数理解析研究所講究録
1097巻 1999年 1-26

Introduction to the theory of Fontaine on p-adic Galois representations

辻　雄 (Takeshi Tsuji)
京大数理研 (RIMS, Kyoto University)

J. -M. Fontaine によって導入された環 B_{dR}, B_{crys}, B_{st} および, それらを使って定義される p 進表現に関する概念: de Rham 表現, crystalline 表現, semi-stable 表現について, 環 $B_\bullet$ ($\bullet = \mathrm{dR}, \mathrm{crys}, \mathrm{st}$) の具体的な構成とその基本性質の証明に重点をおきつつ解説する ([Fo3], [Fo4], [Fo7] [Fo8]).

p 進体 (より正確には剰余体が完全な混標数 $(0,p)$ の完備離散付値体. 例えば $\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大) の絶対ガロア群 G_K の l 進表現 (lは素数) を, G_K の連続線型な作用を持つ $\mathbb{Q}_l$ 上の有限次元ベクトル空間と定義する. 体 K 上のアーベル多様体の l 進 Tate 加群や, 保型形式にともなう l 進表現を分解群に制限したもの, あるいはより一般に, K 上の代数多様体 X の l 進エタール・コホモロジー $H^m_{\text{ét}}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_l)$ が興味深い例である. 良く知られているように, $l \neq p$ の場合と $l = p$ の場合とでは G_K の l 進表現のふるまいは大きく異なる. $l \neq p$ の場合, K の剰余体が有限であれば, すべての l 進表現は quasi-unipotent, すなわち K を適当な有限次拡大でおきかてやれば, tame な表現になりさらに惰性群の作用が unipotent になる. K が一般の場合でも, エタール・コホモロジー群から来る l 進表現なら同じことが成り立つ. しかしながら $l = p$ の場合は p 進表現はこのような簡単な構造を持たず, 一般に惰性群の $GL(V)$ での像は非常に大きくなる. この解説ではふれないが, [Sen1], [Sen2], [Ser1], [Ser3], [W1], [W2] などで具体的にどのような像を持つかについて研究されている. [Fo5]§4, §6 の概説も参照.

Fontaine によって導入された p 進表現に関する概念: de Rham 表現, crystalline 表現, semi-stable 表現は, l 進表現における l 進表現全体, 不分岐表現, unipotent 表現と対応している. これらの p 進表現に伴って, ある線型または半線型な付加構造をもつある有限次元ベクトル空間を構成でき, crystalline 表現, semi-stable 表現の場合, この線型的なデータからもとの表現を復元することができる. この解説では触れないが, G_K の p 冪 torsion 表現に関する crystalline 表現, semi-stable 表現の理論もある ([Fo-L], [Br1]). また任意の p 進表現を φ-Γ 加群という線型的なデータでとらえる理論もある ([Fo5]§2, [Fo6], [C]). p 進表現の圏と φ-Γ 加群の圏は圏同値になる.

記号： K を剰余体 k が完全な混標数 $(0,p)$ の完備離散付値体, O_K をその整数環とする. K の代数的閉包 $\overline{K}$ を一つとり, その剰余体を $\overline{k}$, その整数環 を$O_{\overline{K}}$ と書く. $\overline{k}$ は k の代数的閉包である. G_K を $\overline{K}/K$ のガロア群, G_k を $\overline{k}/k$ のガロア群とし, I_K を G_K の惰性群とする. $G_K/I_K \cong G_k$ である. C を $\overline{K}$ の (付値から決まる位相に関する) 完備化とし, O_C をその整数環とする. C, O_C には自然に G_K が連続に作用する. W を k に係数をもつ Witt vector のなす環 $W(k)$, K_0 をその分数体とする. K は K_0 上の有限次完全分岐拡大になる. また $\overline{k}$ に係数をもつ Witt vector のなす環 $W(\overline{k})$ の分数体を P_0 と書く. P_0 には G_k が自然に作用する. k, W, K_0, $W(\overline{k})$, P_0 の Frobenius をいずれも σ と書く. 最後に K の素元 π を一つとり固定する. また $\mathbb{N}$ は 0 以上の整数の集合を表わすとする.

§1. 環 B_{dR}, B_{crys}, B_{st} ; その構造と基本性質

この§では, J.-M. Fontaine によって定義された K に伴う環たち B_{dR}, B_{crys}, B_{st} がどういう構造を持ち, またどういう性質を持っているかを述べる. これらの環の説明に入る前に, まず体 C の連続ガロア・コホモロジー群から復習しよう. 良く知られている

ように, 体 C は代数閉体である. 絶対ガロア群 G_K の $\overline{K}$ への作用は C への連続な作用へ延びるが, この作用に関して J. Tate は次の定理を証明した.

定理 1.1([Ta] §3). 整数 i, j に対して,

$$H^i_{\mathrm{cont}}(G_K, C(j)) = \begin{cases} K & ((i,j) = (0,0), (1,0)\text{の時}) \\ 0 & (\text{それ以外の時}) \end{cases}$$

である. ここで $C(j) := C \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{Q}_p(j)$ で, G_K の作用は $g(x \otimes y) = g(x) \otimes g(y)$ $(g \in G_K, x \in C, y \in \mathbb{Q}_p(j))$ で定義する. この作用は円分指標 $\chi_{\mathrm{cyclo}}\colon G_K \to \mathbb{Z}_p^*$ を用いて, $g(x \otimes y) = \chi_{\mathrm{cyclo}}^j(g) \cdot g(x) \otimes y$ とも書ける.

C のかわりに $\overline{K}$ をとると, $H^i(G_K, \overline{K}) = 0$ $(i > 0)$ となることに注意. $H^1_{\mathrm{cont}}(G_K, C)$ は, $\log(\chi_{\mathrm{cyclo}})\colon G_K \to \mathbb{Z}_p \subset C$ という連続な 1-cocycle で生成される. また $i = 0$ の場合から, C は $\mathbb{Q}_p(j)$ $(j \in \mathbb{Z}, j \neq 0)$ というガロア表現を含まないことが分かる.

証明の方針: K_∞ を K の円分 $\mathbb{Z}_p$ 拡大とし, $n \in \mathbb{N}$ に対し, K_n をその次数 p^n の (唯一の) 部分拡大とする.

(Step1) K_∞ の任意の有限次拡大 L は「ほとんど」不分岐であることを示す. より厳密には, $n \in \mathbb{N}$ と K_n の有限次拡大 L_n で $L \cong L_n \otimes_{K_n} K_\infty$ となるものをとり, $L_m := L_n \otimes_{K_n} K_m$ $(m \geq n)$ とおくと, $v(\mathcal{D}_{L_m/K_m})$ は $m \to \infty$ の時 0 に収束する. ここで, $\mathcal{D}_{L_m/K_m}$ は L_m の K_m 上の different で, v は L の (加法的) 付値とする.

(Step2) $\mathfrak{m}_\infty$ を K_∞ の整数環 O_{K_∞} の極大イデアルとする. $\mathfrak{m}_\infty^2 = \mathfrak{m}_\infty$ である. (Step1) を用いて, K_∞ 上の任意の有限次ガロア拡大 L と $r \in \mathbb{N}$ に対して,

$$H^i(\mathrm{Gal}(L/K_\infty), O_L/p^r O_L) \quad (i > 0)$$
$$\mathrm{Coker}(O_{K_\infty}/p^r O_{K_\infty} \hookrightarrow H^0(\mathrm{Gal}(L/K_\infty), O_L/p^r O_L))$$

が $\mathfrak{m}_\infty$ で消えることを示す. (良く知られているように, K の有限次不分岐ガロア拡大 L に対して, $H^i(\mathrm{Gal}(L/K), O_L/p^r O_L) = 0$ $(i > 0)$, $H^0(\mathrm{Gal}(L/K), O_L/p^r O_L) = O_K/p^r O_K$ となる. この類似.) L に関して順極限をとって, L を $\overline{K}$ におきかえても良い.

(Step3) $\mathrm{Gal}(K_\infty/K) \cong \mathbb{Z}_p$ であることから, 具体的な計算により

$$H^i(\mathrm{Gal}(K_\infty/K), \hat{K}_\infty(j)) = \begin{cases} K & ((i,j) = (0,0), (1,0)\text{の時}) \\ 0 & (\text{それ以外の時}) \end{cases}$$

となることが分かる. ここで $\hat{K}_\infty$ は K_∞ の付値による完備化. (Step2) と合わせて定理を得る. □

注 1.2. J. Tate はこの定理を用いて, O_K 上の p-divisible group に伴う Tate 加群の Hodge-Tate 分解を証明した ([Ta]§4). 例 4.5 参照. G. Faltings は, この定理およびその証明の手法を, O_K 上 smooth な環, さらにより一般に log smooth な環の場合に拡張することによって, p 進 Hodge 理論における比較定理 : Hodge-Tate 予想, crystalline 予想, semi-stable 予想を証明した ([Fa1], [Fa2], [Fa3]). 例 4.7 参照.

さて話を B_{dR}, B_{crys}, B_{st} に戻そう．まずは B_{dR} から．

B_{dR} は剰余体が C の完備離散付値体で，G_K が作用する．B_{dR} の正規化された付値 v, $v(B_{\mathrm{dR}}^*) = \mathbb{Z}$ を用いて，B_{dR} に減少 filtration $Fil^i B_{\mathrm{dR}}$ $(i \in \mathbb{Z})$ を $\{x \in B_{\mathrm{dR}} | v(x) \geq i\}$ で定義する．G_K の作用はこの減少 filtration を保ち，剰余体への射影 $Fil^0 B_{\mathrm{dR}} \to C$ は G_K の作用と可換である．B_{dR} の離散付値環を B_{dR}^+ と書く．さらに B_{dR} は次の構造および性質を持つ．

$(1)_{\mathrm{dR}}$ G_K の作用と可換な自然な埋め込み $P_0 \otimes_{K_0} \overline{K} \hookrightarrow B_{\mathrm{dR}}^+$ があって，剰余体への射影 $B_{\mathrm{dR}}^+ \to C$ との合成は，埋め込み $P_0 \otimes_{K_0} \overline{K} \subset C$ と一致する．

$(2)_{\mathrm{dR}}$ G_K の作用と可換な $\mathbb{Q}_p$ 線型な自然な単射 $\mathbb{Q}_p(1) \hookrightarrow Fil^1 B_{\mathrm{dR}}$ が存在し，$\mathbb{Q}_p(1)$ の零でない元の像は B_{dR} の素元となる．(C には $\mathbb{Q}_p(1)$ が含まれていなかったことに注意.) B_{dR} の体構造を用いて，自然な単射

$(2.1)_{\mathrm{dR}}$ $\mathbb{Q}_p(i) \hookrightarrow Fil^i B_{\mathrm{dR}}$ $(i \in \mathbb{Z})$

を得，さらに G_K 同変な自然な同型

$(2.2)_{\mathrm{dR}}$ $\mathrm{gr}^i_{Fil} B_{\mathrm{dR}} \cong C(i)$ $(i \in \mathbb{Z})$

を得る．

$(3)_{\mathrm{dR}}$ $(1)_{\mathrm{dR}}$, $(2.2)_{\mathrm{dR}}$ および定理 1.1 より，$B_{\mathrm{dR}}^{G_K} = K$ を得る．

実は B_{dR} は K をその有限次拡大に置き換えても変わらない．より厳密には，K の $\overline{K}$ に含まれる有限次拡大 L(と $\overline{K}$) に伴う B_{dR} は，K(と $\overline{K}$) に伴う B_{dR} において G_K の作用を $\mathrm{Gal}(\overline{K}/L)$ に制限したものと一致する．

次に B_{crys} であるが，これは B_{dR} の G_K の作用に関して安定な部分環で，P_0 および $\mathbb{Q}_p(i)$ $(i \in \mathbb{Z})$ を含む．さらに B_{dR} の減少 filtration から誘導される filtration に関して，$\mathrm{gr}^i_{Fil} B_{\mathrm{crys}} = \mathrm{gr}^i_{Fil} B_{\mathrm{dR}}$ $(i \in \mathbb{Z})$ となる．($C[[X]][X^{-1}]$ とその部分環 $\{\sum_{n \geq 0} a_n X^n \in C[[X]] \mid r^n |a_n| \to 0\ (n \to \infty)\}[X^{-1}]$ $(r \in \mathbb{R}, r > 0)$ の関係に似ている.) さらに B_{crys} は次の構造および性質を持つ．

$(1)_{\mathrm{crys}}$ P_0 の Frobenius σ について半線型で G_K の作用と可換な単射自己準同型 φ: $B_{\mathrm{crys}} \to B_{\mathrm{crys}}$ (Frobenius と呼ぶ) を持ち，次の性質をみたす．

$(1.1)_{\mathrm{crys}}$ $t \in \mathbb{Q}_p(1) \subset B_{\mathrm{crys}}$ に関して，$\varphi(t) = pt$.

$(1.2)_{\mathrm{crys}}$ $Fil^0 B_{\mathrm{dR}} \cap B_{\mathrm{crys}}^{\varphi=1} = \mathbb{Q}_p$.

上の 2 性質および $(2)_{\mathrm{dR}}$ より，さらに

$(1.3)_{\mathrm{crys}}$ $i \in \mathbb{Z}$, $x \in \mathbb{Q}_p(i)$ に対して，$\varphi(x) = p^i x$ で，$Fil^i B_{\mathrm{dR}} \cap B_{\mathrm{crys}}^{\varphi=p^i} = \mathbb{Q}_p(i)$

となることが分かる．

$(2)_{\mathrm{crys}}$ 自然な射 $K \otimes_{K_0} B_{\mathrm{crys}} \to B_{\mathrm{dR}}$ は単射.

$(3)_{\mathrm{crys}}$ $(2)_{\mathrm{crys}}$ と $(3)_{\mathrm{dR}}$ より，$B_{\mathrm{crys}}^{G_K} = K_0$ を得る．

$(4)_{\mathrm{crys}}$ B_{crys} の G_K の作用に関して安定な 1 次元 $\mathbb{Q}_p$ 部分ベクトル空間は，$P_0 \cdot \mathbb{Q}_p(i)$ $(i \in \mathbb{Z})$ に入る．

この最後の性質 $(4)_{\mathrm{crys}}$ は，crystalline 表現に filtered φ-module を対応させる関手が忠実充満になることを示すのに必要になる．

B_{dR} と同様 B_{crys} も K をその有限次拡大に置き換えても変わらない．

最後に B_{st} を説明しよう．これは, B_{crys} とは違って, K の素元 π の取り方に拠る G_K の作用に関して安定な B_{dR} の部分環で, B_{crys} を含んでいる．B_{st} は次の構造および性質を持つ．

$(1)_{\mathrm{st}}$ π の $\overline{K}$ における p 冪乗根の系 $s=(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $s_0=\pi$, $s_{n+1}^p=s_n$ $(n\in\mathbb{N})$ をとるごとに, B_{st} の自然な元 u_s で次の性質を持つものがある．

$(1.1)_{\mathrm{st}}$ B_{st} は u_s を不定元とする B_{crys} 上の 1 変数多項式環である．

$(1.2)_{\mathrm{st}}$ $g\in G_K$ に対して, $g(s):=(g(s_n))_{n\in\mathbb{N}}$ とおくと, g の u_s への作用は $g(u_s)=u_{g(s)}$ で与えられる．

$(1.3)_{\mathrm{st}}$ 別の π の p 冪乗根の系 $s'=(s'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ をとると, $u_{s'}$ と u_s は次の関係式を満たす．1 の p 冪乗根の系 $(s'_n s_n^{-1})_{n\in\mathbb{N}}$ から定まる $\mathbb{Z}_p(1)(\subset B_{\mathrm{crys}})$ の元を t とすると, $u_{s'}=u_s+t$.

$(2)_{\mathrm{st}}$ $(1.1)_{\mathrm{st}}$, $(1.3)_{\mathrm{st}}$ および $(1.1)_{\mathrm{crys}}$ より, $\varphi(u_s)=p\cdot u_s$ とおくことによって, B_{crys} の Frobenius は B_{st} の Frobenius $\varphi\colon B_{\mathrm{st}}\hookrightarrow B_{\mathrm{st}}$ へ延長できる．$(1.2)_{\mathrm{st}}$ より，これは G_K の作用と可換である．

$(3)_{\mathrm{st}}$ $(1.1)_{\mathrm{st}}$, $(1.3)_{\mathrm{st}}$ より, B_{st} の B_{crys}-derivation $N\colon B_{\mathrm{st}}\to B_{\mathrm{st}}$ (monodromy operator と呼ぶ) を $N(u_s)=1$ で定義できる．$(1.2)_{\mathrm{st}}$ よりこれは G_K の作用と可換である．これは Frobenius との間に

$(3.1)_{\mathrm{st}}$ $N\varphi=p\varphi N$

という関係式を満たす．また,

$(3.2)_{\mathrm{st}}$ $B_{\mathrm{st}}^{N=0}=B_{\mathrm{crys}}$

であり, 従って $(1.2)_{\mathrm{crys}}$ より,

$(3.3)_{\mathrm{st}}$ $Fil^0 B_{\mathrm{dR}}\cap B_{\mathrm{st}}^{N=0,\varphi=1}=\mathbb{Q}_p$

を満たす．

$(4)_{\mathrm{st}}$ 自然な射 $K\otimes_{K_0}B_{\mathrm{st}}\to B_{\mathrm{dR}}$ は単射．

$(5)_{\mathrm{st}}$ $(4)_{\mathrm{st}}$ と $(3)_{\mathrm{dR}}$ より, $B_{\mathrm{st}}^{G_K}=K_0$.

