数理解析研究所講究録
1095巻 1999年 52-63

BASIC FORCING NOTIONS IN $P_\kappa\lambda$

YOSHIHIRO ABE
(阿部吉弘)(神奈川大・工)

ABSTRACT. この講演では $P_\kappa\lambda$ に non-reflecting stationary set を force する可能性を探る. 金森による weakly normla イデアルの [1] よりも自然だと思われる $P_\kappa\lambda$ への一般化についても触れる.

1. 用語と基本的な事項

全体を通して κ は 正則な非可算基数で λ は κ 以上の基数とする. このような (κ,λ) の組みに対して, $P_\kappa\lambda$ で集合 $\{x\subset\lambda : |x|<\kappa\}$ を表す. 各 $x\in P_\kappa\lambda$ について, $\kappa_x=|x\cap\kappa|$, $P_{\kappa_x}x=\{s\subset x : |s|<\kappa_x\}$ とする.

また, $\hat{x}$ で $\{y\in P_\kappa\lambda : x\subset y\}$ を表す. $P_\kappa\lambda$ の部分集合 X が全ての $x\in P_\kappa\lambda$ に対して $X\cap\hat{x}\neq\emptyset$ を満たすとき, X は *unbounded* であると言い, $I_{\kappa,\lambda}=\{X\subset P_\kappa\lambda : X$ は unbounded でない $\}$ と定義する.

$P_\kappa\lambda$ 上のイデアルはすべて *fine*, つまり, $I_{\kappa,\lambda}$ の拡大であると仮定する. $P_\kappa\lambda$ 上のフィルター F とイデアル I は $I=\{P_\kappa\lambda-X : X\in F\}$ のとき, 互いに *dual* であると言う. I と dual なフィルターを I^* で表し, I^+ で集合 $\{X\subset P_\kappa\lambda : X\notin I\}$ を表す.

時々, $y\in P_{\kappa_z}z$ であることを $y\prec z$ と略記することがある.

ここまで $P_\kappa\lambda$ について定義されてきた概念は全て、κ_x が 正則で非可算ならば $P_{\kappa_x}x$ にも自然に定められる. 例えば, $X\subset P_{\kappa_x}x$ が unbounded とは 任意の $y\in P_{\kappa_x}x$ に対し $z\in X$ で $y\subset z$ なものが存在することであり, $I_{\kappa_x,x}$ は集合 $\{X\subset P_{\kappa_x}x \mid X$ は $P_{\kappa_x}x$ で *unbounded* でない $\}$ を表し, これは $P_{\kappa_x}x$ 上の κ_x-complete なイデアルである.

2. FORCING A NONREFLECTING STATIONARY SET

Nonreflecting stationary set を 正則な非可算基数に付け加えるのは, 基本的かつ容易なテクニックでありながら, supercompactness を壊すなどの重要な応用がある. 例えば [2] を見て下さい. このテクニックを $P_\kappa\lambda$ に一般化しようとすると, *shooting club forcing* に見られるように, 完全な一般化を得るには, ある種の困難は避けられない. ここでは [4] での Gitik のアイディアを使う.

Date: November 26, 1998.

定理 2.1. *$V \subset W$ を同じ順序数を持つ２つの ZFC のモデルとし, $(\kappa^+)^V = (\kappa^+)^W$, $C \in W$ は V-inaccessibles からなる κ の club set で, κ は W で inaccsessible, $T = \{x \in P_\kappa\kappa^+ : V \models "|x|$ は inaccessible でない"$\}$ とする. このとき, 基数を保存する forcing notion $\mathbb{P} \in W$ で $\Vdash_{\mathbb{P}}$" stationary な $S \subset \kappa$ で $x \in T$ ならば $S \cap P_{\kappa_x} x$ は stationary でない" が成り立つようなものが存在する.*

証明. W において forcing notion $\mathbb{P}$ を次のように定義する;

$$\mathbb{P} = \{p \subset P_\kappa\kappa^+ : |p| < \kappa \text{ で, どんな } x \in T \text{ に対しても } p \cap P_{\kappa_x} x \text{ は stationary ではない }\}.$$

$p \leq_{\mathbb{P}} q$ は

$$p \supset q \text{ で}, x \in p - q \text{ かつ } y \in q \text{ ならば } x \not\subset y$$

であることとする.

$\mathbb{P}$ は κ^+-c.c. を満たし $<\kappa$-distributive であり, したがって cardinal を保存することを示していく.

最初に $\mathcal{A}$ は κ^+ 濃度の anti chain として矛盾を導く. 全ての $p \in \mathcal{A}$ に対し $|\cup p| < \kappa$ で κ は inaccessible だから, $\{\cup p : p \in \mathcal{A}\}$ は r を root とする Δ-system であるとしてよい. $|P(r)| < \kappa$ だから, $p, q \in \mathcal{A}$ で $p \cap P(r) = q \cap P(r)$ であるものが見つかる. $s = p \cup q$ と置く. $t \in s - p, u \in p$ で $t \subsetneq u$ と仮定すると, $t \in q$ かつ $t \subset u \subset \cup p$ である. 従って $t \subset \cup p \cap \cup q = r$ であるが, これは $t \notin p$ に矛盾する. そこで, このような t と u は存在しないことになる. $x \in T$ を選ぶ. $p \cap P_{\kappa_x} x$ と $q \cap P_{\kappa_x} x$ は両方とも stationary でないから, $s \cap P_{\kappa_x} x = (p \cap P_{\kappa_x} x) \cup (q \cap P_{\kappa_x} x)$ も stationary ではない. 従って, s は $\mathbb{P}$ の p と q より強い condition である. これは $\mathcal{A}$ が anti chain であることに反するから, $\mathbb{P}$ は κ^+-c.c. を満たすことが示された.

次に $\delta < \kappa$ で, 各 $\alpha < \delta$ に対し D_α は $\mathbb{P}$ の open dense な部分集合だとする. 任意の condition p をとる. $q \in \bigcap_{\alpha<\delta} D_\alpha$ で p より強いものを見つければ $<\kappa$-distributive であることが言える.

