高くなるが, 得られる $r_1^\star$ は悪くなるし, 失敗した後 r_0 を得るようなアルゴリズムは設計できない.

6 限定型両方向通貨交換問題

6.1 従来のアルゴリズム

一般の両方向通貨交換問題に対する従来のアルゴリズムは, レートが増加している区間では以下の規則に従って取引する [1].

規則1 レートが $[m, r_0 m]$ の間は取引しない.

規則2 レートが $(r_0 m, M]$ の間は, ドルの値が次のようになるように取引する.

$$D(x) = 1 - \frac{1}{r_0} \ln \frac{x - m}{r_0 m - m}$$

レートが減少する区間に入ったら, 残っているドルをすべて円に交換し, 次の取引を設計する.

r_0 は式 (1) を満たす. 限定型両方向通貨交換問題で考えてみると, 明らかに競合比は r_0 であることがわかる.

6.2 上予測を用いたアルゴリズム

上予測を用いたアルゴリズムは, 一方向通貨交換問題に対するアルゴリズムと何ら変わらない. よって, 得られる競合比も同じである.

6.3 下予測を用いたアルゴリズム

下予測を用いたアルゴリズムは，一方向通貨交換問題に対するアルゴリズムとは少々異なる．レートによって2つの区間に分けられるので，以下それぞれについて解析する．

・レートが $[m, M_1]$ の間は，競合比 r_1^* を得るアルゴリズムを設計する．定理より，レート $x \in [tr_0 m, M_1]$ では，$D_1(x) = 1 - \frac{1}{r_1^*}\ln\frac{x-m}{r_1^* m - m}$ である．

・レートが $[M_1, M]$ の間は，競合比 tr_0 を得るアルゴリズムを設計する．ここで，今回は円をドルに交換することが許されているので，レート M_1 で円をドルに交換し，交換した後のドル及び円を d, y としたときに，$md+y = M_1/tr_0$ となるようにすればよい．$d - D_1(M_1) = \frac{1}{M_1}(Y_1(M_1) - y)$ より，$d = D_1(M_1) + \frac{M_1}{M_1-m}\left(\frac{1}{r_1^*} - \frac{1}{tr_0}\right) (= D_2(M_1))$，$y = Y_1(M_1) - \frac{M_1^2}{M_1-m}\left(\frac{1}{r_1^*} - \frac{1}{tr_0}\right)$ である．よって，レート $x \in [M_1, M]$ では，

$$
\begin{aligned}
D_2(x) &= D_2(M_1) - \frac{1}{tr_0}\ln\frac{x-m}{M_1-m} \\
Y_2(x) &= Y_2(M_1) + \frac{1}{tr_0}\left(m\ln\frac{x-m}{M_1-m} + x - M_1\right)
\end{aligned}
$$

r_1^* は次の方程式を満たす解 r_1 である．

$$
1 - \frac{1}{r_1}\ln\frac{M_1-m}{r_1 m - m} + \frac{M_1}{M_1-m}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{tr_0}\right) - \frac{1}{tr_0}\ln\frac{M-m}{M_1-m} = 0 \qquad (4)
$$

ここで，M_1 の取り方には注意しなければならない．M_1 の満たすべき条件は次の通り．

1. $m < M_1 \leq M$
2. $D_1(M_1) \geq 0$

$m = 100, M = 200, t = 1.01, r_0 \approx 1.28$ における，M_1 と r_1^* との関係を図6に示す．

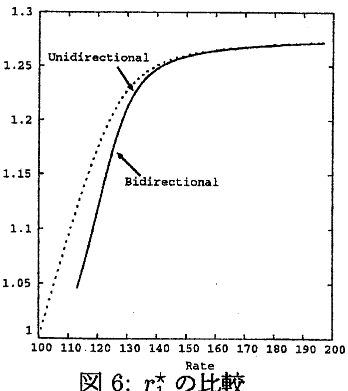

図 6: r_1^* の比較

このグラフを見ると，$M_1 = 120$ あたりでは，両方向でのアルゴリズムの方が競合比がかなり良くなっている．しかし，$M_1 = 150$ あたりからは，どちらでもそれ程大きな違いはないと言える．

6.4 二段階下予測

一方向と同様に，一回予測が間違っていても，2回目の予測が当たれば競合比 r_0 となるようなアルゴリズムを設計する．レートによって，3つの区間に分けられるので，以下それぞれについて解析する．