$(6)_{\mathrm{st}}$ B_{st} の G_K の作用に関して安定な 1 次元 $\mathbb{Q}_p$ 部分ベクトル空間は, $P_0\cdot\mathbb{Q}_p(i)$ $(i\in\mathbb{Z})$ に入る．

B_{crys} のときと同様, この最後の性質 B_{st} は, semi-stable 表現に filtered (φ,N)-module を対応させる関手が忠実充満であることを示すのに必要になる．

すでに述べたように B_{st} は K の素元 π によるが, 実は B_{dR} への埋込み射を忘れれば, (G_K の作用, φ, N と可換な) 自然な同型を除いて, 素元のとりかたに拠らない．さらに, K の $\overline{K}$ に含まれる有限次拡大 L をとると, L に伴う B_{st} は, B_{dR} への埋め込みを忘れれば, K に伴う B_{st} において G_K の作用を $\mathrm{Gal}(\overline{K}/L)$ へ制限し, N を $e^{-1}N$ (e は L/K の分岐指数) で置き換えたものと自然に同型になる．以後これらを同一視する．K の素元 π, K' の素元 π' に対応する B_{st} の B_{dR} への埋込みをそれぞれ ι_π, $\iota_{\pi'}$ と書き, N を K に対応する B_{st} の monodromy operator とすると,

$$\iota_{\pi'}(x)=\sum_{n\geq 0}(n!)^{-1}(-\log((\pi')^e\pi^{-1}))^n\iota_\pi(N^n(x)).\qquad (x\in B_{\mathrm{st}})$$

となる．

注 1.3. semi-stable 予想がうまく成り立つようにするためには, log crystalline cohomology に自然に定まる monodromy operator か B_{st} の monodromy operator のどちらか一方の符合を反転させる必要がある. このため [Tsu] においては, B_{st} の方の符合を反転し, $N(u_s)=-1$ と定義している.

§2. 環 B_{dR}, B_{crys}, B_{st} ; その構成

この§では, §1 で説明した環 B_{dR}, B_{crys}, B_{st} の具体的な構成とその基本性質の証明を与える.

まず標数 p の環 R を射影系

$$O_{\overline{K}}/pO_{\overline{K}} \xleftarrow{\mathrm{Frob}} O_{\overline{K}}/pO_{\overline{K}} \xleftarrow{\mathrm{Frob}} O_{\overline{K}}/pO_{\overline{K}} \xleftarrow{\mathrm{Frob}} \cdots$$

の射影極限で定義する. ここで Frob は絶対 Frobenius $x \mapsto x^p$ である. R の絶対 Frobenius は全単射になる. 環 R の元は $O_{\overline{K}}/pO_{\overline{K}}$ の元の系 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ で $a_{n+1}^p = a_n$ $(n\in\mathbb{N})$ を満たすものにほかならず, その和, 積は成分ごとの和, 積となる. p の p 冪乗根の系 $(\nu_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\nu_0=p$, $\nu_{n+1}^p=\nu_n$ $(n\in\mathbb{N})$ を一つとり, R の元 $\underline{p}$ を $(\nu_n \mod p)_{n\in\mathbb{N}}$ で定義する. 同様に π の p 冪乗根の系を一つとって, R の元 $\underline{\pi}$ を定義する. また単射な群準同型 $\varprojlim_n \mu_{p^n}(O_{\overline{K}}) \to R^*$; $\varepsilon=(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto \underline{\varepsilon} := (\varepsilon_n \mod p)_{n\in\mathbb{N}}$ がある. ここで左辺の射影極限は p 倍写像に関してとる.

これから構成する 3 つの環は, R 係数の Witt vector のなす環 $W(R)$ を適当に変形して得られるものである. まず $W(R)$ から O_C への写像 θ を

$$\theta((a_0,a_1,a_2,\dots)) = \lim_{m\to\infty} \tilde{a}_{0,m}^{p^m} + p\tilde{a}_{1,m}^{p^{m-1}} + p^2\tilde{a}_{2,m}^{p^{m-2}} + \cdots + p^m\tilde{a}_{m,m}$$
$$(a_n=(a_{n,m})_{m\in\mathbb{N}}\in R,\ a_{n,m}\in O_{\overline{K}}/pO_{\overline{K}})$$

で定義する ([Fo3] 2.4). ここで $\tilde{}$ は $O_{\overline{K}}/pO_{\overline{K}}$ の元の $O_{\overline{K}}$ への持ち上げをあらわす. 右辺が収束しかつ持ち上げかたによらないことは, $O_{\overline{K}}$ の 2 元 a, b と正整数 n に対して, $a\equiv b \mod p^n$ ならば $a^p \equiv b^p \mod p^{n+1}$, 従って $a\equiv b \mod p$ ならば $a^{p^n}\equiv b^{p^n} \mod p^{n+1}$ となることから従う.

補題 2.1 ([Fo3] 2.4.i)). θ は環準同型である.

証明. まず環 $W(R)$ の 2 元 $a=(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $b=(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ の和, 積は, 次の式で帰納的に定義される $\mathbb{Z}$ 係数 $2(n+1)$ 変数の多項式

$$S_n(X_0,X_1,\dots,X_n;Y_0,Y_1,\dots,Y_n),\quad P_n(X_0,X_1,\dots,X_n;Y_0,Y_1,\dots,Y_n)$$

を用いて, $a+b=(S_n(a;b))_{n\in\mathbb{N}}$, $a\cdot b=(P_n(a;b))_{n\in\mathbb{N}}$ で定義されるのであった.

$$\begin{aligned}
&(X_0^{p^n}+pX_1^{p^{n-1}}+\cdots+p^nX_n)+(Y_0^{p^n}+pY_1^{p^{n-1}}+\cdots+p^nY_n)\\
=&S_0(X;Y)^{p^n}+pS_1(X;Y)^{p^{n-1}}+\cdots+p^nS_n(X;Y)\\
&(X_0^{p^n}+pX_1^{p^{n-1}}+\cdots+p^nX_n)\cdot(Y_0^{p^n}+pY_1^{p^{n-1}}+\cdots+p^nY_n)\\
=&P_0(X;Y)^{p^n}+pP_1(X;Y)^{p^{n-1}}+\cdots+p^nP_n(X;Y).
\end{aligned}$$

$c := a+b$, $c = (c_n)\,(c_n \in R)$, $a_n = (a_{n,m})$, $b_n = (b_{n,m})$, $c_n = (c_{n,m})\,(a_{n,m}, b_{n,m}, c_{n,m} \in O_{\overline{K}}/pO_{\overline{K}})$ とおき, $a_{n,m}$, $b_{n,m}$ の $O_{\overline{K}}$ への持ち上げ $\tilde{a}_{n,m}$, $\tilde{b}_{n,m}$ をとると,

$$\tilde{c}_{n,m} := S_n(\tilde{a}_{0,m}, \tilde{a}_{1,m}, \ldots, \tilde{a}_{n,m}; \tilde{b}_{0,m}, \tilde{b}_{1,m}, \ldots, \tilde{b}_{n,m})$$

は $c_{n,m}$ の持ち上げとなる. S_n の定義より,

$$\begin{aligned}&(\tilde{a}_{0,m}^{p^m} + p\tilde{a}_{1,m}^{p^{m-1}} + \cdots + p^m \tilde{a}_{m,m}) + (\tilde{b}_{0,m}^{p^m} + p\tilde{b}_{1,m}^{p^{m-1}} + \cdots + p^m \tilde{b}_{m,m})\\ =&\tilde{c}_{0,m}^{p^m} + p\tilde{c}_{1,m}^{p^{m-1}} + p^2\tilde{c}_{2,m}^{p^{m-2}} + \cdots + p^m \tilde{c}_{m,m}\end{aligned}$$

となる. m について極限をとれば, $\theta(a+b) = \theta(a) + \theta(b)$ を得る. 同様にして $\theta(ab) = \theta(a)\theta(b)$ が言える. □

θ が全射になることは容易にわかる. 単射 $\overline{k} \to R; a \mapsto (a, a^{p^{-1}}, a^{p^{-2}}, \ldots)$ より, 単射 $W(\overline{k}) \to W(R)$ が誘導される. 以後これにより, $W(R)$ を $W(\overline{k})$-algebra とみなす. θ は $W(\overline{k})$-algebra の準同型になる. θ の O_K 線型および K 線型な延長 $O_K \otimes_W W(R) \to O_C$, $K \otimes_W W(R) \to C$ をそれぞれ θ_{O_K}, θ_K とかく. $[\underline{p}] := (\underline{p}, 0, 0, \ldots)$, $[\underline{\pi}] := (\underline{\pi}, 0, 0, \ldots)$ は p, π の θ に関する持ち上げになっている. 実際

$$\theta([\underline{p}]) = \lim_{m\to\infty} \nu_m^{p^m} = p$$

となる. $[\underline{\pi}]$ についても同様. したがって $\xi_p := p - [\underline{p}] \in W(R)$, $\xi_\pi := \pi \otimes 1 - 1 \otimes [\underline{\pi}] \in O_K \otimes_W W(R)$ とおけば, $\theta(\xi_p) = 0$, $\theta_{O_K}(\xi_\pi) = 0$ となる. また $\varepsilon \in \varprojlim_n \mu_{p^n}(O_{\overline{K}})$ に対して, $\theta([\underline{\varepsilon}]) = 1$ となることも同様にして分かる.

命題 2.2 ([Fo3] 2.4.ii)). (1) ξ_p は $W(R)$ の非零因子で $\mathrm{Ker}(\theta)$ を生成する.

(2) ξ_π は $O_K \otimes_W W(R)$ の非零因子で $\mathrm{Ker}(\theta_{O_K})$ を生成する.

証明. (1) は (2) の $K = K_0$ という特別な場合であるから, (2) だけ示せば十分. $O_K \otimes_W W(R)$, O_C は p 進完備で p-torsion free であるから, mod π をとって正しいこと, すなわち,

$$0 \longrightarrow R \xrightarrow{\underline{\pi}} R \xrightarrow{(*)} O_{\overline{K}}/pO_{\overline{K}} \longrightarrow 0$$

が完全であることを示せば十分. ここで $(*)$ は第一成分の mod π をとる射である. この完全性は容易に確認できる. □

K に伴う環 B_{dR}^+ を

$$B_{\mathrm{dR}}^+ := \varprojlim_m (K \otimes_W W(R))/\mathrm{Ker}(\theta_K)^m$$

で定義する ([Fo3] 2.8). 上の命題 2.2 (2) より, B_{dR}^+ は C を剰余体, ξ_π (の像) を素元とする完備離散付値体となる. その商体を B_{dR} とする. G_K は R, $W(R)$ へ自然に作用し, 準同型 θ は明らかに G_K の作用と可換になる. したがって, 環 B_{dR}^+, B_{dR} にも G_K が自然に作用する. $K \otimes_W W(R)$ が $K \otimes_{K_0} P_0$-algebra であることから, B_{dR} は $K \otimes_{K_0} P_0$-algebra となる. 剰余体への射影 $B_{\mathrm{dR}}^+ \to C$ との合成が埋込み $K \otimes_{K_0} P_0 \subset C$ になること

とも容易に確認できる．1 の p 冪乗根の系 $\varepsilon = (\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ に対して，$\theta([\underline{\varepsilon}]) = 1$ であった．したがって，

$$\log([\underline{\varepsilon}]) = \sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}n^{-1}([\underline{\varepsilon}]-1)^n$$

は B_{dR}^+ の中で収束する．ε に $\log([\underline{\varepsilon}])$ を対応させることにより，G_K の作用と同変な準同型 $\mathbb{Q}_p(1) \to B_{\mathrm{dR}}^+$ を得る．像が極大イデアルに入ることは明らか．ここで，$\mathbb{Q}_p(1)$ の 0 でない元の像が素元になり，とくに上の準同型が単射になることを示したいのであるが，その前に，K を $\overline{K}$ に含まれる K の有限次拡大に置き換えても，B_{dR} が変わらないことを示す．

命題 2.3 ([Fo3] 2.10). K' を $\overline{K}$ に含まれる K の有限次拡大，$B_{\mathrm{dR},K}$，$B_{\mathrm{dR},K'}$ をそれぞれ $\overline{K}/K$, $\overline{K}/K'$ に伴う B_{dR} とする．このとき，自然な射 $B_{\mathrm{dR},K} \to B_{\mathrm{dR},K'}$ は同型である．

証明．剰余体の間の同型を導く完備離散付値体の間の射なので，素元が素元にうつることを示せば十分．K'/K が不分岐であるときは，π は K' の素元でもあるので，ξ_π は $B_{\mathrm{dR},K'}$ の素元でもある．したがって，K'/K は完全分岐拡大であるとしてよい．分岐指数を e とする．K' の素元 π' およびその p 冪乗根の系を一つとり，$\underline{\pi}' \in R$, $\xi_{\pi'} \in \mathrm{Ker}(\theta_{O_{K'}})$ を定義する．$f(T) \in O_K[T]$ を π' の K 上の moninc な最小多項式とする．仮定より，f は次数 e の Eisenstein 多項式である．$\theta([\underline{\pi}']) = \pi'$ より $f([\underline{\pi}']) \in \mathrm{Ker}(\theta_{O_K})$．また $f([\underline{\pi}']) \bmod \pi = (\underline{\pi}')^e$．$v(\pi'^e) = v(\pi)$ より，$\underline{\pi}'^e = \underline{\pi}\cdot u$ $(u \in R^*)$ と書けることが分かる．ここで v は K' の付値．従って命題 2.2 の証明と同様にして，$f([\underline{\pi}'])$ は $\mathrm{Ker}(\theta_{O_K})$ の生成元となり，したがって $B_{\mathrm{dR},K}$ の素元となることが分かる．$f(T) = (T-\pi')g(T)$ $(g(T) \in O_{K'}[T])$ とすると，$f([\underline{\pi}']) = \xi_{\pi'}\cdot g([\underline{\pi}'])$, $\theta_{O_{K'}}(g([\underline{\pi}'])) = g(\pi') \neq 0$ となるから，$f([\underline{\pi}'])$ は $B_{\mathrm{dR},K'}$ の素元にもなる．□

この命題より特に $\overline{K} \subset B_{\mathrm{dR}}$ となることが分かる．さて最後に，$\varprojlim_n \mu_{p^n}(O_{\overline{K}})$ の生成元 $\varepsilon = (\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\varepsilon_n \in O_{\overline{K}}, \varepsilon_0 = 1, \varepsilon_1 \neq 1, \varepsilon_{n+1}^p = \varepsilon_n$ $(n \in \mathbb{N})$ に対して $\log([\underline{\varepsilon}]) \in B_{\mathrm{dR}}^+$ が素元になることを示そう ([Fo3] 2.17)．$[\underline{\varepsilon}]-1$ が素元になることを示せば十分．命題 2.3 より $K = K_0$ としてよい．$\underline{\varepsilon}' := \underline{\varepsilon}^{p^{-1}}$ とおくと，$[\underline{\varepsilon}]-1 = ([\underline{\varepsilon}']-1)\cdot([\underline{\varepsilon}']^{p-1} + [\underline{\varepsilon}']^{p-2} + \cdots + 1)$ で，$\theta([\underline{\varepsilon}']^{p-1} + [\underline{\varepsilon}']^{p-2} + \cdots + 1) = \varepsilon_1^{p-1} + \varepsilon_1^{p-2} + \cdots + 1 = 0$．一方 $v(\varepsilon_{n+1}^{p-1} + \varepsilon_{n+1}^{p-2} + \cdots + 1) = p^{-n}$ $(n \geq 1)$ より，$\underline{\varepsilon}'^{p-1} + \underline{\varepsilon}'^{p-2} + \cdots + 1$ は $\underline{p}\cdot u$ $(u \in R^*)$ とかけることが分かる．ここで v は $\overline{K}$ の $v(p) = 1$ を満たす付値．従って，命題 2.2 の証明と同様にして，$[\underline{\varepsilon}']^{p-1} + [\underline{\varepsilon}']^{p-2} + \cdots + 1$ が $\mathrm{Ker}(\theta)$ の生成元になることがわかる．あとは $\theta([\underline{\varepsilon}']-1) = \varepsilon_1 - 1 \neq 0$ より $[\underline{\varepsilon}]-1$ が B_{dR} の素元になることが分かる．

次に環 B_{crys} を構成しよう．記号は B_{dR} の構成と同じとする．

準同型 θ の核の生成元 ξ_p を用いて，$\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} W(R)$ の部分環 $W^{\mathrm{PD}}(R)$ を $W(R)[\xi_p^n/n!\ (n \in \mathbb{N})]$ で定義する．$\mathrm{Ker}(\theta)$ の生成元は単数倍を除いて一意的にきまるから，これは他の生成元をとって同じように定義してもかわらない．(これは実は $(W(R), \mathrm{Ker}(\theta))$ の PD-envelope である．[Fo4] 3.6, [Tsu] A2.8.) 特にガロア群 G_K が自然に作用する．$W^{\mathrm{PD}}(R)$ が $W(R)$ 加群として $\xi_p^n/n!$ $(n \in \mathbb{N})$ で生成されることは容易にわかる．全射準同型 $\mathbb{Q}_p \otimes \theta\colon \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} W(R) \to C$ より全射準同型 $\theta^{PD}\colon W^{\mathrm{PD}}(R) \to O_C$ が誘導される．$W^{\mathrm{PD}}(R)$ は $W(\overline{k})$-algebra で θ^{PD} は $W(\overline{k})$-algebra の準同型である．$\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} W(R)$ の Frobenius を φ と書く．

補題 2.4. $\varphi(W^{\mathrm{PD}}(R)) \subset W^{\mathrm{PD}}(R)$.