十分大きな λ を選び

$$\mathcal{B} = \langle H(\lambda), \in, \kappa, \kappa^+, P_\kappa\kappa^+, C, \delta, \mathbb{P}, \Vdash, \langle D_\alpha | \alpha < \delta\rangle, p\rangle$$

とする. $\mathcal{M} \prec \mathcal{B}$ で $|\mathcal{M}| = \kappa, \mathcal{M} \cap \kappa^+ \in \kappa^+$, ${}^{<\kappa}(\mathcal{M} \cap \kappa^+) \subset \mathcal{M}$ であるものが存在する. κ から $\mathcal{M} \cap \kappa^+$ への全単射 $g \in V$ を固定する. $\mathcal{M}$ の elementary submodel 達の increasing continuous chain $\langle \mathcal{M}_\xi | \xi < \kappa\rangle$ で $\alpha + 1 \subset \mathcal{M}_0$ かつ, 全ての $\xi < \kappa$ について $|\mathcal{M}_\xi| < \kappa$, ${}^\xi\mathcal{M}_\xi \subset \mathcal{M}_{\xi+1}$, $g''\xi \subset \mathcal{M}_\xi$ が成り立つようなものを構成できる.

C の closed unbounded な部分集合 E で, 各 $\xi \in E$ に対し $g''\xi = \mathcal{M}_\xi \cap \kappa^+$, $|\xi| = \xi$, $g''\xi \cap \kappa = \xi = \mathcal{M}_\xi \cap \kappa$ となるものが存在する. ここで, 各 $\xi \in E$ について $\mathcal{M}_\xi \cap \kappa^+ \in P_\kappa\kappa^+ \cap \mathcal{M}_{\xi+1}$ となっていることに注意する. もし $\xi \in E$ で $q \in \mathbb{P} \cap \mathcal{M}_\xi$ ならば, $\mathcal{M}_\xi \models'' |q| < \kappa$" である

から, $q = f''\eta$ となる $\eta < \xi$ が存在し, $f \in \mathcal{M}_\xi$ である. 従って $q \subset \mathcal{M}_\xi$ となる. 同様にして $q \subset P(\mathcal{M}_\xi \cap \kappa^+)$ であることも示される. 実際, 全ての $x \in q$ に対し $x \subsetneq \mathcal{M}_\xi \cap \kappa^+$ である. $\langle \xi_\alpha | \alpha \leq \delta \rangle$ を E の increasing enumeration とする.

上で述べた注意を使って condition 達の decreasing sequence $\langle p_{\xi_\alpha} | \alpha \leq \delta \rangle$ を, 各 $\alpha < \delta$ と全ての $\beta < \alpha$ に対し $p_\alpha \in \mathcal{M}_{\xi_\alpha+1} \cap D_\beta$ となっているように, 帰納的に定義して行く.

$\alpha + 1 \subset \mathcal{M}_0 \subset \mathcal{M}_{\xi_0}$ より $D_0 \in \mathcal{M}_{\xi_0}$ だから, $q_0 \in \mathcal{M}_{\xi_0} \cap D_0$ で $q_0 \leq p$ なものがある. $p_0 = q_0 \cup \{\mathcal{M}_{\xi_0} \cap \kappa^+\}$ と定義する. $V \models$ "$|\mathcal{M}_{\xi_0}| = \xi_0$ は inaccessible" だから, p_0 は condition である. 前の注意から $p_0 \in \mathcal{M}_{\xi_0+1}$ である.

$\alpha = \beta + 1$ で p_β が定義されたとする. $p_\beta \in \mathcal{M}_{\xi_\beta+1} \subset \mathcal{M}_{\xi_\alpha}$ で, $\beta \in \xi_\alpha = \mathcal{M}_{\xi_\alpha} \cap \kappa$ より $D_\beta \in \mathcal{M}_{\xi_\alpha}$ である. 従って $q_\alpha \in \mathcal{M}_{\xi_\alpha} \cap D_\beta$ で $q_\alpha \leq p_\beta$ であるものを見つけることができる. $p_\alpha = q_\alpha \cup \{\mathcal{M}_{\xi_\alpha} \cap \kappa^+\}$ と定義すると, まえと同じく, 目的にかなった condition になっている.

今度は α は δ 以下の limit ordinal で全ての $\beta < \alpha$に対して p_β が定義されたと仮定する. $p_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} p_\beta$ と定義する.

各 $\beta < \alpha$ について $p_\beta \in \mathcal{M}_{\xi_\beta+1}$ かつ $\xi_\beta + 1 \leq \xi_{\beta+1} < \xi_\alpha$ だから, $\{p_\beta : \beta < \alpha\} \in {}^\alpha\mathcal{M}_{\xi_\alpha} \subset \mathcal{M}_{\xi_\alpha+1}$ である. 従って $p_\alpha \in \mathcal{M}_{\xi_\alpha+1}$ となる. $\mathcal{M}_{\xi_\beta+1} \cap \kappa^+$ は $p_{\beta+1}$ の最大元だから, $\cup p_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha}(\mathcal{M}_{\xi_\beta} \cap \kappa^+) = \mathcal{M}_{\xi_\alpha} \cap \kappa^+$ である. ここで $|\mathcal{M}_{\xi_\alpha} \cap \kappa^+| = \xi_\alpha$ は V で inaccessible であることを思い出そう.

$x \in T$ で $p_\alpha \cap P_{\kappa_x} x$ が stationary であると仮定してみる. 明らかに $x \subset \cup p_\alpha$ だから $V \models$"$|x| \leq |\mathcal{M}_{\xi_\alpha} \cap \kappa^+|$" であり, $(|x|)^V < \xi_\alpha$ になっている. ここで $x \subset \mathcal{M}_\alpha \cap \kappa^+ = g''\xi_\alpha = \bigcup_{\zeta<\xi_\alpha} g''\zeta$ である. $V \models$"ξ_α は正則" だから, ある $\zeta < \xi_\alpha$ に対して $x \subset g''\zeta$ になっている. 従って, $x \subsetneq g''\xi_\gamma = \mathcal{M}_{\xi_\gamma} \cap \kappa^+ \in p_\gamma$ を満たす $\gamma < \alpha$ が存在する.

$y \in p_\alpha \cap P_{\kappa_x} x$ をとると, $y \subset x \subsetneq \mathcal{M}_{\xi_\gamma} \cap \kappa^+ \in p_\gamma$ かつ, ある $\mu \in (\gamma, \alpha)$ に対して $y \in p_\mu$ である. $p_\mu \leq p_\gamma$ より, $y \in p_\gamma$ が分かる. 従って $p_\alpha \cap P_{\kappa_x} x = p_\gamma \cap P_{\kappa_x} x$ で, $p_\gamma \in \mathbb{P}$ であることから $p_\alpha \cap P_{\kappa_x} x$ は stationary ではない. ゆえに, p_α は condition で $\bigcap_{\beta<\alpha} D_\beta$ の元である.

