数理解析研究所講究録
1097 巻 1999 年 126-138

3次元完備局所環の類体論

東北大 D3 松見 和也 (KAZUYA MATSUMI)

1. Introduction

本稿では, 昨年京大数理解析研究所で話させて頂いた3次元完備局所環(剰余体有限)の類体論を解説する事を目標にする. 以下, 1. introduction, 2. 歴史, 3. イデール類群の定義, 4. 主定理の証明 の順に述べさせて頂く.

我々の対象は, 正標数の3次元完備正則局所環 $\mathbb{F}_q[[X, Y, Z]]$ である. 以下本稿では, この環を常に A と書き, 更に A の商体を K と書くこととする. K^{ab} で K の最大アーベル拡大を表す時, ガロア群 $\mathrm{Gal}(K^{ab}/K)$ を K の幾何だけで完全に把えたい. 具体的には, K から標準的に作られる位相の入った群 C_K (イデール類群と呼ぶ), 及び相互律写像

$$\rho_K : C_K \to \mathrm{Gal}(K^{ab}/K)$$

を構成し, $\mathrm{Gal}(K^{ab}/K)$ を C_Kで近似したい. 行先のガロア群は Krull位相に依り, コンパクトになっている. 一番望ましいのは, ρ_Kが位相群の間の同型になることであるが残念ながらこれは期待できない. 実際我々が以下で構成するイデール類群は局所コンパクトであるかどうかも分らず, むしろそうではないと思われる. 更に, C_Kの非自明な加除部分群がρ_Kの核になる可能性もある. しかし, 以下で述べる主定理は有限次アーベル拡大を考える範囲では, 上記相互律写像ρ_Kが充分精密であることを示す. 主定理を述べる.

<u>主定理</u> (3次元完備局所環の類体論): pを奇素数とし, $A = \mathbb{F}_q[[X, Y, Z]]$ ($q = p^m$), K を A の商体とする. ここで K に対し Milnor-Kato 予想が成立するとする (以下の Remark 2参照). すると, K に対して標準的に構成される位相の入ったイデール類群 C_K が存在し,

$$\rho_K^* : H^1_{\mathrm{Gal}}(K, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_c(C_K, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$

なる標準同型が存在する. ただし, $\mathrm{Hom}_c(C_K, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ はC_Kから$\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$への位数有限の連続準同形全体のなす群を意味し, $H^1_{\mathrm{Gal}}(K, *)$ は K の Galois コホモロジーとする.

Remark 1 : $p=2$ の時には, Milnor K-theory に対する Gersten-Quillen resolution を仮定すれば同じ類体論が成立する ([Ma] (I) 参照).

Remark 2 : 上で仮定した Milnor-Kato 予想とは任意の体 K に対し, K の標数と素な任意の自然数 m と任意の自然数 n に対して Galois symbol $K_n^M(K)/m \to H_{\mathrm{Gal}}^n(K, \mu_m^{\otimes n})$ の同型を主張する (全射性は Weak Milnor-Kato 予想と呼ばれる). 周知の如く V. Voevodsky, A. Suslin そして M. Rost, 花村氏等により, 本格的な発展が現在進展中である. 更にこの Minor-Kato 予想が以下に述べる高次元局所体に対して常に成立すること ([Ka1] I, II), 又完備離散附値体に対しては Minor-Kato 予想がその剰余体に対する Minor-Kato 予想と深く関係する事が [Ka4] で加藤により証明されている.

Remark 3 : 上記定理に於ける写像 ρ_K^* の双対を取る事に依り, 相互律写像

$$\rho_K\colon C_K \to \mathrm{Gal}(K^{ab}/K)$$

を得るが, ρ_K^* の単射性から ρ_K が Galois 群に入った Krull 位相で稠密, つまり L/K を有限次アーベル拡大とする時, 常に $C_K \to \mathrm{Gal}(L/K)$ が全射である事が分かる. 更にもっと詳しく次の定理が成立する.

系: L/K を有限次アーベル拡大とし, A の L 内での整閉包 B が正則であるとする. このとき, 上記写像 ρ_K^* の双対写像 ρ_K は同型

$$\rho_K\colon C_K/N_{L/K}(C_L) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Gal}(L/K)$$

を導く.

Remark 4 : 上の系で, A の整閉包の正則性は外せない. 実際, 設定は違うが, 正標数2次元完備正則局所環の類体論に於いて, 系の同型が崩れる例が志甫氏によって構成されている (cf. [Ma-Sh]).