Proof. まず $p^i/i! \in \mathbb{Z}_p$ $(i \in \mathbb{N})$, $[\underline{p}] = p - \xi_p$ より，2項定理を用いて $[\underline{p}]^i/i! \in W^{\mathrm{PD}}(R)$ $(i \in \mathbb{N})$ となることがわかる．$\varphi(\xi_p) = p - [\underline{p}]^p$ だから，もう一度2項定理を用いて，$\varphi(\xi_p)^i/i! \in W^{PD}(R)$ $(i \in \mathbb{N})$ を得る．□

$W^{\mathrm{PD}}(R)$ の p 進完備化を A_{crys} とし，

$$B^+_{\mathrm{crys}} := A_{\mathrm{crys}}[p^{-1}]$$

とおく ([Fo7] 2.3). $W(R)$ は $W(\overline{k})$-algebra だから，A_{crys} は $W(\overline{k})$-algebra, B^+_{crys} は P_0-algebra である．ガロア群 G_K が A_{crys}，B^+_{crys} にも自然に作用し，θ^{PD} より全射準同型 $A^+_{\mathrm{crys}} \to O_C$, $B^+_{\mathrm{crys}} \to C$ が誘導される．また $\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} W(R)$ の Frobenius より，A_{crys}，B^+_{crys} の $W(\overline{k})$, P_0 の Frobenius と可換な自己準同型 $A_{\mathrm{crys}} \to A_{\mathrm{crys}}$，$B^+_{\mathrm{crys}} \to B^+_{\mathrm{crys}}$ が誘導される．これらも同じ記号 φ でかく．1 の p 冪乗根の系 $\varepsilon = (\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \varprojlim_n \mu_{p^n}(O_{\overline{K}})$ に対して，$\underline{\varepsilon} := (\varepsilon_n \mod p)_{n\in\mathbb{N}} \in R$ とおくと，$\theta([\underline{\varepsilon}]) = 1$ だから，$[\underline{\varepsilon}] - 1 = \xi_p \cdot x$ $(x \in W(R))$ と書け (命題 2.2), 従って級数

$$\log([\underline{\varepsilon}]) = \sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}n^{-1}([\underline{\varepsilon}] - 1)^n$$

は A_{crys} において収束する．$\varphi([\underline{\varepsilon}]) = [\underline{\varepsilon}]^p$ より $\varphi(\log([\underline{\varepsilon}])) = p \cdot \log([\underline{\varepsilon}])$ となる．ε に $\log([\underline{\varepsilon}])$ を対応させることにより，G_K 同変な加法的な射 $\mathbb{Z}_p(1) \to A_{\mathrm{crys}}$，$\mathbb{Q}_p(1) \to B^+_{\mathrm{crys}}$ を得る．

次に B^+_{crys} から B^+_{dR} への G_K 同変な自然な埋め込みを構成しよう．まず $\mathrm{Ker}(\mathbb{Q}_p \otimes \theta)^i = \xi^i_p \cdot \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} W(R)$ と $W^{\mathrm{PD}}(R)$ の交わりとして定義される減少 filtration $Fil^i W^{\mathrm{PD}}(R)$ $(i \in \mathbb{N})$ を考えると，B^+_{dR} は $B^+_{\mathrm{dR}} = \varprojlim_i \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} (W^{\mathrm{PD}}(R)/Fil^i W^{\mathrm{PD}}(R))$ とかける．θ^{PD} より同型 $W^{\mathrm{PD}}(R)/Fil^1 W^{\mathrm{PD}}(R) \cong O_C$ が導かれることは明らか． 定義より $W^{\mathrm{PD}}(R)/Fil^i W^{\mathrm{PD}}(R)$ は p-torison free だから, $Fil^i W^{\mathrm{PD}}(R)$ の完備化によって, A_{crys} の減少 filtration $Fil^i A_{\mathrm{crys}}$ が定義できる．

補題 2.5. (1) $i \in \mathbb{N}$ に対して, $Fil^i W^{\mathrm{PD}}(R)$ は $\xi^j_p/j! \in Fil^i W^{\mathrm{PD}}(R)$ $(j \in \mathbb{N}, j \geq i)$ で生成される $W^{\mathrm{PD}}(R)$ の $W(R)$ 部分加群である．

(2) $i \in \mathbb{N}$ に対し, $W^{\mathrm{PD}}(R) \to Fil^i W^{\mathrm{PD}}(R); x \mapsto x \cdot \xi^i/i!$ より誘導される準同型 $\mathrm{gr}^0_{Fil} W^{\mathrm{PD}}(R) \to \mathrm{gr}^i_{Fil} W^{\mathrm{PD}}(R)$ は同型である．

証明. (1) 帰納法で証明する．$i = 0$ のとき正しいことは明らか. $i \geq 1$ とし $i-1$ では正しいとする．すると $a \in Fil^i W^{\mathrm{PD}}(R)$ は $\sum_{j\geq i-1} a_j \cdot \xi^j_p/j!$ $(a_j \in W(R), a_j = 0\ (j >> 0))$ と書ける．$\sum_{j\geq i} a_j \cdot \xi^j_p/j!$ は $Fil^i W^{\mathrm{PD}}(R)$ に入るから, $a_{i-1} \cdot \xi^{i-1}_p/(i-1)!$ も $Fil^i W^{\mathrm{PD}}(R) \subset \xi^i_p \cdot \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} W(R)$ に入る．ξ_p は非零因子だから $a_{i-1} \in \xi_p \cdot \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} W(R)$ すなわち $\theta(a_{i-1}) = 0$ となり, 従って, $a_{i-1} \in \mathrm{Ker}(\theta) = \xi_p \cdot W(R)$.

(2) 全射性は (1) より明らか. 単射性は $Fil^i W^{\mathrm{PD}}(R)$ の定義と, ξ_p が $\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} W(R)$ で非零因子であることから容易にわかる．□

補題 2.5 (2) と $W^{\mathrm{PD}}(R)/Fil^1 W^{\mathrm{PD}}(R) \cong O_C$ より，$\mathrm{gr}^i_{Fil} W^{\mathrm{PD}}(R)$ $(i \in \mathbb{N})$ は p 進完備で p-torsion free. 従って，自然な準同型 $\mathrm{gr}^i_{Fil} W^{\mathrm{PD}}(R) \to \mathrm{gr}^i_{Fil} A_{\mathrm{crys}}$ $(i \in \mathbb{N})$ は同

型になる．従って自然な準同型 $B^+_{\mathrm{crys}} \to B^+_{\mathrm{dR}}$ を合成：

$$\begin{aligned} B^+_{\mathrm{crys}} &\to \varprojlim_i (\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} (A_{\mathrm{crys}}/Fil^i A_{\mathrm{crys}})) \\ &\xleftarrow{\sim} \varprojlim_i (\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} (W^{\mathrm{PD}}(R)/Fil^i W^{\mathrm{PD}}(R))) = B^+_{\mathrm{dR}} \end{aligned}$$

で定義できる．P_0-algebra としての準同型で，$\mathbb{Q}_p(1)$ から B^+_{crys}, B^+_{dR} への自然な射と可換なことは容易に分かる．次の補題 2.6 よりこの準同型は単射となる．$\mathbb{Q}_p(1)$ の元 $t \neq 0$ を一つとり，

$$B_{\mathrm{crys}} := B^+_{\mathrm{crys}}[t^{-1}] \subset B_{\mathrm{dR}}$$

と定義する ([Fo7] 2.3.4)．$\varphi(t) = pt$ だから，B^+_{crys} の Frobenius は B_{crys} の Frobenius へと一意的にのびる．

補題 2.6. $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} (\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} Fil^i A_{\mathrm{crys}}) = 0$.

証明．$A_{\mathrm{crys}}/Fil^i A_{\mathrm{crys}}$ は p-torison free だから $\mathbb{Q}_p \otimes \mathbb{Z}_p$ なしで示せばよく，それには $Fil^i A_{\mathrm{crys}}/pFil^i A_{\mathrm{crys}} \subset A_{\mathrm{crys}}/pA_{\mathrm{crys}}$ に対して交わりが消えることを示せば十分である．これは次の補題より従う．□

$W^{\mathrm{PD}}(R)/pW^{\mathrm{PD}}(R)$ は $W(R)/pW(R) = R$-algebra である．さらに $\underline{p} \in R$ の $W^{\mathrm{PD}}(R)/pW^{\mathrm{PD}}(R)$ での像は $\xi_p \mod p$ と一致し，$\xi^p \in pW^{\mathrm{PD}}(R)$ であるから，結局 $W^{\mathrm{PD}}(R)/pW^{\mathrm{PD}}(R)$ は $R/\underline{p}^p R$-algebra となる．

補題 2.7. $i = a + pb$ $(a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}, 0 \le a \le p-1)$ に対して，$R/\underline{p}^p R$- 加群の準同型：

$$\begin{aligned} \underline{p}^a R/\underline{p}^p R \cdot e_b \oplus (\oplus_{j>b} R/\underline{p}^p R \cdot e_j) &\longrightarrow Fil^i W^{\mathrm{PD}}(R)/pFil^i W^{\mathrm{PD}}(R) \\ e_j &\longmapsto \xi_p^{pj}/(pj)! \mod p \quad (j \ge b) \end{aligned}$$

は同型である．

証明．補題 2.5 (1) より射の存在および全射性は明らか．また補題 2.5 (2) より，問題の射の gr をとって得られる射：$R/\underline{p}R \to \mathrm{gr}^i(W^{\mathrm{PD}}(R)/p); 1 \mapsto \xi_p^{a+pb}/b!$ が同型になることが分かる．$\mathrm{gr}^0(W^{\mathrm{PD}}(R)/p) = (W(R)/\xi_p W(R))/p = R/\underline{p}R$ に注意．従って，補題の準同型は単射になる．□

φ の単射性は[Fo3] 4.4, 4.11a) に，$(2)_{\mathrm{crys}}$ の証明は[Fo3] 4.7 に，$(1.2)_{\mathrm{crys}}$ の証明は[Fo3] 4.14-4.20(または[Fo7] §5，または[Tsu] A3) に書いてある．ただし[Fo3] での $B^+_{\mathfrak{a}}$([Fo3] 4.3), $B^+ = \cap_{\mathfrak{a}} B^+_{\mathfrak{a}}$, $B = B^+[t^{-1}]$([Fo3] 4.11) はここで定義した B^+_{crys}, B_{crys} と異なる．これらの比較については[Fo7] 4.1.4 参照．最初の 2 つの性質の証明を付録に書いた．証明のアイデアは[Fo3] と同じである．付録の $(2)_{\mathrm{crys}}$ の証明中の $W_{O_K}(R)[\xi_\pi/\pi]^\wedge$ は $\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p}$ をとると $B^+_{\mathfrak{a}_0,K} = K \otimes_{K_0} B^+_{\mathfrak{a}_0}$ ($\mathfrak{a}_0$ は[Fo7] 4.14, [Fo4] 4.7 と同じ) と一致する．([Fo7] 4.1 に $(2)_{\mathrm{crys}}$ の証明があるが，これは $\theta_{O_K}\colon O_K \otimes_W W(R) \to O_C$ の核が ξ_p ではなく ξ_π で生成されるため，誤りである．$K = K_0$ の場合も，A_{crys} の元が $\sum_{n \ge 0} a_n(\xi_p)^n/n!$ $(a_n \in W(R), a_n \to 0\ (n \to \infty), \theta(a_n) \neq 0 \text{ if } a_n \neq 0)$ の形にかけるかどうかは，$\cap_{i \ge 0} Fil^i A_{\mathrm{crys}} = 0$ を使わないと示せないように思われる．) $(4)_{\mathrm{crys}}$ の証明は，あとで証明する $(6)_{\mathrm{st}}$ から従う．

最後に B_{st} の定義をしよう．まず, π の $O_{\overline{K}}$ における p 冪乗根の系 $s=(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ に伴う B_{dR}^+ の元 u_s ($(1)_{\mathrm{st}}$) を次のように定義する ([Fo7] 4.2, $\log(\pi)=0$ の場合). $\underline{s}:=(s_n \bmod p)_{n\in\mathbb{N}}\in R$ とおくと $\theta([\underline{s}])=\pi$ であるから, $\theta_K(\pi^{-1}\otimes[\underline{s}])=1$ となる．従って, 級数

$$\log(\pi^{-1}\otimes[\underline{s}])=\sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}n^{-1}(\pi^{-1}\otimes[\underline{s}]-1)^n$$

は B_{dR}^+ で収束する．この元を u_s とする．u_s が性質 $(1.2)_{\mathrm{st}}$, $(1.3)_{\mathrm{st}}$ を満たすことは容易にわかる．u_s が B_{crys} 上超越的であること ($(1.1)_{\mathrm{st}}$) の証明は[Fo7] 4.3 に書かれている．付録にこの証明を少しだけ変形したものを書いた．あとは $(6)_{\mathrm{st}}(\Rightarrow (4)_{\mathrm{crys}})$ の証明であるが, これは C における次の事実に帰着して証明する．

定理 2.8 ([Ta] §3 Theorem 2). C の $\mathbb{Q}_p$ の作用について安定な 1 次元 $\mathbb{Q}_p$ 部分ベクトル空間は $\overline{K}$ に含まれる．

$(6)_{\mathrm{st}}$ の証明. ([Fo8] 5.1.3 ii)): K を $K\otimes_{K_0}P_0$ で置き換えて, $K_0=P_0$ としてよい．また適当に $t\in\mathbb{Q}_p(1)$ $(t\neq 0)$ の冪をかけて, 問題のベクトル空間 Δ は B_{dR}^+ に含まれ, Fil^1B_{dR} には含まれないとしていい．すると上の定理 2.8 より, $\overline{K}$ にふくまれる K のある有限次ガロア拡大 L があって, Δ への G_K の作用は $\mathrm{Gal}(L/K)$ を経由する．K に伴う B_{crys} と L に伴う B_{crys} は同じであるから, $(3)_{\mathrm{crys}}$ より $\Delta\subset B_{\mathrm{crys}}^{\mathrm{Gal}(\overline{K}/L)}=P_0$ となる． □

§3. Hodge-Tate 表現, de Rham 表現, crystalline 表現, semi-stable 表現.