最後に $\mathbb{P}$ は nonreflecting stationary set を force することを示す。G を W 上 $\mathbb{P}$-generic, $S = \cup G$ とする. 簡単な density argument により S は $P_\kappa \kappa^+$ で unbounded なことが示される. $W[G]$ において S は $P_\kappa \kappa^+$ の stationary な部分集合で, どの T の元 x においても reflect しないことを示そう. $P_\kappa \kappa^+ \cap W = P_\kappa \kappa^+ \cap W[G]$ であることに注意する.

$D \subset P_\kappa \kappa^+$ を $W[G]$ における club, $\dot{D}$ はその name とする. $p \Vdash$"$\dot{D}$ は $P_\kappa \kappa^+$ の closed unbounded な部分集合である" と仮定する.

十分大きな λ をとり, $\mathcal{N} \prec \langle H(\lambda), \in, \kappa, \kappa^+, P_\kappa \kappa^+, C, \mathbb{P}, \Vdash, \dot{D}, p \rangle$ で $|\mathcal{N}| = \kappa$, $\mathcal{N} \cap \kappa^+ \in \kappa^+$, かつ ${}^{<\kappa}(\mathcal{N} \cap \kappa^+) \subset \mathcal{N}$ であるものを選ぶ. κ から $\mathcal{N} \cap \kappa^+$ への全単射 $h \in V$ と $\mathcal{N}$ の elementary submodel 達の

increasing continuous chain $\langle \mathcal{N}_{\nu_\alpha} | \alpha < \kappa \rangle$ で, 各 $\alpha < \kappa$ について $|\mathcal{N}_{\nu_\alpha}| < \kappa$, ${}^{\nu_\alpha}\mathcal{N}_{\nu_\alpha} \subset \mathcal{N}_{\nu_\alpha+1}$, $h''\nu_\alpha \cap \kappa = \nu_\alpha \in C$ は 基数で, $h''\nu_\alpha = \mathcal{N}_{\nu_\alpha} \cap \kappa^+$ が成り立つものを選ぶ. (これらの条件から $h''\nu_\alpha = \mathcal{N}_{\nu_\alpha} \cap \kappa$ であり, $\langle \nu_\alpha \mid \alpha < \kappa \rangle$ は increasing continuous である.)

次のように, condition 達の descending sequence $\langle p_n \mid n \in \omega \rangle$ を帰納的に定義する.

Elementarity から $p' \in \mathcal{N}_{\nu_0}$ と $x_0 \in \mathcal{N}_{\nu_0}$ で $p' \leq p$ かつ $p''\Vdash$"$x_0 \in \dot{D}$" を満たすものが存在する. $p_0 = p' \cup (\mathcal{N}_{\nu_0} \cap \kappa^+)$ と定義する. 前と同様に $p_0 \in \mathbb{P} \cap \mathcal{N}_{\nu_0+1} \subset \mathcal{N}_{\nu_1}$ である.

$p_n \in \mathcal{N}_{\nu_n+1}$ が定義されていると仮定する. $\cup p_n = \mathcal{N}_{\nu_n} \cap \kappa^+ \in \mathcal{N}_{\nu_n+1}$ と $p_n \Vdash$"$\dot{D}$ は club" が成り立つ. $\mathcal{N}_{\nu_n} \cap \kappa^+ \in P_\kappa \kappa^+ \cap \mathcal{N}_{\nu_n+1}$ だから, $p'_n \in \mathcal{N}_{\nu_n+1}$ と $x_{n+1} \in \mathcal{N}_{\nu_n+1}$ で $p'_n \leq p_n$, $\mathcal{N}_{\nu_n} \cap \kappa^+ \subset x_{n+1}$, かつ $p'_n \Vdash$"$x_{n+1} \in \dot{D}$" である. 従って $x_{n+1} \subset \mathcal{N}_{\nu_n+1} \cap \kappa^+ \subset \mathcal{N}_{\nu_{n+1}}$ である. $p_{n+1} = p'_n \cup \{\mathcal{N}_{\nu_{n+1}} \cap \kappa^+\}$ と置く.

$q = (\bigcup_{n\in\omega} p_n) \cup \{\mathcal{N}_{\nu_\omega} \cap \kappa^+\}$ とすると, 以前と同様に, $q \in \mathbb{P}$ で q は全ての p_n よりも強い. $\mathcal{N}_{\nu_n} \cap \kappa^+ \subset x_{n+1} \subset \mathcal{N}_{\nu_n+1} \cap \kappa^+ \subset \mathcal{N}_{\nu_{n+1}} \cap \kappa^+$ だから, $\mathcal{N}_{\nu_\omega} \cap \kappa^+ = \bigcup_{n\in\omega} x_n$ である. 全ての $n \in \omega$ に対して $p_n \Vdash$"$x_n \in \dot{D}$" が成り立つ. 従って, $q \Vdash$" 全ての $n \in \omega$ に対して $x_n \in \dot{D}$ で, $\dot{D}$ は closed である" が成り立つ. ゆえに, $q \leq p$ かつ $q \Vdash$"$\mathcal{N}_{\nu_\omega} \cap \kappa^+ \in \dot{D} \cap \cup G$" である. 従って S が stationary であることが示された.

S がある $x \in P_\kappa \kappa^+$ に reflect してしまったとする. $\mathbb{P}$ の順序の定義から, ある condition $p \in G$ が x に reflect していることになり, $p \in \mathbb{P}$ であることに反してしまう.

以上で定理の証明が終わった. □

3. 金森の WEAK NORMALITY の一般化

金森 [5] は weakly normal フィルター を 正則な非可算基数に対し次のように定義した.

定義 3.1. κ 上のフィルター F が *weakly normal* とは, どんな κ 上定義された regressive function も F のある元の上で有界であることを言う.

この概念の講演者による $P_\kappa\lambda$ への一般化 [1] は, strong compactness を弱くしたものと見なせる. (その論文では, 同じく weakly normal と呼ばれている.)

定義 3.2. F を $P_\kappa\lambda$ 上のフィルターとする. どんな $P_\kappa\lambda$ 上で定義された regressive function も, ある F の元の上で有界なとき $AN(F)$ と書くことにする.

一方 $P_\kappa\lambda$ 上の strongly normal フィルターは [3] で supercompact 極大フィルターを弱くしたものとして導入された.

定義 **3.3.** $P_\kappa\lambda$ から $P_\kappa\lambda$ への関数 f は, 全ての $x \in P_\kappa\lambda$ について $f(x) \in P_{\kappa_x}x$ であるとき *set regressive* であると言う.

$P_\kappa\lambda$ 上のフィルター F が *strongly normal* であるとは, 任意の F-positive な集合 X 上で定義された任意の set regressive function が, X のある positive な部分集合上で constant なことである.