・レートが $[m, M_1]$ の間は，競合比 r_1^* を得るアルゴリズムを設計する．$D_1(x)$ は一方向のときと全く同様である．r_1^* は式(4)を満たす．

・レートが $[M_1, M_2]$ の間は，競合比 r_0 を得るアルゴリズムを設計する．レート M_1 で持っているドルは，競合比 r_0 と $D_1(M_1)$ から，$D_2(M_1) = D_1(M_1) + \frac{M_1}{M_1-m}\left(\frac{1}{r_1^*} - \frac{1}{r_0}\right)$ と求められる．よって，レート $x \in [M_1, M_2]$ では，$D_2(x) = D_2(M_1) - \frac{1}{r_0}\ln\frac{x-m}{M_1-m}$ となる．・レートが $[M_2, M]$ の間は，競合比 $r_2 (r_2 > r_0)$ を得るアルゴリズムを設計する．上と同様にして，$D_3(M_2) = D_2(M_2) + \frac{M_2}{M_2-m}\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_2}\right)$ となるから，レート $x \in [M_2, M]$ では，$D_3(x) = D_3(M_2) - \frac{1}{r_2}\ln\frac{x-m}{M_2-m}$ である．

但し，M_2 の取り方には注意が必要である．M_2 が満たすべき条件は次の通り．

1. $M_1 < M_2 \leq M$
2. $D_2(M_2) \geq 0$

$m = 100, M = 200, t = 1.01, r_0 \approx 1.28, r_2 = t^2 r_0$ としたときの，M_1 と M_2 との関係を図7に示す．

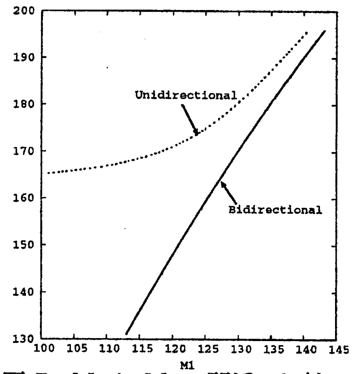

図 7: M_1 と M_2 の関係の比較

図7を見ると，全般的に r_0 を取り返すための M_2 の設定を厳しくしなければならないことがわかる．また，r_0 を取り返す確率を高めたければ，M_1 を142程度にすればよい．

6.5 二つのアルゴリズムの融合

前述した2つのアルゴリズムの考え方を合わせたアルゴリズムを設計することもできる．一段階の場合は，次の2つの区間に分けられるので，以下それぞれについて解析を行う．但し，$R_1 \in [0,1]$ であり，$R = 0$ ならば両方向のアルゴリズムと一致し，$R = 1$ ならば一方向のアルゴリズムと一致する．

・レートが $[m, M_1]$ の間は，競合比 r_1^* を得るようなアルゴリズムを設計する．定理より，レート $x \in [r_1^* m, M_1]$ では，$D_1(M_1) = 1 - \frac{1}{r_1^*}\ln\frac{x-m}{r_1^* m - m}$ である．

・レートが $[M_1, M]$ の間は，競合比 tr_0 を得るようなアルゴリズムを設計する．ここで，M_1 からすぐに取引を再開するのではなく，M_1 で調整した後 $\widehat{M_1} (> M_1)$ から取引を再開するようにする．すると，レート $x \in [\widehat{M_1}, M]$ では $D_2(x) = D_2(\widehat{M_1}) - \frac{1}{tr_0}\ln\frac{x-m}{\widehat{M_1}-m}$ である．ここで，$\widehat{M_1} = M_1 + R_1\left(\frac{tr_0}{r_1^*}M_1 - M_1\right)$ である．

r_1^* は次の方程式を満たす r_1 である．

$$
1 - \frac{1}{r_1}\ln\frac{M_1-m}{r_1 m - m} + \frac{1}{M_1-m}\left(\frac{M_1}{r_1} - \frac{\widehat{M_1}}{tr_0}\right) - \frac{1}{tr_0}\ln\frac{M-m}{\widehat{M_2}-m} = 0 \qquad (5)
$$

$m = 100, M = 200, t = 1.01, r_0 \approx 1.28$ としたときの，M_1 と r_1^* との関係を，R_1 の値を付して図8に示す．