§1, §2 で説明した環たちを使って, Hodge-Tate, de Rham, crystalline, semi-stable 表現を定義しよう．まず G_K の p 進表現とは, G_K が連続かつ線型に作用する $\mathbb{Q}_p$ 上の有限次元ベクトル空間のこととする．C 上の環 B_{HT} を $\oplus_{i\in\mathbb{Z}}C(i)$ で定義する．積は自然な写像 $C(i)\otimes_C C(j)\to C(i+j)$ で定義する．G_K の作用で安定な直和分解 $B_{\mathrm{HT}}=\oplus_{i\in\mathbb{Z}}B_{\mathrm{HT}}^i$, $B_{\mathrm{HT}}^i=C(i)$ によって B_{HT} は次数付き環 (graded ring) となる．

G_K の p 進表現 V に対して, $D_\bullet(V)$ ($\bullet=\mathrm{HT},\mathrm{dR},\mathrm{crys},\mathrm{st}$) を

$$D_\bullet(V)=(B_\bullet\otimes_{\mathbb{Q}_p}V)^{G_K}$$

で定義する．ここで G_K の $B_\bullet\otimes_{\mathbb{Q}_p}V$ への作用は, $g\otimes g$ $(g\in G_K)$ で定義する．$(-)^{G_K}$ はガロア群の作用が自明な部分をあらわす．$C^{G_K}=K$ (定理 1.1), $B_{\mathrm{dR}}^{G_K}=K$ ($(3)_{\mathrm{dR}}$), $B_{\mathrm{crys}}^{G_K}=K_0$ ($(3)_{\mathrm{crys}}$), $B_{\mathrm{st}}^{G_K}=K_0$ ($(5)_{\mathrm{st}}$) だから, $D_{\mathrm{HT}}(V)$, $D_{\mathrm{dR}}(V)$ は K ベクトル空間, $D_{\mathrm{crys}}(V)$, $D_{\mathrm{st}}(V)$ は K_0 ベクトル空間となる．$B_\bullet$ の持つ (G_K の作用以外の, G_K の作用と可換な) 付加構造から, これらのベクトル空間には次のような付加構造が入る．

$D_{\mathrm{HT}}(V)$ には B_{HT} の次数付きの環の構造を用いて, 次数付き K ベクトル空間の構造

$$D_{\mathrm{HT}}(V)=\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}}D_{\mathrm{HT}}^i(V),\quad D_{\mathrm{HT}}^i(V):=(B_{\mathrm{HT}}^i\otimes_{\mathbb{Q}_p}V)^{G_K}$$

が入る．

$D_{\mathrm{dR}}(V)$ には B_{dR} の減少 filtration から, K 部分ベクトル空間による減少 filtration

$$Fil^iD_{\mathrm{dR}}(V):=(Fil^iB_{\mathrm{dR}}\otimes_{\mathbb{Q}_p}V)^{G_K}$$

が入る. $\cup_{i\in\mathbb{Z}}Fil^iD_{\mathrm{dR}}(V)=D_{\mathrm{dR}}(V)$, $\cap_{i\in\mathbb{Z}}Fil^iD_{\mathrm{dR}}(V)=0$ となる. $(2.2)_{\mathrm{dR}}$ より, 次数付き K ベクトル空間の自然な単射線型写像

$$\mathrm{gr}_{Fil}(D_{\mathrm{dR}}(V))(:=\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}}\mathrm{gr}^i_{Fil}D_{\mathrm{dR}}(V))\hookrightarrow D_{\mathrm{HT}}(V) \tag{3.1}$$

を得る.

$B_{\mathrm{crys}}\otimes_{\mathbb{Q}_p}V$ の G_K の作用と可換な単射自己準同型 $\varphi\otimes 1$ より, K_0 の Frobenius σ に関して半線型な $D_{\mathrm{crys}}(V)$ の単射自己準同型 φ を得る. また $(2)_{\mathrm{crys}}$ より, 自然な単射 K 線型写像

$$K\otimes_{K_0}D_{\mathrm{crys}}(V)\hookrightarrow D_{\mathrm{dR}}(V) \tag{3.2}$$

を得る.

$D_{\mathrm{crys}}(V)$ の φ と同様にして, B_{st} の φ, N より, $D_{\mathrm{st}}(V)$ 上の σ 半線型な単射自己準同型 φ, K_0 線型な自己準同型 N を得る. $(3.1)_{\mathrm{st}}$ よりこれらは,

$$N\varphi=p\varphi N \tag{3.3}$$

という関係式を満たし, $(4)_{\mathrm{st}}$ より, 自然な単射 K 線型写像

$$K\otimes_{K_0}D_{\mathrm{st}}(V)\hookrightarrow D_{\mathrm{dR}}(V) \tag{3.4}$$

を得る. また $(3.2)_{\mathrm{st}}$ より,

$$D_{\mathrm{st}}(V)^{N=0}=D_{\mathrm{crys}}(V) \tag{3.5}$$

となる. (3.5) は (3.2), (3.4) と可換である.

次の命題 3.7 及び (3.1), (3.5), (3.4) より,

$$\begin{aligned}\dim_{K_0}D_{\mathrm{crys}}(V)&\le\dim_{K_0}D_{\mathrm{st}}(V)\le\dim_K D_{\mathrm{dR}}(V)\\&\le\dim_K D_{\mathrm{HT}}(V)\le\dim_{\mathbb{Q}_p}V<\infty\end{aligned} \tag{3.6}$$

となる. 従って, 有限個の i を除いて $D^i_{\mathrm{HT}}(V)=0$, $Fil^iD_{\mathrm{dR}}(V)=D_{\mathrm{dR}}(V)$ $(i<<0)$, $Fil^iD_{\mathrm{dR}}(V)=0$ $(i>>0)$ となり, $D_{\mathrm{crys}}(V)$, $D_{\mathrm{st}}(V)$ の Frobenius φ は全単射となる.

命題 3.7 ([Ser1] §2 Proposition 4). 自然な C 線型な準同型

$$\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}}C(-i)\otimes_K D^i_{\mathrm{HT}}(V)\to C\otimes_{\mathbb{Q}_p}V$$

は単射である.

証明. 単射でないと仮定する. 各 $i\in\mathbb{Z}$ に対して, $D^i_{\mathrm{HT}}(V)$ の K 上の基底 $b_{i,1},\dots,b_{i,d_i}$, 0 でない $\mathbb{Q}_p(-i)$ の元 a_i をとり, 命題の準同型による $a_i\otimes b_{i,j}$ の像を $c_{i,j}$ とする. $c_{i,j}$ たちの長さが最小の非自明な C 上の線型関係式 $\sum_{i,j}x_{i,j}c_{i,j}=0$ を考える. $x_{i_0,j_0}\neq 0$ となる i_0, j_0 をとる. x_{i_0,j_0} で割って $x_{i_0,j_0}=1$ としてよい. この線型関係式に $g\in G_K$ を作用させると, 線型関係式 $\sum_{i,j}g(x_{i,j})\chi_{\mathrm{cyclo}}(g)^{-i}c_{i,j}$ を得る. ここで $\chi_{\mathrm{cyclo}}\colon G_K\to\mathbb{Z}_p^*$ は円分指標とする. 線型関係式の長さの最小性と $x_{i_0,j_0}=1$ より, $g(x_{i,j})=\chi_{\mathrm{cyclo}}(g)^{i-i_0}x_{i,j}$ となる. 定理 1.1 の $i=0$ の場合より, $x_{i,j}=0$ $(i\neq i_0)$, $x_{i_0,j}\in K$ となる. $c_{i_0,j}$ $(1\le j\le d_{i_0})$ は K 上 1 次独立だから, これは矛盾. □

定義 3.8. G_K の p 進表現 V に対し, $\dim_K D_{\mathrm{HT}}(V) = \dim_{\mathbb{Q}_p} V$ であるとき, V は Hodge-Tate 表現であるという. 同様に $\dim_K D_{\mathrm{dR}}(V) = \dim_{\mathbb{Q}_p} V$ であるとき, de Rham 表現, $\dim_{K_0} D_{\mathrm{crys}}(V) = \dim_{\mathbb{Q}_p} V$ であるとき, crystalline 表現, $\dim_{K_0} D_{\mathrm{st}}(V) = \dim_{\mathbb{Q}_p} V$ であるとき, semi-stable 表現であるという.

不等式 (3.6) より,

$$\text{crystalline} \Rightarrow \text{semi-stable} \Rightarrow \text{de Rham} \Rightarrow \text{Hodge-Tate}$$

である. また, V が de Rham なら (3.1) は同型, V が crystalline なら (3.2) は同型, V が semi-stable なら (3.4) は同型である. さらに (3.5) より, semi-stable 表現 V が crystalline であるためには, $D_{\mathrm{st}}(V)$ の monodromy operator N が 0 になることが必要十分である.

命題 3.7 より更に次のことが分かる.

系 3.9. V を G_K の p 進表現とする.

(1) B_{HT} 線形な自然な写像

$$B_{\mathrm{HT}} \otimes_K D_{\mathrm{HT}}(V) \to B_{\mathrm{HT}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$$

は G_K *同変で次数を保つ. さらに* V *が Hodge-Tate 表現ならば同型になる. ここで* G_K *の左辺への作用は* $g \otimes 1$ $(g \in G_K)$ *で, 右辺への作用は* $g \otimes g$ *で定義し, 次数は左辺では* $\sum_{i=i_0+i_1} B_{\mathrm{HT}}^{i_0} \otimes_K D_{\mathrm{HT}}^{i_1}(V)$ *で右辺では* $B_{\mathrm{HT}}^i \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$ *で定義する. 特に次数 0 の部分をとると,* V *が Hodge-Tate 表現のとき,* G_K *同変な分解 (Hodge-Tate 分解)*

$$C \otimes_{\mathbb{Q}_p} V \cong \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} C(-i) \otimes_{\mathbb{Q}_p} D_{\mathrm{HT}}^i(V)$$

を得る.

(2) ([Fo8] 3.8 i)). B_{dR} *線型な自然な写像*

$$B_{\mathrm{dR}} \otimes_K D_{\mathrm{dR}}(V) \to B_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$$

は G_K *同変な単射で, 左辺の filtration は右辺から誘導される filtration と一致する. さらに* V *が de Rham 表現なら, これは同型になる. ここで* G_K *の両辺への作用は (1) と同様に定義し, また左辺の filtration は* $\sum_{i=i_0+i_1} Fil^{i_0} \otimes Fil^{i_1}$ *で, 右辺の filtration は* $Fil^i B_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$ *で定義する.*

(3) ([Fo8] 1.4.2 ii), 5.1.2 ii)). B_{st} *線型な自然な写像*

$$B_{\mathrm{st}} \otimes_{K_0} D_{\mathrm{st}}(V) \to B_{\mathrm{st}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$$

は G_K *同変な単射で,* φ, N *と可換である. さらに,* V *が semi-stable 表現ならこれは同型になる. ここで* G_K *の両辺への作用は (1) と同様に定義し,* φ *は左辺では* $\varphi \otimes \varphi$ *で右辺では* $\varphi \otimes 1$ *で定義し,* N *は左辺では* $N \otimes 1 + 1 \otimes N$ *で右辺では* $N \otimes 1$ *で定義する.*

(4) ([Fo8] 1.4.2 ii), 5.1.2 ii)). B_{crys} *線型な自然な写像*

$$B_{\mathrm{crys}} \otimes_{K_0} D_{\mathrm{crys}}(V) \to B_{\mathrm{crys}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$$

は G_K 同変な単射で, φ と可換である. さらに V が crystalline 表現なら, これは同型になる. ここで両辺での G_K の作用, φ は (3) と同様に定義する.

証明. (1) は命題 3.7 より明らか. 次数を保つことは明らかで次数 i の部分は命題 3.7 の射に $\mathbb{Q}_p(i)$ をテンソルしたものと一致する. (2): 問題の射は明らかに G_K 同変で filtration を保つ. その gr をとると, $(2.2)_{\mathrm{dR}}$ より, (1) の射において $D_{\mathrm{HT}}(V)$ を $\mathrm{gr}(D_{\mathrm{dR}}(V))$ に ((3.1) を用いて) 置き換えたものとなる. 従って (1) より左辺の Fil が右辺の Fil より誘導されることがわかる. 左辺において $\cap_{i\in\mathbb{Z}}Fil^i = 0$, $\cup_{i\in\mathbb{Z}}Fil^i =$(全体) となることに注意. 後半は B_{dR} が体であることと前半より明らか. (3): G_K の作用, φ, N との可換性は明らか. 単射性は, 両辺の $B_{\mathrm{dR}}\otimes_{B_{\mathrm{st}}}$ をとると, (2) の射において $D_{\mathrm{dR}}(V)$ を $K\otimes_W D_{\mathrm{st}}(V)$ に ((3.2) を用いて) 置き換えたものとなることからわかる. V が semi-stable 表現のときこれが同型になることは, B_{crys} が体でないことから自明ではない! $(6)_{\mathrm{st}}$ を使う. $D_{\mathrm{st}}(V)$ の K 上の基底 d_i $(1\le i\le m)$, V の $\mathbb{Q}_p$ 上の基底 v_i $(1\le i\le m)$ をとる. $B_{\mathrm{st}}\otimes_{\mathbb{Q}_p} V$ において $d_i=\sum_{1\le j\le m} a_{ji}\cdot 1\otimes v_j$ $(a_{ij}\in B_{\mathrm{st}})$ と書くと, 問題の射が B_{dR} をテンソルすると単射になることから $\det(a_{ij})\neq 0$. また $\mathbb{Q}_p\cdot\det(a_{ij})$ は G_K の作用に関して安定である. したがって $(6)_{\mathrm{st}}$ より, $\det(a_{ij})$ は B_{st} の可逆元となる. (4) の証明は (3) の証明と全く同じ. □

G_K の p 進表現とその間の G_K 同変な $\mathbb{Q}_p$ 線型写像のなす圏を $\underline{\mathrm{Rep}}(G_K)$ と書き, Hodge-Tate, de Rham, semi-stable, crystalline 表現のなす $\underline{\mathrm{Rep}}(G_K)$ の充満部分圏を $\underline{\mathrm{Rep}}_{\bullet}(G_K)$ $(\bullet = \mathrm{HT},\mathrm{dR},\mathrm{st},\mathrm{crys})$ と書く. 定義より明らかに, $D_\bullet(V)$ +「その付加構造」は V に関して関手的である. そこで, これらの行き先となるべき圏を次のように定義する.

$\underline{\mathrm{MG}}_K$: 次数付きの有限次元 K ベクトル空間と次数を保つ K 線型写像のなす圏.

$\underline{\mathrm{MF}}_K$: 部分空間による減少 filtration 付きの有限次元 K ベクトル空間 $(D,(Fil^iD)_{i\in\mathbb{Z}})$ で $Fil^iD=D$ $(i<<0)$, $Fil^iD=0$ $(i>>0)$ を満たすもの, および filtration を保つ K 線型写像のなす圏.

$\underline{\mathrm{MF}}_K(\varphi,N)$: 対象は有限次元のベクトル空間 K_0 で次の付加構造をもつもの: K_0 の Frobenius σ に関して半線型な自己同型 φ, K 線型な自己準同型 N および $D_K := K\otimes_{K_0}D$ 上の K 部分空間による減少 filtration $(Fil^iD_K)_{i\in\mathbb{Z}}$ で, $N\varphi=p\varphi N$, $Fil^iD_K=D_K$ $(i<<0)$, $Fil^iD_K=0$ $(i>>0)$ 満たすもの. 射は K_0 線型写像で φ, N と可換で, K をテンソルすると Fil と可換なもの. この圏の対象を filtered (φ,N)-module と呼ぶ.

$\underline{\mathrm{MF}}_K(\varphi)$: $\underline{\mathrm{MF}}_K(\varphi,N)$ の定義で N を除いたもの. この圏の対象を filtered φ-module と呼ぶ. $N=0$ とおくことにより, $\underline{\mathrm{MF}}_K(\varphi,N)$ の充満部分圏とみなす.

このように圏を定義すれば, 今までの議論より, 次の可換図式を得ることは明らか.

$$
\begin{array}{ccc}
\underline{\mathrm{Rep}}_{\mathrm{HT}}(G_K) & \xrightarrow{D_{\mathrm{HT}}} & \underline{\mathrm{MG}}_K \\
\cup & & \uparrow \mathrm{gr} \\
\underline{\mathrm{Rep}}_{\mathrm{dR}}(G_K) & \xrightarrow{D_{\mathrm{dR}}} & \underline{\mathrm{MF}}_K \\
\cup & & \uparrow \\
\underline{\mathrm{Rep}}_{\mathrm{st}}(G_K) & \xrightarrow{D_{\mathrm{st}}} & \underline{\mathrm{MF}}_K(\varphi,N) \\
\cup & & \cup \\
\underline{\mathrm{Rep}}_{\mathrm{crys}}(G_K) & \xrightarrow{D_{\mathrm{crys}}} & \underline{\mathrm{MF}}_K(\varphi).
\end{array}
$$

定理 3.10 ([Fo3] 5.2 iii), [Fo8] 5.3.5 iii)). 関手 D_{st}, D_{crys} は忠実充満である.

証明. V が semi-stable 表現のとき (3.4) は同型で, 系 3.9 の (2) の射はちょうど (3) の射で $B_{\mathrm{dR}}\otimes_{B_{\mathrm{st}}}$ をとったものとなる. 従って系 3.9 (2), (3) と $(3.3)_{\mathrm{st}}$ より G_K 同変な同型:

$$V \cong Fil^0(B_{\mathrm{dR}} \otimes_K D_K) \cap (B_{\mathrm{st}} \otimes_{K_0} D)^{\varphi=1,N=0}$$

(ただし $D = D_{\mathrm{st}}(V)$) を得る. これから D_{st} が忠実充満であることを示すのは簡単. □

filtered (φ, N)-module $D \in \underline{\mathrm{MF}}_K(\varphi, N)$ (resp. filtered φ-module $D \in \underline{\mathrm{MF}}_K(\varphi)$) に対して, ある semi-stable (resp. crystalline) 表現 V があって $D_{\mathrm{st}}(V) \cong D$ (resp. $D_{\mathrm{crys}}(V) \cong D$) となる時, D は admisible であるという. admissible filtered (φ, N)-module (resp. admissible filtered φ-module) のなす $\underline{\mathrm{MF}}_K(\varphi, N)$ (resp. $\underline{\mathrm{MF}}_K(\varphi)$) の充満部分圏を $\underline{\mathrm{MF}}_K^{\mathrm{ad}}(\varphi, N)$, (resp. $\underline{\mathrm{MF}}_K^{\mathrm{ad}}(\varphi)$) と書く. 定理 3.10 の証明より, 関手 D_{st}, D_{st} の quasi-inverse $V_{\mathrm{st}}\colon \underline{\mathrm{MF}}_K^{\mathrm{ad}}(\varphi, N) \to \underline{\mathrm{Rep}}_{\mathrm{st}}(G_K)$, $V_{\mathrm{crys}}\colon \underline{\mathrm{MF}}_K^{\mathrm{ad}}(\varphi) \to \underline{\mathrm{Rep}}_{\mathrm{crys}}(G_K)$ は

$$V_{\mathrm{st}}(D) = Fil^0(B_{\mathrm{dR}} \otimes_K D_K) \cap (B_{\mathrm{st}} \otimes_{K_0} D)^{\varphi=1,N=0} \tag{3.11}$$

$$V_{\mathrm{crys}}(D) = Fil^0(B_{\mathrm{dR}} \otimes_K D_K) \cap (B_{\mathrm{crys}} \otimes_{K_0} D)^{\varphi=1} \tag{3.12}$$

で与えられる ([Fo3] 5.2 iv), [Fo8] 5.3.5 iii)).