これは次のことと同値である: どんな $\{X_s : s \in P_\kappa\lambda\} \subset I$ に対しても, $\nabla_{\prec} X_s = \{x : \text{ある } s \prec x \text{ に対して } x \in X_s\} \in I$ である.

明らかに、全ての strongly normal イデアルは normal である.

金森のアイディアに従って, 次の WN-フィルターの概念を導入する.

定義 **3.4.** F を $P_\kappa\lambda$ 上のフィルターとする. $P_\kappa\lambda$ 上で定義された任意の set regressive function f に対して, ある $a \in P_\kappa\lambda$ が存在して $\{x \in P_\kappa\lambda : f(x) \subset a\} \in F$ を満たすとき, F を WN-フィルター と呼び, $WN(F)$ と書く. WN-フィルターに関しては、completeness の条件はなにも要求されていないことに注意する必要がある.

以下で WN-フィルターの存在から、そのフィルターの completeness に対応する範囲の stationary set の reflection が導かれることが明らかになる. オリジナルの weak normality は weakly inaccessible 基数の stationary な部分集合の reflection を導いたのだから, WN-フィルターは AN-フィルターよりも自然な金森の概念の一般化と言えるかもしれない.

最初に WN-フィルターの基本的な性質を述べる. まず WN という性質は AN よりも強いものであることが分かる.

補題 **3.5.** もし $cf(\lambda) \geq \kappa$ で $WN(F)$ ならば, $AN(F)$ である.

証明. $P_\kappa\lambda$ 上の regressive な f に対して, $g(x) = \{f(x)\}$ で定義される関数 g を考えると, g はある F の元の上で set regressive でる. ゆえに, ある $a \in P_\kappa\lambda$ が存在し, $X = \{x \in P_\kappa\lambda : g(x) \subset a\} \in F$ が成り立つ. $cf(\lambda) \geq \kappa$ だから, $\sup(a) < \lambda$ であり, 全ての $x \in X$ について $f(x) \leq \sup(a)$ になっている. $\square$

ある $\lambda \geq \kappa$ に対して $P_\kappa\lambda$ 上に AN-フィルターが存在すれば, κ は weakly inaccessible であることに注意しよう. 次は直ちに分かることである.

補題 **3.6.** *(1)* WN-フィルターの拡大フィルターもまた WN である.

(2) F が $P_\kappa\lambda$ 上の WN-フィルターならば, 任意の $\delta \in [\kappa, \lambda)$ に対して $F \restriction \delta$ は $P_\kappa\delta$ 上の WN-フィルターである. *(* ここで $F \restriction \delta = \{X \subset P_\kappa\delta : \{x \in P_\kappa\lambda : x \cap \delta \in X\} \in F\}$ とする.*)*

(3) ある $\lambda \geq \kappa$ に対して $P_\kappa\lambda$ 上に WN-フィルターが存在すれば, κ は *weakly inaccessible* である.

$AN(F)$ であったとしても $AN(F \restriction \delta)$ とは限らないことには, 注意を要する.

補題 3.7. *$Reg = \{x \in P_\kappa\lambda : x \cap \kappa$ は 正則 $\}$ と置く. このとき $P_\kappa\lambda$ 上の WN-フィルターは全て $CF_{\kappa,\lambda} \restriction Reg$ の拡大である.*

証明. $X = \{x \in P_\kappa\lambda : x \cap \kappa \notin \kappa\} \in F^+$ と仮定する. 各 $x \in X$ に対し, $\alpha_x \in x \cap \kappa$ で $\alpha_x \not\subset x$ であるものがとれる. ある $a \in P_\kappa\lambda$ と $X' \in P(X) \cap F^+$ が存在し, 全ての $x \in X'$ に対し $\alpha_x \in a$ になる. ここで $a \subset \kappa$ としてもよい. $\alpha = \sup(a)$ と置くと $\alpha < \kappa$ であるが, どんな $x \in X'$ についても $\alpha \not\subset x$ となってしまい矛盾する. ゆえに $\{x : x \cap \kappa \in x\} \in F$ である.

次に $j : \lambda \times \lambda \to \lambda$ を全単射とする. $Y = \{x : j''(x \times x) \not\subset x\} \in F^+$ と仮定して, f を $f(x) \in x \times x$ で $j(f(x)) \notin x$ であるように定める. $b \in P_\kappa\lambda$ と $Y' \in P(Y) \cap F^+$ が存在して, どんな $x \in Y'$ に対しても $f(x) \subset b$ になっている. 従って, どんな $x \in Y$ についても $b \not\subset x$ となるが, これは矛盾である. ゆえに $\{x : j''(x \times x) \subset x\} \in F$ であり, $CF_{\kappa,\lambda} \subset F$ であることが分かる.

$Z = \{x : x \cap \kappa$ は正則ではない $\} \in F^+$ だと仮定する. κ は weakly inaccessible で Z は stationary だから, 全ての $x \in Z$ に対して $x \cap \kappa$ は基数であると仮定してよい. $c_x \subset x$ を cofinal で order type $< x \cap \kappa$ だとする. $c \in P_\kappa\lambda$ と $Z' \in F^+$ で, 全ての $x \in Z'$ に対して $c_x \subset c$ であるようなものが存在する. ここで $c \subset \kappa$ としてよいが, どんな $x \in Z'$ に対しても $x \cap \kappa \subset \cup c < \kappa$ となって, 矛盾する. □

系 3.8. *WN-フィルターが存在すれば, κ は weakly Mahlo である.*

$WCF_{\kappa,\lambda}$ で $P_\kappa\lambda$ 上の最小の strongly normal フィルターを表す. $WCF_{\kappa,\lambda}$ が自明でないフィルターであるための必要十分条件は, κ が Mahlo か $\kappa = \nu^+$ で $\nu^{<\nu} = \nu$ であることが知られている. さらに, $X \in WCF_{\kappa,\lambda}$ であるための必要十分条件は, $f : P_\kappa\lambda \to P_\kappa\lambda$ で $\{x \in P_\kappa\lambda : f''P_{\kappa_x}x \subset P(x)\} \subset X$ となるものが存在することである. κ が Mahlo ならば, $\{x \in P_\kappa\lambda : \kappa_x = x \cap \kappa$ は *inaccessible*$\} \in WCF_{\kappa,\lambda}$ が成り立つ.

Strong normality と 性質 WN の関係には次のようなものがある.

命題 3.9. *(1) $WCF_{\kappa,\lambda}$ が自明でないならば, $P_\kappa\lambda$ 上の全ての WN-フィルターは $WCF_{\kappa,\lambda}$ の拡大である.*

(2) F が $P_\kappa\lambda$ 上の strongly normal κ-saturated フィルターならば, $WN(F)$ が成り立つ.