次に二段階下予測について考える．レートによって3区間に分けられるので，以下それぞれについて解析を行う．ここで，$R_1, R_2 \in [0,1]$ である．

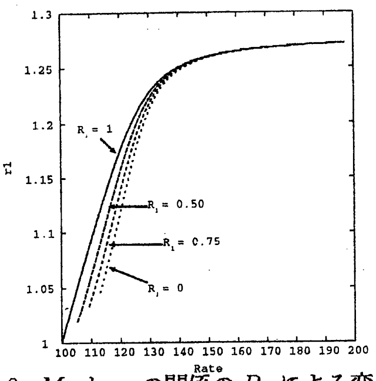

図 8: M_1 と r_1 の関係の R_1 による変化

・レートが $[m, M_1]$ の間は，競合比 r_1^* を得るアルゴリズムを設計する．r_1^* は式 (5) を満たす．
・レートが $[M_1, M_2]$ の間は，競合比 r_0 を得るアルゴリズムを設計する．レート $x \in [\widehat{M_1}, M_2]$ のときは，$D_2(x) = D_2(\widehat{M_1}) - \frac{1}{r_0} \ln \frac{x-m}{\widehat{M_1}-m}$ である．
・レートが $[M_2, M]$ の間は，競合比 $r_2 (r_2 < r_0)$ を得るアルゴリズムを設計する．レート $x \in [\widehat{M_2}, M]$ のときは，$D_3(x) = D_3(\widehat{M_2}) - \frac{1}{r_2} \ln \frac{x-m}{\widehat{M_2}-m}$ である．
ここで，$\widehat{M_1} = M_1 + R_1 \left(\frac{r_0}{r_1^*} M_1 - M_1 \right)$，$\widehat{M_2} = M_2 + R_2 \left(\frac{r_2}{r_0} M_2 - M_2 \right)$ である．

$m = 100, M = 200, t = 1.01$ として，$R_1 = R_2 = R, r_2 = t^2 r_0$ に固定したときの M_1 と M_2 の関係を，R の値を付して図 9 に示す．

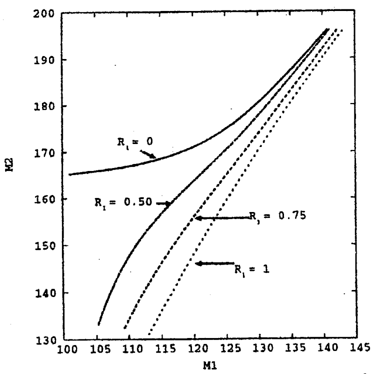

図 9: M_1 と M_2 の関係の R による変化

図8より，一方向と両方向に対するアルゴリズムによる r_1^* の値の中間を取るようなアルゴリズムが設計可能であることがわかる．当然，そのとき r_0 を取り返すときの M_2 の設定の仕方も，両者の間となることが，図 9でわかる．ただ，R_2 の値は，M_2 の値には影響しないようである．

7 おわりに

今回は，通貨交換問題に対するアルゴリズムに，予測という概念を入れることによる改良を試みた．この問題では，取引の際にかかる手数料などは考えていないが，そういった問題も存在する [4]．今まで述べてきたアルゴリズムの設計の方法が，他の問題のモデルに対しても活かせるのかどうか，興味深いところである．さらに，一般的な両方向通貨交換問題に対して，アルゴリズムの改良が行われているが [4]，予測を用いるという考え方でさらに改良ができないか，というのも非常に興味深い．

参考文献

[1] R.El-Yaniv, A.Fiat, R.Karp, and G.Turpin. "Competitive Analysis of Financial Games", *Proc. 33th IEEE Symposium on Foundations of Computer Science (FOCS)*, pp.327-333, 1992.

[2] Sabah al-Binali. "The Competitive Analysis of Risk Taking with Applications to Online Trading", *Proc. 38th IEEE Symposium on Foundations of Computer Science (FOCS)*, pp.336-344, 1997.

[3] Richard M. Karp. "On-Line Algorithms Versus Off-Line Algorithm : How Much is it Worth to Know the Future?", *Proc. IFIP 12th World Computer Congress*, Vol.1, pp.416-429, 1992.

[4] 檀浦 詠介, 櫻井 幸一. "取引手数料を考慮したオンライン為替交換アルゴリズム", 情報処理学会論文誌, Vol.39, No.1, pp.1-10, 1998.