命題 3.13 ([Fo8] 1.5.2, 3.6, 5.1.2 ii), [Fo3] 1.6 ii), 3.10 i), 5.2 i)). $\underline{Rep}_\bullet(G_K)$ ($\bullet = HT, dR, st, crys$) はいずれも, 部分, 商, 直和, テンソル積, 双対, について閉じている.

証明. $K_\bullet$ を $\bullet = \mathrm{HT}, \mathrm{dR}$ のとき K, $\bullet = \mathrm{st}, \mathrm{crys}$ のとき K_0 と定義する. p 進表現 V のとその部分表現 W に対して, 完全列

$$0 \to D_\bullet(W) \to D_\bullet(V) \to D_\bullet(V/W)$$

があるから,

$$\dim_{K_\bullet} D_\bullet(V) \le \dim_{K_\bullet} D_\bullet(W) + \dim_{K_\bullet} D_\bullet(V/W).$$

不等式 (3.6) より, $\dim_{K_\bullet} D_\bullet(V) = \dim_{\mathbb{Q}_p}(V)$ ならば, $\dim_{K_\bullet} D_\bullet(W) = \dim_{\mathbb{Q}_p} W$, $\dim_{K_\bullet} D_\bullet(V/W) = \dim_{\mathbb{Q}_p}(V/W)$ となる. すなわち $\underline{\mathrm{Rep}}_\bullet(G_K)$ は部分, 商について閉じている. $V_i \in \underline{\mathrm{Rep}}_\bullet(G_K)$ $(i = 1,2)$ とする. すると系 3.9 より G_K 同変な $B_\bullet$ 線型な同型

$$B_\bullet \otimes_{K_\bullet} D_\bullet(V_i) \cong B_\bullet \otimes_{\mathbb{Q}_p} V_i \tag{*}$$

がある. $B_\bullet$ 上これら 2 つの射のテンソル積をとり, G_K 不変部分をとると, $B_\bullet^{G_K} = K_\bullet$ (定理 1.1, $(3)_{\mathrm{dR}}$, $(3)_{\mathrm{crys}}$, $(5)_{\mathrm{st}}$) より, 同型

$$D_\bullet(V_1) \otimes_{K_\bullet} D_\bullet(V_2) \cong D_\bullet(V_1 \otimes_{\mathbb{Q}_p} V_2)$$

を得る. 従って $V_1 \otimes_{\mathbb{Q}_p} V_2 \in \underline{\mathrm{Rep}}_\bullet(G_K)$. 最後に $V \in \underline{\mathrm{Rep}}_\bullet(G_K)$ とすると, V に対する同型 (*) の両辺の $\mathrm{Hom}_{B_\bullet}(-, B_\bullet)$ を取り, G_K 不変部分をとると, 同型

$$\mathrm{Hom}_K(D_\bullet(V), K) \cong D_\bullet(\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(V, \mathbb{Q}_p))$$

を得る. 従って $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(V,\mathbb{Q}_p)\in \underline{\mathrm{Rep}}_{\bullet}(G_K)$. □

関手 $D_\bullet$ ($\bullet=\mathrm{HT},\mathrm{dR},\mathrm{st},\mathrm{crys}$) の行き先の圏でも部分, 商, 直和, テンソル積, 双対を自然に定義できて, 関手 $D_\bullet$ はこれらの操作と可換になることが分かる. (命題 3.13 の証明参照.) [Fo3] 1.6 iii), iv), v), 3.10 iii), iv), v), 5.2 iii), iv). [Fo8] 3.8 ii), 5.1.7 i), ii), iii).

p 進表現が Hodge-Tate 等であるかどうかは, 惰性群の作用のみできまる. すなわち,

命題 3.14 ([Ser2] III A1, [Fo8] 3.9 ii), 5.1.5). $\hat{K}^{\mathrm{ur}}$ を K の最大不分岐拡大の完備化 $P_0\otimes_{K_0}K\subset C$, $\overline{\hat{K}_{\mathrm{ur}}}$ を $\hat{K}_{\mathrm{ur}}$ の C での代数閉包とし, $G_{\hat{K}^{\mathrm{ur}}}:=Gal(\overline{\hat{K}_{\mathrm{ur}}}/\hat{K}_{\mathrm{ur}})$ とおく. $I_K=G_{\hat{K}_{\mathrm{ur}}}$ である. このとき, G_K の p 進表現 V に対して, V が *Hodge-Tate* であるためには, G_K の作用を $G_{\hat{K}_{\mathrm{ur}}}$ に制限して得られる p 進表現が *Hodge-Tate* であることが, 必要十分である. *de Rham* 表現, *semi-stable* 表現, *crystalline* 表現についても同様.

証明. まず構成法より明らかに, $\bullet=\mathrm{HT},\mathrm{dR},\mathrm{st},\mathrm{crys}$ に対して, $\overline{K}/K$ に伴う $B_\bullet$ と $\overline{\hat{K}_{\mathrm{ur}}}/\hat{K}_{\mathrm{ur}}$ に伴う $B_\bullet$ は一致する. $K_\bullet$ を命題 3.13 の証明と同じとし, $P_\bullet=P_0\otimes_{K_0}K_\bullet$ とおく. すると, §4 の命題 4.1.2 を $P_\bullet/K_\bullet$ に適用して, 有限次元 $K_\bullet$ ベクトル空間 $(B_\bullet\otimes_{\mathbb{Q}_p}V)^{I_K}$ への G_k の半線型な作用が連続であることを示せば,

$$P_\bullet\otimes_{K_\bullet}(B_\bullet\otimes_{\mathbb{Q}_p}V)^{G_K}\to(B_\bullet\otimes_{\mathbb{Q}_p}V)^{I_K}$$

が同型となって命題を得る. この連続性は $C=\mathbb{Q}_p\otimes_{\mathbb{Z}_p}O_C$, $B_{\mathrm{dR}}=\cup_{i\in\mathbb{Z}}Fil^iB_{\mathrm{dR}}$, $Fil^iB_{\mathrm{dR}}=\varprojlim_j(Fil^iB_{\mathrm{dR}}/Fil^{i+j}B_{\mathrm{dR}})$, $Fil^iB_{\mathrm{dR}}/Fil^{i+j}B_{\mathrm{dR}}=\mathbb{Q}_p\otimes_{\mathbb{Z}_p}(W(R)/Fil^jW(R)(i))$, $B_{\mathrm{st}}=\cup_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{Q}_p\otimes_{\mathbb{Z}_p}(t^{-n}\cdot A_{\mathrm{crys}}[u_s])$, $B_{\mathrm{crys}}=\cup_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{Q}_p\otimes_{\mathbb{Z}_p}(t^{-n}A_{\mathrm{crys}})$ より, 次の補題に帰着される. ここで t は $\mathbb{Z}_p(1)\subset A_{\mathrm{crys}}$ の生成元. □

補題 3.15. O_C, $W(R)/Fil^iW(R)$, $A_{\mathrm{crys}}[u_s]$, A_{crys} は p 進位相に関して分離的であり, これらへの G_K の作用は p 進位相に関して連続. すなわち, これらの加群の $mod\ p^n$ $(n\in\mathbb{N})$ を考えると, 各元の G_K の作用に関する *stabilizer* は G_K の開部分群になる.

O_C の場合は自明で, $A_{\mathrm{crys}}[u_s]$ の場合 $(1.3)_{\mathrm{st}}$ を用いて, A_{crys} の場合に帰着される. $W(R)/Fil^iW(R)$, A_{crys} の場合は[Tsu] 1.4.4 と同様に証明できる.

次の補題は基本的である.

補題 3.16. G_K の p 進表現 V が *semi-stable* 表現ならば, $V(r)$ $(r\in\mathbb{N})$ も *semi-stable* 表現である. このときさらに K_0 ベクトル空間としての自然な同型 $D:=D_{\mathrm{st}}(V)\to D(r):=D_{\mathrm{st}}(V(r))$ があり, この同型で D と $D(r)$ を同一視すると, $\varphi_{D(r)}=p^{-r}\varphi_D$, $N_{D(r)}=N_D$, $Fil^nD(r)_K=Fil^{n+r}D_K$ となる. *Hodge-Tate* 表現, *de Rham* 表現, *crystalline* 表現についても同様のことが成り立つ.

証明. B_{st} 線型で G_K 同変な自然な同型:

$$B_{\mathrm{st}}\otimes_{\mathbb{Q}_p}V\to B_{\mathrm{st}}\otimes_{\mathbb{Q}_p}V(r);a\otimes v\to t^{-r}a\otimes(v\otimes t^r)$$

があることからただちに分かる. ここで t は 0 でない $\mathbb{Q}_p(1)$ の任意の元. □

§4. 例.

この§では, §3 で定義した p 進表現たちの例をあげる.

例 4.0. $\mathbb{Q}_p(i)$: $\mathbb{Q}_p(i)$ $(i \in \mathbb{Z})$ は crystalline 表現である. $D := D_{\mathrm{crys}}(\mathbb{Q}_p(i)) = (B_{\mathrm{crys}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{Q}_p(i))^{G_K}$ は $e = t^{-i} \otimes t^i$ $(t \in \mathbb{Q}_p(1) \in B_{\mathrm{crys}},\ t \neq 0)$ を基底とする 1 次元 K_0 ベクトル空間で $\varphi(e) = p^{-i}e$, $Fil^{-i}D_K = D_K$, $Fil^{-i+1}D_K = 0$ となる.

例 4.1. 不分岐表現: G_K の p 進表現 V が不分岐, すなわち惰性群 I_K の作用が自明であるならば, V は crystalline 表現である. crystalline 表現 V が不分岐であるためには, $Fil^0 D_{\mathrm{crys}}(V)_K = D_{\mathrm{crys}}(V)_K$, $Fil^1 D_{\mathrm{crys}}(V)_K = 0$ となることが必要十分である. また, $Fil^0 D_K = D_K$, $Fil^1 D_K = 0$ をみたす flitered φ-module D が admissible (すなわちある不分岐表現に対応している) であるためには, φ の slope が 0 (次のパラグラフ参照) になることが必要十分である ([Fo8] 5.4.2 i)).

実は不分岐表現の場合, B_{crys} よりも簡単な環 P_0 を用いて, 次の圏同値が構成される ([Fo5] §1, [Fo6] 1.2). 有限次元 K_0 ベクトル空間 D とその上の slope 0 の σ 半線型な自己同型 φ の組およびそれらの間の φ と可換な K_0 線型写像のなす圏を $\underline{\mathrm{M}}_{K_0,\text{ét}}(\varphi)$ と書くことにする. ここで φ の slope が 0 であるとは, 自然な写像

$$P_0 \otimes_{\mathbb{Q}_p} (P_0 \otimes_{K_0} D)^{\sigma\otimes\varphi=1} \to P_0 \otimes_{K_0} D \tag{4.1.1}$$

が同型であるということ. ある D の W 格子の上で φ が自己同型になると言っても同じである. このとき, G_K の不分岐 p 進表現の圏 $\underline{\mathrm{Rep}}_{\mathrm{ur}}(G_K)$ と $\underline{\mathrm{M}}_{K_0,\text{ét}}(\varphi)$ の間に次の圏同値がある. V_{ur} と D_{ur} は互いに他の quasi-inverse になる.

$$D_{\mathrm{ur}}\colon \underline{\mathrm{Rep}}_{\mathrm{ur}}(G_K) \to \underline{\mathrm{M}}_{K_0,\text{ét}}(\varphi); V \mapsto (P_0 \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{G_K}$$
$$V_{\mathrm{ur}}\colon \underline{\mathrm{M}}_{K_0,\text{ét}}(\varphi) \to \underline{\mathrm{Rep}}_{\mathrm{ur}}(G_K); D \mapsto (P_0 \otimes_{K_0} D)^{\sigma\otimes\varphi=1}$$

ここで $P_0 \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$ への $g \in G_K$ の作用は $g\otimes g$ で, $P_0 \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$ の Frobenius は $\sigma\otimes 1$ で定義し, $P_0 \otimes_{K_0} D$ への $g \in G_K$ の作用は $g \otimes 1$ で定義する. 同型 (4.1.1) より, $D_{\mathrm{ur}} \circ V_{\mathrm{ur}} \cong 1$ を得る. また次の命題の $K = K_0$ の場合より, 自然な写像

$$P_0 \otimes_{K_0} (P_0 \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{G_K} \to P_0 \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$$

は同型になり, $V_{\mathrm{ur}} \circ D_{\mathrm{ur}} \cong 1$ を得る.

命題 4.1.2 ([Ser2] III A1 Lemma). K の最大不分岐拡大の完備化の整数環 $\hat{O}_{\mathrm{ur}}(\cong W(\bar{k}) \otimes_W O_K)$ と任意の正整数 n に対して, $H^1_{\mathrm{cont}}(G_k, GL_n(\hat{O}_{\mathrm{ur}})) = 0$ である.

$\underline{\mathrm{M}}_{K_0,\text{ét}}(\varphi)$ の対象 D を, $Fil^0 D_K = D_K$, $Fil^1 D_K = 0$ と filtration を入れることにより $\underline{\mathrm{MF}}_K(\varphi)$ の対象とみなすことによって, $\underline{\mathrm{M}}_{K_0,\text{ét}}(\varphi)$ を $\underline{\mathrm{MF}}_K(\varphi)$ の充満部分圏とみなす. すると $D_{\mathrm{crys}} \cong D_{\mathrm{ur}}$ となる.

例 4.2. $D^i_{\mathrm{HT}}(V) = 0\,(i \neq 0)$ **の表現:** V を G_K の p 進表現とする. V が $D^i_{\mathrm{HT}}(V) = 0$ $(i \neq 0)$ となる Hodge-Tate 表現である (すなわち自然な写像 $C \otimes_K (C \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{G_K} \to C \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$ が同型になる) ためには, 惰性群 I_K の V への作用が有限商を経由することが必要十分である ([Sen1] §5 Corollary 1). 十分性は命題 3.15 を用いて, 剰余体が閉体の場合に帰着すれば, $H^1(G_K, \mathrm{GL}_n(\overline{K})) = \{1\}$ より直ちに従う.

$\overline{K} \subset Fil^0 B_{\mathrm{dR}}$, $Fil^1 B_{\mathrm{dR}} \cap \overline{K} = 0$ だから, 命題 3.15 を用いて, de Rham 表現でも十分性がみたされることがわかる. de Rham $\Rightarrow$ Hodge-Tate より必要性も O.K. すなわち, V が $Fil^0 D_{\mathrm{dR}}(V) = D_{\mathrm{dR}}(V)$, $Fil^1 D_{\mathrm{dR}}(V) = 0$ となる de Rham 表現であるためには, 惰性群 I_K の V への作用が有限商を経由することが必要十分である.

例 4.1 ですでに説明したように, V が $D^i_{\mathrm{HT}}(V) = 0$ $(i \neq 0)$ を満たす semi-stable 表現あるいは crystalline 表現であるためには, 不分岐表現であることが必要十分である.

例 4.3. 1 次元表現： G_K の 1 次元の p 進表現 V に対して, 次の同値性が成り立つ.

- Hodge-Tate$\Leftrightarrow$de Rham

$\Leftrightarrow$ ある I_K の開部分群 I' と整数 i があって, $V(-i)$ への I' の作用は自明になる.

- semi-stable$\Leftrightarrow$crystalline

$\Leftrightarrow$ ある整数 i に対して, $V(-i)$ への I_K の作用は自明になる.

これは p 進表現 V に対して $D^i_{\mathrm{HT}}(V(j)) = D^{i+j}_{\mathrm{HT}}(V)$ となることと, 補題 3.16, 例 4.2 より従う.