(3) WN-フィルター F が κ-complete ならば, F は normal κ-saturated である. 従って $WCF_{\kappa,\lambda}$ や $CF_{\kappa,\lambda}$ のいかなる restriction も WN ではない.

(4) κ が Mahlo のとき, $P_\kappa\lambda$ 上の任意のフィルターに対して, 以下の条件は同値である:

1. F は *κ-complete* で WN.
2. F は *strongly normal κ-saturated.*

証明. (1) $X \in F^+$ で, 全ての $x \in X$ に対して $f(x) \in P_{\kappa_x}x$ であるとする. 仮定により κ は Mahlo である. ある $a \in P_\kappa\lambda$ に対して $Y = \{x \in X : x \cap \kappa \in \kappa \text{ and } f(x) \subset a\}$ は stationary になる. 全ての $x \in Y$ に対して $f(x) \subset a$ かつ $|P(a)| < \kappa$ である. 従って f は Y の unbounded な部分集合の上で constant になる. ゆえに $X \in WCF^+_{\kappa,\lambda}$ であることが分かった.

(2) 全ての $x \in P_\kappa\lambda$ に対して $g(x) \in P_{\kappa_x}x$ とし, $\mathcal{A} = \{g^{-1}(\{y\}) : y \in P_\kappa\lambda\} \cap F^+$ と置く. F は κ-saturated だから, $|\mathcal{A}| < \kappa$ である. $b = \bigcup\{y : g^{-1}(\{y\}) \in \mathcal{A}\}$ と置くと, $b \in P_\kappa\lambda$, $\cup\mathcal{A} \in F$, かつ全ての $x \in \cup\mathcal{A}$ に対して $g(x) \subset b$ となる.

(3) h は $Z \in F^+$ 上 regressive だとする. $c \in P_\kappa\lambda$ で $Z' = \{x \in Z : h(x) \in c\} \in F^+$ となるものが存在する. κ-completeness により h はある F^+ の元の上で constant になるから, F は normal であることが示された.

次に, $\{W_\xi : \xi < \kappa\}$ は $P_\kappa\lambda$ の F-positive な集合達による互いに素な分割とする. $W'_\xi = W_\xi \cap \widehat{\{\xi\}}$ と置き, $x \in W'_\xi$ に対しては $k(x) = \xi$ と定義する. このとき $d \in P_\kappa\lambda$ で $W = \{x \in P_\kappa\lambda : k(x) \subset d\} \in F$ を満たすものが存在する. d の元でない ξ を何でもよいから 1 つ選ぶと, $W'_\xi \cap W = \emptyset$ となるが, これは矛盾である.

(4) は (2) と (3) から導かれる. □

補題 3.10. F は $P_\kappa\lambda$ 上の *WN-フィルターとする.*

(1) 全ての $s \in P_\kappa\lambda$ に対して $X_s \in F^+$ であり, $t \supset u$ ならば $X_t \subset X_u$ であるとする. このとき, $\triangle_{\prec s}X_s \triangleq \{x \in P_\kappa\lambda :$ 全ての $s \in P_{\kappa_x}x$ に対し $x \in X_s\} \in F^+$ である.

(2) どんな $s \in P_\kappa\lambda$ に対しても $\{x \in P_\kappa\lambda : f(x) \not\subset s\} \in F^+$ ならば, $X \in F^+$ で全ての $s \in P_\kappa\lambda$ について $f^{-1}(\{s\}) \cap X \in I_{\kappa,\lambda}$ が成り立つようなものが存在する.

証明. (1) 各ペア $s, t \in P_\kappa\lambda$ に対して $X_{s\cup t} \subset X_s \cap X_t \in F^+$ である. F' を F と $\{X_s : s \in P_\kappa\lambda\}$ から生成されるフィルターとする. $F \subset F'$ だから $WN(F')$ である. もし $\triangle_{\prec s}X_s \notin F^+$ ならば, $Y = \{x \in P_\kappa\lambda :$ ある $s \in P_{\kappa_x}x$ に対して $x \notin X_s\} \in F'$ である. 従って $b \in P_\kappa\lambda$ で $Y' = \{x \in Y :$ ある $s \subset b$ に対して $x \notin X_s\} \in G$ となるものが存在する. ゆえに, $Y' \cap X_b = \emptyset$ となるが, これは矛盾である.

(2) $X_s = \{x \in P_\kappa\lambda : f(x) \not\subset s\}$ と置くと, (1) により $Z = \triangle_{\prec s}X_s \in F^+$ を得る. $x \in Z \cap f^{-1}(\{s\})$ ならば $s \notin P_{\kappa_x}x$ であるから, $Z \cap f^{-1}(\{s\}) \in I_{\kappa,\lambda}$ である. □

定理 3.11. κ は *Mahlo* で F は $P_\kappa\lambda$ *上のフィルターとする. このとき, 次のことは同値である:*

(1) F は WN.

(2) $WCF_{\kappa,\lambda} \subset F$ かつ, $f : P_\kappa\lambda \to P_\kappa\lambda$ が任意の $a \in P_\kappa\lambda$ について $\{x : f(x) \not\subset a\} \in F^+$ を満たすならば, $X \cap f^{-1}(\{a\}) \in I_{\kappa,\lambda}$ が任意の $a \in P_\kappa\lambda$ に対し成り立つような $X \in F^+$ が存在する.

証明. 命題 3.9 と補題 3.10 から, (1) が (2) を導くことが分かる. そこで, (2) が成り立つと仮定する. もし F が WN でないならば, set regressive function f でどんな $s \in P_\kappa\lambda$ に対しても $X = \{x \in P_\kappa\lambda : f(x) \not\subset s\} \in F^+$ であるものが存在する. $X \in F^+$ だから, 任意の $a \in P_\kappa\lambda$ に対して $f^{-1}(\{a\}) \cap X \in I_{\kappa,\lambda}$ となる. 一方, F は $WCF_{\kappa,\lambda}$ の拡大だから, f は X のある unbounded な部分集合上で constant でなければならない. これは矛盾である. □

次に, inaccessible でない基数に対しても WN-フィルターが存在しうることを示す.

補題 3.12. V において F は $P_\kappa\lambda$ 上の WN-フィルター, $\mu < \kappa$ で $\mathbb{P}$ は μ-*c.c.* を満たすとする. このとき, $V^{\mathbb{P}}$ において F は WN-フィルターを生成する.

証明. G を V 上 $\mathbb{P}$-generic とし, $V[G]$ において F' を次のように定める;

$$F' = \{X \subset P_\kappa\lambda : Y \in F \text{ で } Y \subset X \text{ なものがある }\}.$$

$V[G] \models$"$f : P_\kappa\lambda \to P_\kappa\lambda$ で, 全ての $x \in P_\kappa\lambda$ に対して $f(x) \in P_{\kappa_x}x$ である" とする. $\dot{f}$ を f の name とし, $X = \{x \in P_\kappa\lambda \cap V : \mu < x \cap \kappa$ は正則 $\}$ と置くと $X \in F$ である. V において, $x \in X$ に対して $g(x)$ を次のように定める.

$\mathcal{A}_x$ を 極大な anti chain $\subset \{p \in \mathbb{P} :$ ある γ_p に対して $p \Vdash$"$\{\alpha_\xi : \xi < \gamma_p\}$ は $\dot{f}(x)$ の increasing enumeration"$\}$ とする.

$p \in \mathcal{A}_x$ と $\xi < \gamma_p$ に対して $\mathcal{B}^p_\xi$ を 極大な anti chain $\subset \{q \leq p : q \parallel \dot{\alpha}_\xi\}$ とする.

$g(x) = \{\beta : q \in \bigcup\{\mathcal{B}^p_\xi : \xi < \gamma_p, p \in \mathcal{A}_x\}$ で $q \Vdash$"$\dot{\alpha}_\xi = \beta$ なものがある $\}$ と置く.

μ-c.c. により, $|\mathcal{A}_x|, |\mathcal{B}^p_\xi| < \mu$ である. 各 $p \in \mathcal{A}_x$ に対し $\gamma_p < x \cap \kappa$ だから, $|g(x)| \leq |\bigcup\{\mathcal{B}^p_\xi : p \in \mathcal{A}_x, \xi < \gamma_p\}| < x \cap \kappa$ である. $\beta \in g(x)$ ならば, q と ξ で $q \Vdash$"$\beta = \dot{\alpha}_\xi$" を満たすものが存在するが, $q \Vdash$"$\beta \in x$" 従って $\beta \in x$ である. ゆえに, 全ての $x \in X$ に対して $g(x) \in P_{\kappa_x}x$ である. F は WN だから, $a \in P_\kappa\lambda$ で $Y = \{x \in P_\kappa\lambda : g(x) \subset a\} \in F$ となるものが存在する.

$\Vdash_{\mathbb{P}}$"$\dot{f}(x) \subset g(x)$" なので, $V[G] \models$" 全ての $x \in Y$ に対して $f(x) \subset a$" である.

従って $V[G] \models$"$\{x \in P_\kappa\lambda : f(x) \subset a\} \in F'$" である. □

定理 3.13. *ある種の巨大基数の仮定のもとで, Con(κ は inaccessible でないが $P_\kappa\lambda$ 上に WN-フィルターが存在する) が言える. 実際, 「$P_\kappa\lambda$ 上に normal だが strongly normal でない κ-saturated フィルターが存在する」という主張は無矛盾である.*

証明. $P_\kappa\lambda$ 上に strongly normal (従って κ-complete) κ-saturated フィルターが存在するモデルから出発して、単純に κ 個の Cohen reals を付け加える. $Add(\omega,\kappa)$ は c.c.c. を満たすから, ground model の strongly normal κ-saturated フィルターは κ-complete WN-フィルターを生成する. □

今度は, ある程度の completenes をもった WN-フィルターの存在の下での stationary reflection を考察する.

定義 3.14. $\omega < \mu \leq \kappa$ に対し, $X \subset P_\kappa\lambda$ は, unbounded で, μ 未満の長さの $\subset$-increasing chain について閉じているとき $< \mu$ *club* であると言う. $CF^\mu_{\kappa,\lambda}$ で $<\mu$ club 達により生成されるフィルターを表す. 従って, $CF^\kappa_{\kappa,\lambda} = CF_{\kappa,\lambda}$ である.

$S \subset P_\kappa\lambda$ が $CF^\mu_{\kappa,\lambda}$-*stationary* とは $S \in (CF^\mu_{\kappa,\lambda})^+$, つまり, S が全ての $<\mu$ club と空でない共通部分をもつことである.

命題 3.15. *(1) 基数 μ に対して, $CF^\mu_{\kappa,\lambda}$ は $P_\kappa\lambda$ 上の κ-complete normal フィルターである.*

(2) $\mu < \mu'$ ならば $CF^\mu_{\kappa,\lambda} \supseteq CF^{\mu'}_{\kappa,\lambda}$ である.

(3) $|\mu| < \mu$ ならば, $CF^\mu_{\kappa,\lambda} = CF^{\mu^+}_{\kappa,\lambda}$ である.

(4) μ が 極限基数ならば, $CF^\mu_{\kappa,\lambda} = \bigcap_{\delta<\mu} CF^\delta_{\kappa,\lambda}$ である.

(5) μ が特異基数ならば, $CF^\mu_{\kappa,\lambda} = CF^{\mu^+}_{\kappa,\lambda}$ である.

証明. (1) だけを示す. 他は自明である.

$\delta < \kappa$ をとる. $\alpha < \delta$ に対し C_α は $<\mu$ club とし, $C = \bigcap_{\alpha<\delta} C_\alpha$ と置く. $\langle x_\xi | \xi < \gamma\rangle$ は C の元達の increasing chain で $\gamma < \mu$ とする. C_α は $<\mu$ club だから, $\bigcup_{\xi<\gamma} x_\xi \in C_\alpha$である. ゆえに $\bigcup_{\xi<\gamma} x_\xi \in C$ となり, C は $<\mu$-closed である.

C_α 達は unbounded で $\delta < \kappa$ であるから, 与えられた $x \in P_\kappa\lambda$ に対し, $\langle y^0_\alpha | \alpha < \delta\rangle$ を $y^0_0 = x$, $y^0_\alpha \subset y^0_{\alpha+1} \in C_\alpha$, かつ $y^0_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} y^0_\beta$ がすべての極限順序数 $\alpha < \delta$ に対して成り立つように, 帰納的に定義することができる. $x_1 = \bigcup_{\alpha<\delta} y^0_\alpha$ と置く.

これを繰り返して $\langle x_n | n \in \omega\rangle$ を定める. x_n が定義されたとき, $y^n_0 = x_n$, $y^n_\alpha \subset y^n_{\alpha+1} \in C_\alpha$, 極限順序数 $\alpha < \delta$ に対して $y^n_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} y^n_\alpha$ とし, $x_{n+1} = \bigcup_{\alpha<\delta} y^n_\alpha$ とすればよい.