例 4.4. $\mathbb{Q}_p$ の $\mathbb{Q}_p(i)$ による拡大： i を整数とし, 拡大

$$0 \to \mathbb{Q}_p(i) \to V \to \mathbb{Q}_p \to 0$$

を考える. このとき $i \geq 2$, $[K : \mathbb{Q}_p] < \infty$ ならば, V は crystalline になる. $i = 1$ のとき, 対応する $H^1_{\mathrm{cont}}(G_K, \mathbb{Q}_p(1)) \cong \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \varprojlim_n K^*/(K^*)^{p^n}$ の元 q が $\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} (1 + \pi O_K)$ に入るとき crystalline, 入らないとき crystalline ではないが semi-stable になる. $i = 0$ のとき, Hodge-Tate, de Rham, semi-stable, crystalline になるための必要十分条件は, いずれも V が不分岐であること. $i < 0$ のとき, V は Hodge-Tate だが, $[K : \mathbb{Q}_p] < \infty$ かつ V が非自明な拡大のときは, de Rham ではない.

$i \geq 2$ の場合の証明は[Bl-Ka2] §3 参照. $i = 0$ の場合は例 4.2 の特別な場合. $i < 0$ のときつねに Hodge-Tate になることは $H^1_{\mathrm{cont}}(G_K, C(i)) = 0$ (定理 1.1) より従う. $i < 0$ で $[K : \mathbb{Q}_p] < \infty$ かつ V が de Rham なら V が自明な拡大になることは同じく[Bl-Ka2] §3 参照. $i = 0$ の時は, 次のように具体的に $D_{\mathrm{st}}(V)$ が計算できる.

$q \in \varprojlim_n (K^*/(K^*)^{p^n}) = \pi^{\mathbb{Z}_p} \times (1 + \pi O_K)$ から定まる拡大を考えれば十分. $q = \pi^a u$ $(a \in \mathbb{Z}_p, u \in 1 + \pi O_K)$ とする. π, u の $O_{\overline{K}}$ での p 冪乗根の系 $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ をとり, 写像 $\tau \colon G_K \to \mathbb{Z}_p(1)$ を $g(s_n^{a_n} u_n) = \tau(g)_n \cdot s_n^{a_n} u_n$, $\tau(g)_n = \tau(g) \bmod p^n \in \mu_{p^n}(\overline{K})$ で定義する. ただし a_n は $a_n \equiv a \mod p^n$ となる任意の整数で, 上の定義は a_n の取り方によらない. すると V は $\mathbb{Q}_p(1) \oplus \mathbb{Q}_p$ に $g(x, y) = (g(x) + y \cdot \tau(g), y)$ $(g \in G_K, x \in \mathbb{Q}_p(1), y \in \mathbb{Q}_p)$ と G_K を作用させたものとなる. $\underline{u} := (u_n \mod p)_{n \in \mathbb{N}} \in R$ とすると, $[\underline{u}] \in W(R)$ の $\theta \colon W(R) \to O_C$ による像は $u \in 1 + \pi O_K$. 従ってある整数 n_0 に対して, $([\underline{u}] - 1)^{n_0} \in \mathrm{Ker}(\theta) + pW(R)$ となる. よって $([\underline{u}] - 1)^{n n_0}/n! \in W^{\mathrm{PD}}(R)$ $(n \in \mathbb{N})$ となり, $\log([\underline{u}])$ は, A_{crys} より定まる p 進位相に関して, B^+_{crys} の中で収束することがわかる. u_s を $s = (s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ に対応する B_{st} の元とする. また $\mathbb{Q}_p(1) \subset B_{\mathrm{crys}}$ の 0 でない元 t を一つとる. すると $D := D_{\mathrm{st}}(V) = (B_{\mathrm{st}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{G_K}$ は, $e_1 = (t^{-1} \otimes t, 0)$, $e_2 = (-(\log([\underline{u}]) + a u_s) t^{-1} \otimes t, 1 \otimes 1)$ を基底とする K_0 ベクトル空間で, $\varphi(e_1) = p^{-1} e_1$, $\varphi(e_2) = e_2$, $N(e_2) = -a e_1$, $Fil^{-1} D_K = D_K$, $Fil^0 D_K = K \cdot (\log(u) e_1 + e_2)$, $Fil^1 D_K = 0$ となる. ここで $D_K := K \otimes_{K_0} D$ とする.

例 4.5. p**-divisible group に伴う** p **進表現：** $G=(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を O_K 上の p-divisible group とする．すなわち，ある $h\in\mathbb{N}$ に対して，G_n $(n\in\mathbb{N})$ は O_K 上の位数 p^{nh} の finite flat 群スキームで $G_n=\mathrm{Ker}(p^n\colon G_{n+1}\to G_{n+1})$ となっているとする．(例：$(\mu_{p^n})_{n\in\mathbb{N}}$. O_K 上のアーベル・スキーム A の p 冪等分点 $(\mathrm{Ker}(p^n\colon A\to A))_{n\in\mathbb{N}}$.) このとき G の Tate 加群 $T(G):=\varprojlim_n G_n(\overline{K})$ (射影極限は p 倍写像に関してとる．これは G_K が自然に連続に作用する $\mathbb{Z}_p$ 上の rank h の自由加群になる) に対して，$V(G):=\mathbb{Q}_p\otimes_{\mathbb{Z}_p}T(G)$ は crystalline 表現で，その双対表現 $V(G)^*=\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(V(G),\mathbb{Q}_p)$ に伴う filtered φ-module D は，$Fil^0D_K=D_K$, $Fil^2D_K=0$ を満たす．さらに (D,φ) は $G\otimes_{O_K}k$ に伴う Dieudonné 加群 ([Gr1], [Gr2], [M]) の $\mathbb{Q}_p\otimes_{\mathbb{Z}_p}$ をとったもの $(D(G),\varphi)$ と同型であり，Fil^1D_K は $G\otimes_{O_K}k$ の deformation G から定まる部分空間 $FilD(G)_K$ ([Gr1], [Gr2], [M]) と同型になる ([Fo1], [Fo2], [Fo3] §6)．特に，$D^0_{\mathrm{HT}}(V(G)^*)\cong\tan(G')$, $D^1_{\mathrm{HT}}(V(G)^*)\cong\mathrm{Hom}_K(\tan(G),K)$ となる．ここで G' は $(G_n,\ p\colon G_{n+1}\to G_n)$ の Cartier dual をとって得られる p-divisible group. $\tan(G)$ は G に伴う形式群 $\varprojlim_n\Gamma(G_n,\mathcal{O}_{G_n})$ (これは d $(\leq h)$ 変数の形式冪級数環と同型で G_n の群構造より定まる自然な形式群の構造を持つ) の原点での接空間 (K 上 d 次元)．$\tan(G')$ についても同様．

$[K:K_0]<p$ ([L]) もしくは $[K:\mathbb{Q}_p]<\infty$, $p\neq 2$ ([Br5]. [Br2,3,4] も参照) の時は，逆に $Fil^0D_{\mathrm{crys}}(V)=D_{\mathrm{crys}}(V)$, $Fil^2D_{\mathrm{crys}}(V)=0$ を満たす crystalline 表現はこのようにして得られる p 進表現でつくされることも知られている．

特に G が O_K 上のアーベル・スキーム A の p 冪等分点の場合，$(D(G),\varphi)$ は $(K_0\otimes_W H^1_{\mathrm{crys}}(A/W),\varphi)$ と同型で，Fil は同型 $K\otimes_W H^1_{\mathrm{crys}}(W/W)\cong H^1_{\mathrm{dR}}(A_K/K)$ を通して Hodge filtration から誘導される filtration と一致する．また $\tan(G)$ は A_K の原点での接空間と同型である．

歴史的には次の 3 つの事実が[Fo1], [Fo2], [Fo3] §6 より前から知られていた．これらの結果が p 進 Hodge 理論の出発点となった．

(4.5.1) $V(G)$ は Hodge-Tate 表現であり，$D^i_{\mathrm{HT}}(V(G)^*)$ は上に述べたように G, G' の接空間と結びつく (J. Tate [Ta] §4).

(4.5.2) G に $T(G)$ を対応させる O_K 上の p-divisible group の圏から G_K の $\mathbb{Z}_p$ 表現の圏への関手は忠実充満である (J. Tate [Ta] (4.2)).

(4.5.3) G に $(D(G),\varphi,FilD(G)_K)$ を対応させる O_K 上の p-divisible group up to isogeny の圏から $\underline{\mathrm{MF}}_K(\varphi)$ への関手は忠実充満である (A. Grothendieck [Gr1], [Gr2], [M]).

(4.5.1) をもとに，Tate は K 上の proper smooth scheme X の p 進エタール・コホモロジーが Hodge-Tate 表現で，複素数体上での Hodge 分解と類似の分解を持つことを予想した (詳しくは例 4.7 参照)．また (4.5.2), (4.5.3) より，$(D(G),\varphi,FilD(G)_K)$ と $V(G)$ は原理的には互いに他より再構成可能であることがわかる．これをもとに Grothendieck は，一方から他方を構成する代数的な手法 (Grothendieck はこれを mysterious functor と呼んだ) を与え，さらにそれをより高次元のコホモロジーへ一般化せよという問題を提起した．上に説明したように，Fontaine の関手 D_{crys}, V_{crys} がこの mysterious functor を与えている．また高次元への一般化も，Fontaine により crystalline 予想として定式化され，今では完全に証明されている (例 4.7 参照).

例 4.6. Lubin-Tate 形式群の Tate 加群: 例 4.5 より，Lubin-Tate 形式群の Tate 加群 $\otimes_{\mathbb{Z}_p}\mathbb{Q}_p$ は crystalline 表現であるが，特に $\mathbb{Q}_p$ の有限次不分岐拡大に伴う Lubin-Tate

形式群の場合, それに伴う filtered φ-module を具体的に次のように計算することができる.

s を正整数, $K = K_0 := \mathrm{Frac}(W(\mathbb{F}_{p^s}))$, π を K の素元 (例えば p), $\mathcal{F}$ を π に伴う Lubin-Tate 形式群 (π 倍写像を与える冪級数 $[\pi] \in O_K[[X]]$, $[\pi] \equiv \pi X(\mathrm{mod\ deg}\ 2)$, $[\pi] \equiv X^{p^s}(\mathrm{mod}\ p)$ を一つ選んでおく) とする. $a \in O_K$ に対し, a 倍写像を与える冪級数を $[a] \in O_K[[X]]$ と書く. $[a] \equiv aX(\mathrm{mod\ deg}\ 2)$ である. $\lambda \in K[[X]]$ を $\mathcal{F}$ の log とする. $\lambda(X) \equiv X(\mathrm{mod\ deg}\ 2)$, $\frac{d}{dX}\lambda \in O_K[[X]]$ である.

O_C の最大イデアル $\mathfrak{m}$ に $\alpha[+]\beta := \mathcal{F}_\pi(\alpha, \beta)$ $(\alpha, \beta \in \mathfrak{m})$ で和を, $[a]\alpha := [a](\alpha)$ $(\alpha \in \mathfrak{m}, a \in O_K)$ で O_K の作用を定義して得られる O_K 加群を $\mathfrak{m}_{\mathcal{F}}$ と書く. (0 が単位元になる.) $\mathfrak{m}_{\mathcal{F}}$ への G_K の作用は O_K 線型である. $\mathfrak{m}_{\mathcal{F}}$ の π^n 等分点 $\mathfrak{m}_{\mathcal{F},n} := \{x \in \mathfrak{m}_{\mathcal{F}} | \pi^n x = 0\}$ は $O_K/\pi^n O_K$ 上の階数 1 の自由加群であり, G_K が離散的に作用する. $\mathfrak{m}_{\mathcal{F}}$ の Tate 加群 $T(\mathcal{F}) := \varprojlim_n (\mathfrak{m}_{\mathcal{F},n}, [\pi]\colon \mathfrak{m}_{\mathcal{F},n+1} \to \mathfrak{m}_{\mathcal{F},n})$ は G_K が連続線型に作用する O_K 上の階数 1 の自由加群となる.

全射準同型 $\theta\colon W(R) \to O_C$ より誘導される準同型 $\theta_{\mathrm{crys}}\colon A_{\mathrm{crys}} \to O_C$ による $\mathfrak{m}$ の逆像を $\mathfrak{m}_{\mathrm{crys}}$ と書く. $\mathrm{Ker}(\theta_{\mathrm{crys}}) = Fil^1 A_{\mathrm{crys}}$ である. $a \in \mathfrak{m}_{\mathrm{crys}}$ に対して, ある $n \in \mathbb{N}$ があって $a^n \in pA_{\mathrm{crys}} + Fil^1 A_{\mathrm{crys}}$ となり, さらに $a \in pA_{\mathrm{crys}} + Fil^1 A_{\mathrm{crys}}$ に対して $a^n/n! \in pA_{\mathrm{crys}} + Fil^1 A_{\mathrm{crys}}$ $(n \in \mathbb{N})$ となる. また A_{crys} は $O_K = W(\mathbb{F}_{p^s})$-algebra. したがって $x, y \in \mathfrak{m}_{\mathrm{crys}}, a \in O_K$ に対して, $x[+]y := \mathcal{F}(x, y)$, $[a]x := [a](x)$ は A_{crys} の p 進位相に関して収束し, $\mathfrak{m}_{\mathrm{crys}}$ に O_K 加群の構造を与える. この O_K 加群を $\mathfrak{m}_{\mathrm{crys},\mathcal{F}}$ と書く. θ は O_K 加群の準同型 $\mathfrak{m}_{\mathrm{crys},\mathcal{F}} \to \mathfrak{m}_{\mathcal{F}}$ を誘導する. また O_K 加群の間の準同型

$$\lambda_{\mathrm{crys}}\colon \mathfrak{m}_{\mathrm{crys},\mathcal{F}} \to \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathfrak{m}_{\mathrm{crys}} = B^+_{\mathrm{crys}}; x \mapsto \lambda(x)$$

がある. 右辺は普通に O_K 加群と見たもの.

補題 4.6.1. $x, y \in \mathfrak{m}_{\mathrm{crys}}$ に対して, $x \equiv y \mod pA_{\mathrm{crys}} + Fil^1 A_{\mathrm{crys}} (= \theta^{-1}_{\mathrm{crys}}(pO_C))$ ならば, $[\pi^n](x) \equiv [\pi^n](y) \mod p^n A_{\mathrm{crys}}$ $(n \geq 1)$.

証明. $n = 1$ の場合は, $a \in pA_{\mathrm{crys}} + Fil^1 A_{\mathrm{crys}}$ に対して $a^p \in pA_{\mathrm{crys}}$ となることと, $[\pi](X) \equiv X^{p^s} \mod \pi$ より従う. $n \geq 2$ の場合は, $[\pi](X) \equiv X^{p^s} \mod \pi$ を用いて n に関する帰納法で示す. □

さて, G_K 同変な O_K 加群の準同型 $\iota\colon T(\mathcal{F}) \to \mathfrak{m}_{\mathrm{crys},\mathcal{F}}$ を

$$\iota(\alpha) = \lim_{n\to\infty} [\pi^n](\tilde{\alpha}_n) \qquad (\alpha = (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \in T(\mathcal{F}),\ \alpha_n \in \mathfrak{m}_{\mathcal{F},n} \subset \mathfrak{m}_{\mathcal{F}})$$

で定義する. ここで $\tilde{\alpha}_n$ は $\alpha_n \mod pO_C \in O_C/pO_C$ の $\mathfrak{m}$ への任意の持ちあげ. これが収束しかつ持ち上げの取り方によらないことは, 補題 4.6.1 より従う. O_K 加群の準同型を与えることは容易に分かる. $\mathfrak{m}$ において $[\pi^n](\alpha_n) = 0$ であるから, $\iota(\alpha_n) \in Fil^1 A_{\mathrm{crys}}$. 従って ι と λ_{crys} の合成をとって, O_K 加群の準同型

$$\lambda \circ \iota\colon T(\mathcal{F}) \to Fil^1 A_{\mathrm{crys}}$$

を得る.

補題 4.6.2. 準同型 $\lambda \circ \iota$ は単射で, $p = 2$, $s = 1$ 以外の時は, その余核は *p-torsion free* になる. さらに $\lambda \circ \iota(T(\mathcal{F})) \cap Fil^2 A_{\mathrm{crys}} = 0$.

Proof. $p = 2$, $s = 1$ 以外のときは, mod p をとって得られる射が単射で, その像と $Fil^2 A_{\mathrm{crys}}/p$ との交わりが 0 になることを示せば十分. これは補題 2.7 と $T(\mathcal{F})$ の生成元 α に対して $v_p(\alpha_n) = p^{-s(n-1)}(p^s - 1)^{-1}$ (v_p は $v_p(p) = 1$ をみたす C の付値) となることを用いて容易にわかる. $p = 2$, $s = 1$ の場合は, P_0 まで係数拡大して $\mathbb{Z}_2(1)$ の場合に帰着する. □

$[\pi](X) \equiv X^{p^s} \mod \pi$ より, $\varphi^s(\tilde{\alpha}_n)$ は $[\pi](\alpha_n) \mod pO_C$ の持ち上げになる. したがって $\varphi(\iota(\alpha)) = \iota([\pi](\alpha))$, $\varphi^s(\lambda \circ \iota(\alpha)) = \lambda \circ \iota([\pi]\alpha) = \pi \cdot \lambda \circ \iota(\alpha)$ となる. 以後, 単射 $\lambda \circ \iota$ により $T(\mathcal{F}) \subset Fil^1 A_{\mathrm{crys}}$ とみなす. $\alpha \in T(\mathcal{F})$ に対して $\varphi^s(\alpha) = \pi\alpha$ となる.