最後に $x_\omega = \bigcup_{n\in\omega} x_n$ と置くと, $x \subset x_\omega$ は明らか. $x_\omega = \bigcup_{n\in\omega} y^{n+1}_\alpha$ で $\langle y^{n+1}_\alpha | n \in \omega\rangle$ は C_α の元達の increasing chain だから, $x_\omega \in C_\alpha$ で

ある．従って $x \subset x_\omega \in C$ となり，$CF^{\mu}_{\kappa,\lambda}$ が κ-complete なことが示された．

Normality を示すために，$\alpha < \lambda$ に対し D_α は $< \mu$ club とし，$D = \triangle_{\alpha<\lambda} D_\alpha$ と置く．$\eta < \mu$ として，勝手な D の元達の increasing chain $\langle z_\zeta | \zeta < \eta \rangle$ をとり，$z = \bigcup_{\zeta<\eta} z_\zeta$ と置く．$\alpha \in z$ に対し，$\zeta_\alpha < \eta$ で 任意の $\zeta \geq \zeta_\alpha$ について $\alpha \in z_\zeta$ であるものが存在する．ここで，全ての $\zeta \geq \zeta_\alpha$ に対して $z_\zeta \in D_\alpha$ である．$\langle z_\zeta | \zeta_\alpha \leq \zeta < \eta \rangle$ は D_α の元達の increasing chain だから，$z = \bigcup_{\zeta_\alpha \leq \zeta} z_\zeta \in D_\alpha$である．よって $z \in D$ であり，D は $< \mu$-closed である．

$w \in P_\kappa\lambda$ が与えられたとする．$w_0 = w$ と置く．$w_n \in P_\kappa\lambda$ が定義されたとき，各 $\alpha \in w_n$ に対し，$w^n_\alpha \in D_\alpha$ で $w_n \subset w^n_\alpha$ を満たすものをとる．$w_{n+1} = \bigcup_{\alpha \in w_n} w^n_\alpha$ と置く．最後に $w_\omega = \bigcup_{n\in\omega} w_n$ とすると，$w_\omega \supset w_0 = w$ である．任意の $\alpha \in w_\omega$ に対し，$m \in \omega$ で 全ての $n \geq m$ について $\alpha \in w_n$ であるものが存在する．全ての $n \geq m$ に対して w^n_α が定義されていて $w_n \subset w^n_\alpha \subset w_{n+1}$ となっているから，$w_\omega = \bigcup_{n \geq m} w^n_\alpha \in D_\alpha$ である．従って $w_\omega \in D$ であるが，これは D が unbounded なことを示している． □

定義 3.16. $x \in P_\kappa\lambda$ に対し，$cf(P_{\kappa_x} x) = \min\{|X| : X$ は $P_{\kappa_x} x$ の unbounded な部分集合 $\}$ とする．

補題 3.17. *$P_\kappa\lambda$ 上の任意の μ^+-complete WN-フィルター F に対し，$\{x : cf(P_{\kappa_x} x) > \mu\} \in F$ が成り立つ．*

証明. 結論を否定すると，$X = \{x : cf(P_{\kappa_x} x) \leq \mu\} \in F^+$ である．$F' = F \restriction X = \{A \subset P_\kappa\lambda :$ ある $B \in F$ に対し $B \cap X \subset A\}$ と置く．$x \in X$ に対し，$B_x \subset P_{\kappa_x} x$ は unbounded で $\{s^x_\alpha : \alpha < \mu\}$ をその enumeration とする．$\alpha < \mu$ に対し，$f_\alpha : X \to P_\kappa\lambda$ を $f_\alpha(x) = s^x_\alpha$ で定義する．f_α は set regressive だから，$a_\alpha \in P_\kappa\lambda$ と $Y_\alpha \in F'$ で，すべての $x \in Y_\alpha$ に対して $f_\alpha(x) \subset a_\alpha$ が成り立つものが存在する．$a = \bigcup_{\alpha<\mu} a_\alpha$，$Y = \bigcap_{\alpha<\mu} Y_\alpha$ と置く．このとき $a \in P_\kappa\lambda$ かつ $Y \in F'$ であるが，すべての $x \in Y$ に対し $x = \cup B_x \subset a$ であることになり，矛盾する． □

注意 3.18. 上の補題では，「全ての set regressive function f に対して，$X \in F$ で $f''X \in I_{\kappa,\lambda}$ になるものが存在する」ということだけで十分である．

定理 3.19. *$\omega \leq \mu < \kappa$ で F は $P_\kappa\lambda$ 上の μ^+-complete な WN-フィルターとする．S が $CF^{\mu^+}_{\kappa,\lambda}$-stationary ならば，$\{x \in P_\kappa\lambda : S \cap P_{\kappa_x} x$ は $P_{\kappa_x} x$ で stationary $\} \in F$ である．*

証明. S は $CF^{\mu^+}_{\kappa,\lambda}$-stationary だが，$X = \{x \in P_\kappa\lambda : S \cap P_{\kappa_x} x$ は $P_{\kappa_x} x$ で stationary でない $\} \in F^+$ と仮定する．全ての $x \in X$ に対して $x \cap \kappa$ は μ より大きい正則な基数で，$cf(P_{\kappa_x} x) > \mu$，かつ $C_x \subset P_{\kappa_x} x$ は $C_x \cap S = \emptyset$ であるような club とする．$F' = F \restriction X$ と置く．

$C=\{y\in P_\kappa\lambda:\{x\in X:y\in C_x\}\in F'\}$ は $<\mu^+$ club であることを示す.

勝手な $z\in P_\kappa\lambda$ をとる. $\{x\in X:z\in P_{\kappa_x}x\}\in F'$ であることに留意する. $f_0(x)\in C_x$ を, もし存在するなら $z\subset f_0(x)$ であるようなものとし, そのようなものがないならば $f_0(x)=\emptyset$ とする. $a_0\in P_\kappa\lambda$ と $X_0\in F'$ で, 任意の $x\in X_0$ に対し $z\subset f_0(x)\subset a_0$ であるものが存在する.

$a_n\in P_\kappa\lambda$, $X_n\in F'$ と f_n が, 全ての $x\in X_n$ について $f_n(x)\subset a_n$ であるように定まったとする. $\{x\in X:a_n\in P_{\kappa_x}x\}\in F'$ だから, set regressive な f_{n+1} で $\{x:a_n\subset f_{n+1}(x)\in C_x\}\in F'$ であるものを定義することができ, $a_{n+1}\in P_\kappa\lambda$ と $X_{n+1}\in F'$ で, 任意の $x\in X_{n+1}$ に対し $a_n\subset f_{n+1}(x)\subset a_{n+1}$ となるものを見つけることができる.