$V(G) := \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} T(G)$ とおき, $V(G)^*$ をその双対とする. $V(G)$ の K ベクトル空間としての基底 e をとり, e^* をその双対基底とする. また $\chi\colon G_K \to O_K^*$ を G_K の $T(G)$ への作用を与える指標とする. すると B_{crys} 線型な同型

$$B_{\mathrm{crys}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V(G)^* \cong \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}/s\mathbb{Z}} B_{\mathrm{crys}} e_i ; x \otimes ae^* \mapsto \sum_i x\varphi^i(a)e_i$$

があり, 左辺から右辺に誘導される G_K の作用は $g(e_i) = \varphi^i(\chi(g))^{-1}e_i$, Frobenius は $\varphi(e_i) = e_{i+1}$, filtration は $\oplus_i Fil^{\cdot} B_{\mathrm{dR}} e_i$ となる. G_K 不変部分をとり $\dim_K(D_{\mathrm{crys}}(V(G)^*)) \leq \dim_{\mathbb{Q}_p}(V(G)^*) = s$ を用いて,

$$D_{\mathrm{crys}}(V(G)^*) \cong \bigoplus_{0 \leq i \leq s-1} K\varphi^i(e)e_i$$

を得る. 特に $V(G)^*$ は crystalline 表現である. $f_i = \varphi^i(e)e_i$ とおけば, $\varphi(f_i) = f_{i+1}$ $(0 \leq i \leq s-2)$, $\varphi(f_{s-1}) = \pi f_s$, $f_0 \in Fil^1$. $V(G)^*$ への K の作用から誘導される右辺への K の作用は, $a(\sum_i a_i f_i) = \sum_i \varphi^i(a_i) f_i$ となる. 例 4.5 より $\dim_K D^1_{\mathrm{HT}}(V) = 1$ となることを使うと, $Fil^0 =$(全体), $Fil^1 = Kf_0$ となる. (補題 4.6.2 の証明と同様にして, $T(\mathcal{F})$ の生成元 e に対して, $\varphi^i(e)/p \in A_{\mathrm{crys}}$ $(1 \leq i \leq s-1)$ の A_{crys}/p での像が $Fil^1 A_{\mathrm{crys}}/p$ に入らないことを直接証明することもできる.)

例 4.7. Hodge-Tate 予想, de Rham 予想, semi-stable 予想, crystalline 予想： K 上の proper smooth なスキーム X の p 進エタール・コホモロジー $V^m := H^m_{\text{ét}}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p)$ ($X_{\overline{K}} := X \otimes_K \overline{K}$) は, その上への自然な G_K の作用によって p 進表現となる.

この p 進表現は Hodge-Tate 表現であり, それに伴う次数付きの有限次元 K ベクトル空間 $D_{\mathrm{HT}}(V)$ は X の Hodge cohomology $\oplus_{i \in \mathbb{Z}} H^{m-i}(X, \Omega^i_{X/K})$ と canonical に同型になる (Hodge-Tate 予想). 特に系 3.9 (1) より, G_K 同変な分解:

$$C \otimes_{\mathbb{Q}_p} H^m_{\text{ét}}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p) \cong \bigoplus_{0 \leq i \leq d} C(-i) \otimes_K H^{m-i}(X_K, \Omega^i_{X/K})$$

を得る. 複素数体上の場合の Hodge 分解と似ているため, この分解は Hodge-Tate 分解と呼ばれる. 例 4.5 ですでに述べたように, X が good reduction を持つアーベル多様体

の場合 J. Tate により証明されたのが最初である．その後，一般のアーベル多様体の場合 M. Raynaud により，X が good ordinary reduction を持つ場合 S. Bloch と K. Kato [Bl-Ka1] により，一般の場合 G. Faltings [Fa1] により証明された．(この一般の場合の証明は，bad reduction を持つときの証明に Gap があると言われている．しかし今では，後で説明するより強い結果: semi-stable 予想と de Jong の alteration 理論[dJ] をあわせることで，Hodge-Tate 予想を証明することができる．)

p 進エタール・コホモロジー V^m はさらに de Rham 表現でもあり，それに伴う減少 filtration 付の有限次元 K ベクトル空間は，X の de Rham cohomology $H^m_{\mathrm{dR}}(X_K/K)$ +Hodge filtration と canonical に同型である (de Rham 予想，あるいは略して C_{dR})．Hodge spectral sequence の退化により $\mathrm{gr}(H^m_{\mathrm{dR}}(X/K))$ は $\oplus_{i\in\mathbb{Z}}H^{m-i}(X,\Omega^i_{X/K})$ と同型であり，従って Hodge-Tate 予想は de Rham 予想より従う．この予想の定式化はもちろん Fontaine によるものである ([Fo3] A.6)．この予想は，$K = K_0$, $\dim(X) \leq p-1$ で X が good reduction を持つ場合，Fontaine-Messing [Fo-M] によりより強い crystalline 予想 (次に説明する) の形で証明された後，G. Fatlings [Fa2] により完全に証明された．(この証明も，Hodge-Tate 予想の時と同じところで問題が生じている．しかし今では，Hodge-Tate のときと同様，semi-stable 予想と de Jong の alteration 理論 [dJ] をあわせることで，de Rham 予想を証明することができる．)

X が good reduction を持つとき，V^m は crystalline 表現になる．(これは $l(\neq p)$ 進エタール・コホモロジーが不分岐表現になるという事実と対応する．) さらに V^m に伴う filtered φ-module $D_{\mathrm{crys}}(V^m)$ は，次の filtered φ-module と canonical に同型になる (crystalline 予想，あるいは略して C_{crys})．X の O_K 上の proper smooth model をとると，その special fiber の crystalline cohomology を用いて，de Rham cohomology に K_0 構造とその上の σ 半線型な自己同型 φ が自然に定義されて，filtered φ-module となる (Berthelot-Ogus [Ber], [Ber-O1], [Ber-O2])．さらにこの構造は model のとりかたによらないことが分かる (Gillet-Messing [Gi-M])．この予想は Fontaine により定式化され ([Fo3] A.11)，アーベル多様体の場合にまず証明された後 (例 4.5 参照)，$K = K_0$, $\dim(X) \leq p-1$ の場合 Fontaine-Messing [Fo-M] により，一般の場合 G. Faltings [Fa2] により証明された．X がアーベル多様体で $[K:K_0] \leq p-1$ の場合は，逆に V^1 が crystalline 表現ならば X は good reduction を持つことが知られている．

最後に X が semi-stable reduction を持つとき，V^m は semi-stable 表現になる．(これは $l(\neq p)$ 進エタール・コホモロジーが unipotent になるという事実と対応する)．さらに V^m に伴う filtered (φ,N)-module $D_{\mathrm{st}}(V^m)$ は，次の filtered (φ,N)-module と canonical の同型になる (semi-stable 予想，あるいは略して C_{st})．X の O_K 上の semi-stable model をとると，その special fiber (+log 構造) の log crystalline cohomology を用いて，de Rham cohomology に K_0 構造とその上の σ 半線型な自己同型 φ, K_0 線型な自己同型 N が自然に定義されて，filtered (φ,N)-module となる (Hyodo-Kato [H], [H-Ka])．de Jong の alteration 理論 [dJ] を用いて，この構造が model のとりかたによらないことも分かる．この予想は Fontaine-Jannsen により定式化され ([Fo8] 6.2.7), Fontaine によりまずアーベル多様体の場合に証明され，$\dim(X) \leq (p-1)/2$ の場合 Kato [Ka] により，一般の場合筆者 [Tsu] により証明された．いまでは Faltings [Fa3], Niziol [N1], [N2] による 2 つの別証明もある．de Jong の alteration を用いると，X が semi-stable reduction を持たなくても，V^m は potentially semi-stable, すなわち K を有限次拡大でおきかえれば semi-stable になることが分かる．(これは $l(\neq p)$ 進エタール・コホモロジーが quasi-unipotent になるという事実と対応する．)

付録

A1. $(2)_{\mathrm{crys}}$ **の証明：** 記号は§2と同じとする．2つの準同型の合成に分解して，各準同型の単射性を示す．まず $p^i/i! \in \mathbb{Z}_p$ $(i \in \mathbb{N})$ だから，$\xi_p^i = (p - [\underline{p}])^i$, $[\underline{p}]^i = (p - \xi_p)^i$ の2項展開を考えて，$W^{\mathrm{PD}}(R)$ は $W(R)$ 加群として $[\underline{p}]^i/i!$ $(i \in \mathbb{N})$ で生成されることが分かる．さらに $e = [K : K_0]$ とすると，$\underline{p}$ は $\underline{\pi}^e$ の単数倍だから，$[\underline{p}]$ を $[\underline{\pi}]^e$ で置き換えても良い．したがって，$W_{O_K}(R) := O_K \otimes_W W(R)$, $W_{O_K}^{\mathrm{PD}}(R) := O_K \otimes_W W^{\mathrm{PD}}(R)$ とおけば，$W_{O_K}^{\mathrm{PD}}(R)$ は $W_{O_K}(R)[\xi_\pi/\pi] = W_{O_K}(R)[[\underline{\pi}]/\pi] \subset K \otimes_W W(R)$ の部分環となる．$\xi_\pi/\pi = -([\underline{\pi}]/\pi) + 1$ に注意．次に $W^{\mathrm{PD}}(R)$ のときと同様，$W_{O_K}(R)[\xi_\pi/\pi]$ と $\mathrm{Ker}(\theta_K)^i = \xi_\pi^i \cdot (K \otimes_W W(R))$ との交わりにより定まる $W_{O_K}(R)[\xi_\pi/\pi]$ の減少 filtration Fil^i $(i \in \mathbb{N})$ を考えると，補題 2.5 と同様にして次の補題が証明できる．

補題 A1.1. (1) $Fil^i(W_{O_K}(R)[\xi_\pi/\pi]) = (\xi_\pi/\pi)^i \cdot W_{O_K}(R)[\xi_\pi/\pi]$ $(i \in \mathbb{N})$.

(2) $i \in \mathbb{N}$ に対して，$(\xi_\pi/\pi)^i$ 倍写像より誘導される準同型

$$\mathrm{gr}^0(W_{O_K}(R)[\xi_\pi/\pi]) \to \mathrm{gr}^i(W_{O_K}(R)[\xi_\pi/\pi])$$

は同型である．

以下 ^ で p 進完備化をあらわすとする．すると上の補題 A1.1 を用いて，$B^+_{\mathrm{crys}} \to B^+_{\mathrm{dR}}$ の構成と同じ議論により，準同型

$$\begin{aligned} W_{O_K}(R)[\xi_\pi/\pi]^\wedge &\to \varprojlim_i (\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} (W_{O_K}(R)[\xi_\pi/\pi]^\wedge / Fil^i(W_{O_K}(R)[\xi_\pi/\pi])^\wedge)) \\ &\xleftarrow{\sim} \varprojlim_i (\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} (W_{O_K}(R)[\xi_\pi/\pi] / Fil^i(W_{O_K}(R)[\xi_\pi/\pi]))) \\ &= B^+_{\mathrm{dR}} \end{aligned}$$

を得る．$B^+_{\mathrm{crys}} \to B^+_{\mathrm{dR}}$ の単射性の証明と同様に，次の補題 A1.2 を用いてこの準同型の単射性を示せる．この補題 A1.2 は，補題 2.5 のかわりに補題 A1.1 を用いることにより，補題 2.7 と同様に証明できる．まず $W_{O_K}(R)[\xi_\pi/\pi]/\pi$ は，$W_{O_K}(R)/\pi W_{O_K}(R) = W(R)/pW(R) = R$-algebra で，さらに $\underline{\pi} \in R$ の像は $\pi \cdot ([\underline{\pi}]/\pi) \mod \pi = 0$ となるから，$R/\underline{\pi}R$-algebra となる．

補題 A1.2 ([Fo3] 4.5). $i \in \mathbb{N}$ に対し，$Fil^i(W_{O_K}(R)[\xi_\pi/\pi])/\pi$ は $(\xi_\pi/\pi)^j \mod \pi$ $(j \in \mathbb{N}, j \geq i)$ を基底とする $R/\underline{\pi}R$ 上の自由加群である．

あとは準同型

$$O_K \otimes_W A_{\mathrm{crys}} = W_{O_K}^{\mathrm{PD}}(R)^\wedge \to W_{O_K}(R)[\xi_\pi/\pi]^\wedge \tag{A1.3}$$

が単射であることを示せばよい．まず $W_K(R) := K \otimes_W W(R)$ の元は必ず $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \pi^n[a_n]$ $(a_n \in R, a_n = 0\ (n << 0))$ という形にただ一通りに書けることを注意しておく．

補題 A1.4. $\underline{N} = (N_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ を $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ における減少列とする．このとき，$W_K(R)$ の部分集合：

$$W_{K,\underline{N}}(R) := \left\{ \sum_{n\in\mathbb{Z}} \pi^n[a_n] \;\middle|\; a_n \in \underline{\pi}^{N_n} R, a_n = 0\ (n << 0) \right\}$$

は $W_K(R)$ の $W_{O_K}(R)$ 部分加群で $\pi^n[\underline{\pi}]^{N_n}$ $(n \in \mathbb{Z})$ で生成される.

証明. $W_{K,\underline{N}}(R)$ は $\{\sum_{n\geq m}\pi^n[a_n] \mid a_n \in \underline{\pi}^{N_n}R\ (n \geq m)\}$ $(m \in \mathbb{Z})$ の合併集合であり, $W_K(R)$ で π は可逆だから, $N_n = \infty$ $(n < 0)$, すなわち $W_{K,\underline{N}}(R) \subset W_{O_K}(R)$ であるとしてよい. あとは $m \in \mathbb{N}$ に関する帰納法で次のことが示せて, 前半の主張を得る.

$a_n, b_n \in R$ $(0 \leq n \leq m)$ に対して,

$$\Big(\sum_{0\leq n\leq m}\pi^n[a_n]\Big) + \Big(\sum_{0\leq n\leq m}\pi^n[b_n]\Big) = \sum_{0\leq n\leq m}\pi^n[c_n] + \pi^{m+1}c$$
$$\Big(\text{resp. } \Big(\sum_{0\leq n\leq m}\pi^n[a_n]\Big)\Big(\sum_{0\leq n\leq m}\pi^n[b_n]\Big) = \sum_{0\leq n\leq m}\pi^n[c_n] + \pi^{n+1}c\Big)\Big)$$

$(c_n \in R,\ c \in W_{O_K}(R))$ とおくと, $a_n, b_n \in \underline{\pi}^{N_n}R$ $(0 \leq n \leq m)$ (resp. $b_n \in \underline{\pi}^{N_n}R$ $(0 \leq n \leq m)$) ならば, $c_n \in \underline{\pi}^{N_n}R$ $(0 \leq n \leq m)$, $c \in [\underline{\pi}]^{N_m}W_{O_K}(R)$ となる.

後半は N_n が $n >> 0$ で一定になることと前半より従う. □

$\underline{M} = (M_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ を $M_n = 0$ $(n \in \mathbb{N})$, $M_{-n} = ep\min\{m \in \mathbb{N} | n \leq v_\pi((pm!))\}$ $(n \in \mathbb{N})$ で定義する. ここで v_π は $v_\pi(\pi) = 1$ となる $\overline{K}$ の付値とする. すると $W_{O_K}^{\mathrm{PD}}(R)$ は $[\underline{\pi}]^{en}/n!$ $(n \in \mathbb{N})$ で生成される $W_{O_K}(R)$ 加群であることから,

$$W_{O_K}^{\mathrm{PD}}(R) = W_{K,\underline{M}}(R) \tag{A1.5}$$

となることが分かる. また, $\underline{M}' = (M'_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ を $M_n = 0$ $(n \in \mathbb{N})$, $M_{-n} = n$ $(n \in \mathbb{N})$ で定義すれば,

$$W_{O_K}(R)[\xi_\pi/\pi] = W_{O_K}(R)[[\underline{\pi}]/\pi] = W_{K,\underline{M}'}(R) \tag{A1.6}$$

となる. ([Fo3] 4.2 の記号で書くと $W_{K,M'}(R) = S_{O_K,\underline{\pi}R}$ となる.)