$y=\bigcup_{n\in\omega}a_n$, $Y=\bigcap_{n\in\omega}X_n$ と置くと, $a\in P_\kappa\lambda$ で $Y\in F'$ である. 全ての $x\in Y$ に対し

$$z\subset f_0(x)\subset a_0\subset\cdots\subset a_n\subset f_{n+1}(x)\subset a_{n+1}\subset\cdots\subset y$$

が成り立ち, 全ての $n\in\omega$ に対し $f_n(x)\in C_x$ である. C_x は closed で $cf(P_{\kappa_x}x)>\mu\geq\omega$ だから, $y=\bigcup_{n\in\omega}f_n(x)\in C_x$ を得る.

従って $z\subset y\in C$ となるから, C は unbounded である.

C が closed なことを示すために, $\langle y_\alpha|\alpha<\mu\rangle$ を C の元達の increasing chain とし, $w=\bigcup_{\alpha<\mu}y_\alpha$ とする. 明らかに $w\in P_\kappa\lambda$ である. 全ての $\alpha<\mu$ について $\{x\in X:y_\alpha\in C_x\}\in F'$ だから, 全ての $x\in Z$ と $\alpha<\mu$ に対し $y_\alpha\in C_x$ であるような $Z\in F'$ が存在する. C_x は $P_{\kappa_x}x$ の club で, $x\cap\kappa$ は μ より大きい正則な基数だから, 全ての $x\in Z$ に対して $w\in C_x$ が成り立つ. 従って $w\in C$ であり, C が $<\mu^+$-closed なことが分かった.

以上から, $C\subset P_\kappa\lambda$ は $<\mu^+$-club だから, $S\cap C\neq\emptyset$ である. $y\in S\cap C$ をとると, $\{x\in X:y\in C_x\}\in F'$ となるから $\{x\in X:S\cap C_x\neq\emptyset\}\neq\emptyset$ となり, 矛盾が出る. □

系 **3.20.** $P_\kappa\lambda$ 上に *strongly normal κ-saturated* フィルター F が存在するならば, あらゆる $P_\kappa\lambda$ の *stationary* な部分集合は F のある元の上に *reflect* する.

最後に WN-フィルターの nonregularity に触れる. $P_\kappa\lambda$ 上のフィルターとしては $I^*_{\kappa,\lambda}$ の拡大だけを考えているので, 必然的に (κ,λ)-regular になる.

命題 **3.21.** F を $P_\kappa\lambda$ 上の WN-フィルターとし, $cf(\lambda)\geq\kappa$ とすると, 次のことが成り立つ.

(1) $\{x:cf(\sup(x))\geq x\cap\kappa\}\in F$.

(2) $P_\kappa\lambda$ 上の F の拡大フィルターは全て, どんな $\mu<\kappa$ に対しても (μ,λ)-*regular* ではない.

証明. (1) $F \supset CF_{\kappa,\lambda}$ だから, $\{x : o.t.(x)$ は極限順序数 $\} \in F$ である. $X = \{x \in P_\kappa\lambda : cf(\sup(x)) < x \cap \kappa\} \in F^+$ と仮定する. 各 $x \in X$ に対し, $a_x \subset x$ を x の cofinal な部分集合で $|a_x| < x \cap \kappa$ を満たすものとする. このとき, ある $a \in P_\kappa\lambda$ に対して, $Y = \{x \in P_\kappa\lambda : a_x \subset a\} \in F^+$ となる. 全ての $x \in Y$ に対して $x \subset \sup(a) < \lambda$ となるが, これは矛盾である.

(2) $\mathcal{U}$ を $P_\kappa\lambda$ 上の F の拡大極大フィルターとする. (1) より $\{x : cf(\sup(x)) > \mu\} \in \mathcal{U}$ である. $AN(\mathcal{U})$ だから, $\{[c_\gamma]_\mathcal{U} : \gamma < \lambda\}$ は $[\langle \sup(x) | x \in P_\kappa\lambda \rangle]_\mathcal{U}$ において cofinal になっている. そこで, 次の主張を証明すればよい.

主張 3.22. $\mathcal{U}$ が (μ, λ)-*regular* な $P_\kappa\lambda$ 上の極大フィルターで, $f : P_\kappa\lambda \to \lambda$ が $\{x : cf(f(x)) \geq \mu\} \in \mathcal{U}$ を満たすならば, $V^{P_\kappa\lambda}/\mathcal{U} \models$ "$cf([f]_\mathcal{U}) \geq \lambda^+$" が成り立つ.

証明. (主張) 全ての x に対して, $cf(f(x)) \geq \mu$ と仮定してよい. $\{g_\alpha : \alpha < \lambda\}$ は $g_\alpha : P_\kappa\lambda \to \lambda$ で, 全ての $\alpha < \lambda$ について $[g_\alpha]_\mathcal{U} < [f]_\mathcal{U}$ が成り立っているとする. さらに, 任意の x に対して $g_\alpha(x) < f(x)$ としてよい. $\{X_\alpha : \alpha < \lambda\}$ を (μ, λ)-regularity を保証する族とし, $g(x) = \sup\{g_\alpha(x) : x \in X_\alpha\}$ とする.

全ての x に対し, $|\{\alpha : x \in X_\alpha\}| < \mu$ 従って $g(x) < f(x)$ が成り立つ. 全ての $\alpha < \lambda$ に対して $[g_\alpha]_\mathcal{U} \leq [g]_\mathcal{U}$ であることは, 明らかである. □

□

References

[1] Y. Abe, *Weakly normal ideals on $P_\kappa\lambda$ and the singular cardinal hypothesis,* Fund. Math. 143 (1993), 97-106.

[2] A. Apter and S. Shelah, *Menas' result is best possible,* Trans. Amer. Math. Soc. 349 (1997), 2007-2034.

[3] D. M. Carr, J. P. Levinski and D. H. Pelletier, *On the existence of strongly normal ideals on $P_\kappa\lambda$,* Arch. Math. Logic 30 (1990), 59-72.

[4] M. Gitik, *Nonsplitting stationary subsets of $P_\kappa\kappa^+$*, J. Symbolic Logic 50 (1985), 881-894.

[5] A. Kanamori, *Weakly normal filters and irregular ultrafilters,* Trans. Amer. Math. Soc. 220 (1976), 393-399.

[6] T. Jech, *Some combinatorial problems concerning uncountable cardinals,* Ann. Math. Logic 5 (1973), 165-198.