さて, (A1.3) の単射性を示そう. $a \in O_K \otimes_W A_{\mathrm{crys}}$, $a \neq 0$ の (A1.3) による像が 0 になったとしよう. $O_K \otimes_W A_{\mathrm{crys}}$ は p 進完備で $W_{O_K}(R)[[\underline{\pi}]/\pi]^\wedge$ は p-torsion free だから $a \not\equiv 0 \mod \pi$ としてよい. a に収束する列 $a_r \in W_{O_K}^{\mathrm{PD}}(R)$ $(r \in \mathbb{N})$ を取る. すべての $r \in \mathbb{N}$ に対して, $a \equiv a_r \mod \pi$ としてよい. (A1.5) より各 a_r は $\sum_{n\in\mathbb{Z}}\pi^n[\underline{\pi}]^{M_n}[a_{r,n}]$ $(a_{r,n} \in R, a_{r,n} = 0\ (n << 0))$ と展開される. 補題 2.7 より, $W_{O_K}^{\mathrm{PD}}(R)/\pi = W^{\mathrm{PD}}(R)/p$ は, $[\underline{\pi}]^{epm}/(\pi^{v_\pi((pm)!)})$ $(m \in \mathbb{N})$ の像を基底とする $R/\underline{\pi}^{ep}R$ 上の自由加群である. a_r の像のこの基底に関する係数は, $a_{r,-v_\pi((pm)!)} \mod \underline{\pi}^{ep}$ $(m \in \mathbb{N})$ となる. 従って, $a_{r,-v_\pi((pm)!)} \equiv a_{0,-v_\pi((pm)!)} \mod \underline{\pi}^{ep}$ $(r \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N})$ で, ある $m_0 \in \mathbb{N}$ があって, すべての $r \in \mathbb{N}$ に対して, $a_{r,-v_\pi((pm_0)!)} \not\equiv 0 \mod \underline{\pi}^{ep}$ となる. a の $W_{O_K}(R)[\xi_\pi/\pi]^\wedge$ での像は 0 だから, 任意の正整数 l に対してある $r \in \mathbb{N}$ があって, $a_r \in \pi^l W_{O_K}(R)[\xi_\pi/\pi]$ となる. (A1.6) より, $\underline{\pi}^{epm_0}a_{r,-v_\pi((pm_0)!)} \in \underline{\pi}^{v_\pi((pm_0)!)+l}R$. $\underline{\pi}$ は R の非零因子だから, l が十分大きいとき, これは $a_{r,-v_\pi((pm_0)!)} \notin \underline{\pi}^{ep}R$ に反する.

A2. B_{crys} **の** Frobenius φ **の単射性の証明：** 基本的には, A1 の後半の (A1.3) の単射性の証明と同じ議論である. A_{crys} の Frobenius の単射性を示せば十分である. 記号は A1 と同じとする. $K = K_0$ の場合の (A1.5) を用いる. $a \in A_{\mathrm{crys}}$, $a \neq 0$ に対して, $\varphi(a) = 0$ となったとする. A_{crys} は p 進完備で p-torsion free だから, $a \not\equiv 0 \mod \pi$

としていい. a に収束する列 $a_r \in W^{\mathrm{PD}}(R)$ $(r \in \mathbb{N})$ をとる. すべての $r \in \mathbb{N}$ に対して $a \equiv a_r \mod \pi$ であるとしてよい. (A.1.5) の $K = K_0$ の場合より, 各 a_r は $\sum_{n\in\mathbb{Z}} p^n[\underline{p}]^{M_n}[a_{r,n}]$ $(a_{r,n} \in R, a_{r,n} = 0\ (n << 0))$ と展開される. すると (A1.3) の単射性の証明と同じ議論により, ある $m_0 \in \mathbb{N}$ があって, すべての $r \in \mathbb{N}$ に対して, $a_{r,-v_p((pm_0)!)} \notin \underline{p}^p R$ となる. 一方, $\varphi(a) = 0$ だから, 任意の整数 l に対して, ある $r \in \mathbb{N}$ があって, $\varphi(a_r) \in \pi^l W^{\mathrm{PD}}(R)$ となる. $\varphi(a_r) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} p^n[\underline{p}]^{pM_n}[a^p_{r,n}]$ だから, 再び (A1.5) を用いて, $\underline{p}^{p^2 m_0} a^p_{r,-v_p((pm_0)!)} \in \underline{p}^{M_{-v_p((pm_0)!)-l}} R$ となること分かる. $M_{-n} \to \infty$ $(n \to \infty)$ であり, また $\underline{p}$ が R の非零因子であることから, $a^p_{r,-v_p((pm_0)!)} \in \underline{p}^{p^2} R$, 従って, $a_{r,-v_p((pm_0)!)} \in \underline{p}^p R$ となり矛盾.

A3. $(1.1)_{\mathrm{st}}$, $(4)_{\mathrm{st}}$ **の証明 ([Fo7] 4.3)：** まず u_s が $K \otimes_{K_0} B_{\mathrm{crys}} (\subset B_{\mathrm{dR}})$ の分数体に入らないことを示そう. 記号は A1 と同じとする. π の p 冪乗根の系 $s = (s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を用いて, $\underline{\pi} := (s_n \mod p) \in R$, $\xi_\pi = \pi - [\underline{\pi}] \in W_{O_K}(R)$ を定義すれば, $u_s = -\sum_{n\ge1} n^{-1}(\xi_\pi/\pi)^n$ となる. $W_{O_K}(R)[\xi_\pi/\pi]$ の p 進完備化を S おくと, A1 より単射 $O_K \otimes_W A_{\mathrm{crys}} \to B^+_{\mathrm{dR}}$ は単射 $S \to B^+_{\mathrm{dR}}$ を経由する. (この S は[Fo7] 4.3.2 の S より少し小さい.) 従って, 任意の $\alpha \in S - \pi S$, $r \in \mathbb{N}$ に対して, $p^r \alpha u_s \notin S$ を示せば十分. 補題 A1.2 および $O_C/\pi O_C \cong W_{O_K}(R)/(\mathrm{Ker}(\theta_{O_K}) + \pi W_{O_K}(R)) = R/\underline{\pi}R$ より, α の展開

$$\alpha = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n(\xi_\pi/\pi)^n \qquad (a_n \in W_{O_K}(R)\ (n \in \mathbb{N}), a_n \to 0\ (n \to \infty))$$

で, ある $m \in \mathbb{N}$ に対して, $a_n \in \pi W_{O_K}(R)$ $(0 \le n \le m-1)$, $\theta(a_m) \notin \pi O_C$ となるものがとれる. 一方 $r \in \mathbb{N}$ に対して, $p^r u_s$ の展開 $\sum_{n>0} -p^r n^{-1}(\xi_\pi/\pi)^n$ の $0 \le n \le p^{r+1}-1$ および $p^{r+1}+1 \le n \le 2p^{r+1}-1$ の項は S に含まれるから,

$$p^r u_s = -p^{-1}(\xi_\pi/\pi)^{p^{r+1}} + b_r + c_r \quad (b_r \in S,\ c_r \in Fil^{2p^{r+1}} B_{\mathrm{dR}})$$

とかける. したがって, $p^{r+1} \ge m+1$ をみたす (r を十分大きくとっておけば満たされる) $r \in \mathbb{N}$ に対してに対して, もし $p^r \alpha u_s \in S$ になったとすると,

$$a_m \pi^{-1}(\xi_\pi/\pi)^{p^{r+1}+m} \in S + Fil^{p^{r+1}+m+1} B_{\mathrm{dR}}$$

となる. ($\pi^{e-1}p^r u_s \alpha$ を考えよ.) A1 の記号で, $Fil^i S$ を $Fil^i(W_{O_K}(R)[\xi_p/\pi])$ の p 進完備化とすると,

$$\mathrm{gr}^i S \cong \mathrm{gr}^i(W_{O_K}(R)[\xi_p/\pi]) \subset \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathrm{gr}^i(W_{O_K}(R)[\xi_p/\pi]) \cong \mathrm{gr}^i B_{\mathrm{dR}} \quad (i \in \mathbb{N})$$

だから, $Fil^i S = Fil^i B_{\mathrm{dR}} \cap S$ $(i \in \mathbb{N})$ となり, また補題 A1.1 より $\mathrm{gr}^i S$ は $W_{O_K}(R)$ 加群として, $(\xi_\pi/\pi)^i$ で生成される. 従って,

$$a_m \pi^{-1}(\xi_\pi/\pi)^{p^{r+1}+m} \in W_{O_K}(R) \cdot (\xi_\pi/\pi)^{p^{r+1}+m} + Fil^{p^{r+1}+m+1} B_{\mathrm{dR}}.$$

$(\xi_\pi/\pi)^{p^{r+1}+m}$ で割って, $\pi^{-1}a_m \in W_{O_K}(R) + Fil^1 B_{\mathrm{dR}}$. 従って $\pi^{-1}\theta(a_m) \in O_C$ となる. これは矛盾.

次に u_s が $\mathrm{Frac}(K \otimes_{K_0} B_{\mathrm{crys}})$ 上代数的であると仮定して矛盾を導こう. u_s の $\mathrm{Frac}(K \otimes_{K_0} B_{\mathrm{crys}})$ 上の monic な最小多項式を $f(T) = T^d + b_{d-1}T^{d-1} + b_{d-2}T^{d-2} + \cdots + b_0$ $(d \ge 1)$ とする. 任意の元 $g \in G_K$ に対して, $g(u_s) = u_s + t$ $(t \in \mathbb{Q}_p(1) \subset B_{\mathrm{crys}})$ とかけるから $((1.2)_{\mathrm{st}}, (1.3)_{\mathrm{st}})$, $g(f)(T + g(u_s) - u_s)$ も u_s の最小多項式となる. $d-1$ 次の係数を比較して, $g(b_{d-1}) + d(g(u_s) - u_s) = b_{d-1}$. 従って $b_{d-1} + du_s \in B^{G_K}_{\mathrm{dR}} = K$. ゆえに $u_s \in \mathrm{Frac}(K \otimes_{K_0} B_{\mathrm{crys}})$ となって矛盾.

References

[Ber] Berthelot, P., *Cohomologie Cristalline des Schémas de Caractéristique $p > 0$*, Lecture Notes in Math. 407, Springer, 1974.

[Ber-O1] Berthelot, P. and Ogus, A., *Notes on crystalline cohomology*, Princeton University Press, Princeton, 1978.

[Ber-O2] Berthelot, P. and Ogus, A., *F-isocrystals and de Rham cohomology I*, Inv. Math. **72** (1983), 159–199.

[Bl-Ka1] Bloch, S. and Kato, K., *p-adic etale cohomology*, Publ. Math. IHES. **63** (1986), 107-152.

[Bl-Ka2] Bloch, S. and Kato, K., *L-functions and Tamagawa numbers of motives*, The Grothendieck Festschrift vol I, Birkhäuser, Boston, 1991, pp. 333–400.

[Br1] Breuil, C., *Construction de représentations p-adiques semi-stables*, Ann. Scient. E. N. S. **31** (1998), 281–327.

[Br2] Breuil, C., *Schémas en groupes sur un anneau de valuation discrète complet très ramifié*, prépublication, Université de Paris-Sud, 1998.

[Br3] Breuil, C., *Schémas en groupes et modules filtrés*, C. R. Acad. Sci. Paris **328** (1999), 93–97.

[Br4] Breuil, C., *Représentations semi-stables et modules fortement divisibles*, Inv. Math. **136** (1999), 89–122.

[Br5] Breuil, C., *Modules faiblement admissibles et groupes p-divisibles*, prépublication, Université de Paris-Sud, 1999.

[C] Colmez, P, *Représentations p-adiques d'un corps local*, Proceedings of the ICM, Vol. II (Berlin, 1998), Doc. Math., 1998, pp. 153–162.

[dJ] de Jong, A. J., *Smoothness, semi-stability and alterations*, Publ. Math. IHES **83** (1996), 51–93.

[Fa1] Faltings, G., *p-adic Hodge theory*, Journal of the AMS **1** (1988), 255–299.

[Fa2] Faltings, G., *Crystalline cohomology and p-adic Galois representations*, Algebraic analysis, geometry, and number theory, Johns Hopkins University Press, Baltimore, 1989, pp. 25–80.

[Fa3] Faltings, G., *Almost étale extensions*, preprint, MPI Bonn 1998.

[Fo1] Fontaine, J.-M., *Groupes p-divisibles sur les corps locaux*, Astérisque **47–48** (1977).

[Fo2] Fontaine, J.-M., *Modules galoisiens, modules filtrés et anneaux de Barsotti-Tate* in Journées de Géométrie Algébrique de Rennes, Astérisque **65** (1979), 3–80.

[Fo3] Fontaine, J.-M., *Sur certains types de représentations p-adiques du groupe de Galois d'un corps local; construction d'un anneau de Barsotti-Tate*, Ann. of Math. **115** (1982), 529–577.

[Fo4] Fontaine, J.-M., *Cohomologie de de Rham, cohomologie cristalline et représentations p-adiques*, Algebraic Geometry, Lecture Notes in Math. 1016, Springer, 1983, pp. 86–108.

[Fo5] Fontaine, J.-M., *Représentations p-adiques*, Proc. of the ICM 1983, Warszawa, pp. 475–486.

[Fo6] Fontaine, J.-M., *Représentations p-adiques des corps locaux*, The Grothendieck Festschrift vol II, Birkhäuser, Boston, 1991, pp. 249–309.

[Fo7] Fontaine, J.-M., *Le corps des périodes p-adiques*, Périodes p-adiques, Séminaire de Bures, 1988, Astérisque **223** (1994), 59–111.

[Fo8] Fontaine, J.-M., *Représentations p-adiques semi-stables*, Périodes p-adiques, Séminaire de Bures, 1988, Astérisque **223** (1994), 113–183.

[Fo-I] Fontaine, J.-M. and Illusie, L., *p-adic periods: a survey*, Proceedings of the Indo-French Conference on Geometry (Bombay, 1989), Hindustan Book Agency, Delhi, 1993, pp. 57–93.

[Fo-L] Fontaine, J.-M. and Laffaille, G., *Constructions de représentations p-adiques*, Ann. Sci. Éc. Norm. Sup. **15** (1982), 547–608.

[Fo-M] Fontaine, J.-M. and Messing, W., *p-adic periods and p-adic étale cohomology*, Contemporary Math. **67** (1987), 179–207.

[Gi-M] Gillet, H. and Messing, W., *Cycle classes and Riemann-Roch for crystalline cohomology,* Duke Math. J., **55** (1987), 501–538.

[Gr1] Grothendieck, A., *Groupes de Barsotti-Tate et cristaux,* Actes Congrès Int. Math. Nice 1970, tome I, Gauthier-Villars, Paris, 1971, pp. 431–436.

[Gr2] Grothendieck, A., *Groupes de Barsotti-Tate et cristaux de Dieudonné,* Presses de l'Université de Montréal, 1974.

[H] Hyodo, O., *On the de Rham-Witt complex attached to a semi-stable family,* Compositio Mathematica **78** (1991), 241-260.

[H-Ka] Hyodo, O. and Kato, K., *Semi-stable reduction and crystalline cohomology with logarithmic poles,* Périodes p-adiques, Séminaire de Bures, 1988, Astérisque **223** (1994), 221–268.

[I] Illusie, L., *Cohomologie de de Rham et cohomologie étale p-adique,* Séminaire Bourbaki 1989/90, Exp. 726, Astérisque **189-190** (1990), 325–374.

[Ka] Kato, K., *Semi-stable reduction and p-adic etale cohomology,* Périodes p-adiques, Séminaire de Bures, 1988, Astérisque **223** (1994), 269–293.

[L] Laffaille G., *Groupes p-divisibles et modules filtrés: le cas peu ramifié*, Bull. Soc. math. France **108** (1980), 187–206.

[M] Messing, W., *The crystals associated to Barsotti-Tate groups: with applications to abelian schemes*, Lecture Notes in Math., vol. 264, Springer, 1972.

[N1] Niziol, W., *Crystalline conjecture via K-theory*, Ann. Scient. E. N. S. **31** (1998), 659–681.

[N2] Niziol, W., *Semi-stable conjecture for verticall log-smooth families,* preprint, 1998.

[Sen1] Sen, S., *Lie alebras of Galois groups arising from Hodge-Tate modules*, Ann. of Math. **97** (1973), 160–170.

[Sen2] Sen, S., *Continuous cohomology and p-adic Galois representations*, Inv. Math. **62** (1980), 89–116.

[Ser1] Serre, J.-P., *Sur les groupes de Galois attachés aux groupes p-divisibles.*, Proceedings of a Conference on Local Fields, Driebergen, Springer, 1967, pp. 118–131.

[Ser2] Serre, J.-P., *Abelian l-adic representations and elliptic curves*, Benjamin, New York, 1968.

[Ser3] Serre, J.-P., *Groupes algébriques associés aux modules de Hodge-Tate.* in Journées de Géométrie Algébrique de Rennes, Astérisque **65** (1979), 155–188.

[Ta] Tate, J., *p-divisible groups*, Proceedings of a Conference on Local Fields, Driebergen, Springer, 1967, pp. 158–183.

[Tsu] Tsuji, T., *Syntomic complexes and p-adic vanishing cycles*, J. reine angew. Math. **472** (1996), 69–138.

[W1] Wintenberger, J.-P., *Un scindage de la filtration de Hodge pour certaines variétés algébriques sur les corps locaux,* Ann. of Math. **119** (1984), 511-548.

[W2] Wintegberger, J.-P., *Groupes algébriques associés à certaines représentations p-adiques,* American J. of Math. **108** (1986), 1425–1466.