2. 歴史

さて, 主定理の前に簡単に類体論の歴史を解説する. そもそも類体論とは代数体の有限次アーベル拡大を手にとるように理解する理論であった. 例えば, 4 で割って 1 余る素数 p が $p=a^2+b^2$ $(a, b \in \mathbb{Z})$ の形に表される等の数論的に面白い事実が, 類体論を有理数体 $\mathbb{Q}$ に適用することによって簡単に導かれる. この代数体の類体論は高木貞治によって証明されたのであるが, その後この代数体の類体論の証明に, 各素数 p で $\mathbb{Z}$ を完備化して得られる p-進整数環 $\mathbb{Z}_p$ の商体である (1 次元) 局所体 $\mathbb{Q}_p$, 或いはその有限次拡大体 F の類体論 (所謂局所類体論) が有力であることが発見された (高木

貞治は Hecke の L-関数を用いて類体論を証明したcf. [Ta]). この場合, F を (1 次元) 局所体, F^{ab} をその最大アーベル拡大として,

$$\rho_F \colon F^* / m \xrightarrow{\sim} \mathrm{Gal}(F^{ab} / F) / m$$

なる同型が存在する (m は全ての 2 以上の自然数とする). ρ_F は F の相互律写像と呼ばれ, ブラウアー群の理論を用いて canonical に定義される写像である.

さて, この局所類体論は, 日本の加藤和也, 及びソ連の A. N. Parshin によって独立に高次元局所体に対して拡張された.

<u>定義 1</u> : K_n が n-次元局所体とは, 完備離散附値体で, その剰余体 K_{n-1} が $(n-1)$-次元局所体であるようなものであり, 0-次元局所体は有限体であるとする.

<u>定義 2</u> : 任意の体 F に対して, degree i の Milnor の K-群 $K_i^M(F)$ が以下で定義される. 即ち $K_i^M(F) \colon = (F^* \otimes_{\mathbb{Z}} F^* \cdots \otimes_{\mathbb{Z}} F^*) / I$. ここで I は free-$\mathbb{Z}$-module として, 或る $i \neq j$ に対して $x_i + x_j = 1$ となるような元 $(x_1 \otimes \cdots \otimes x_i \otimes \cdots \otimes x_j \otimes \cdots \otimes x_n)$ で生成される部分群とする.

この時, n-次元局所体 K_n に対して次の類体論がある ([Ka1], [Ka3], [Pa]).

<u>定理</u> (加藤, Parshin) : K_n を n-次元局所体とし, K_n^{ab} で K_n の最大アーベル拡大を表す時, K_n の n-次の Milnor K-群 $K_n^M(K_n)$ と標準的相互律写像

$$\rho_{K_n} \colon K_n^M(K_n) \to \mathrm{Gal}(K_n^{ab} / K_n)$$

が存在して, 任意の有限次アーベル拡大 L / K_n に対して, ρ_{K_n} は同型

$$\rho_{K_n} \colon K_n^M(K_n) / N_{L/K}(K_n^M(L)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Gal}(L / K_n)$$

が存在する. 更に, この対応 $L \mapsto N_{L/K}(K_n^M(L))$ によって K_n の有限次アーベル拡大と $K_n^M(K_n)$ の指数有限の開部分群とが 1 対 1 に対応する.

Remark 5 : Parshin は正標数の場合に限って高次元局所類体論を証明した (cf. loc.cit.). ただし, この場合は剰余体に非分離拡大は起きず常に分離的であり, Serre 等によってある程度は考察されていた. しかしこの意味で本当に "従来の" 類体論を越えたのは加藤の扱った混標数の高次元局所類体論であり, 混標数高次元局所体 K_n (K_n の標数は 0 で剰余体 K_{n-1} の標数は $p > 0$ となる) に対しては, アーベル拡大 L / K_n で剰余体間に真に非自明な非分離拡大が起る場合が存在する.

さて, この加藤, Parshin による高次元局所体の類体論 (特に 2 次元の場合) を寄せ集める事に依り, 斎藤 秀司は以下に述べる 2 次元完備局所環の類体論を [Sa] で証明した.

__定理__ (斎藤 秀司) : B を $\mathbb{F}_p[[X,Y]]$ 或いは $\mathbb{Z}_p[[X]]$ なる 2 次元完備局所環, F をその商体とする時, $C_F :=(\prod_{\mathfrak{p}} K_2^M(F_{\mathfrak{p}}))/K_2^M(F)$ (ただし $\mathfrak{p}$ は全ての高さ 1 の B の素イデアルを走り, $F_{\mathfrak{p}}$は F の $\mathfrak{p}$ での完備化を表す. つまり $F_{\mathfrak{p}}$は 2 次元局所体である) を F に伴うイデール類群であるとして, 制限直積による位相を入れることにより

$$\rho_F^* : H^1_{\mathrm{Gal}}(F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_c(C_F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$

なる同型が成立する.

Remark 6 : 上記斎藤の定理は B が正則である場合のみを述べたが, 実際は B が正則でない場合も込めて厳密に斎藤によって証明されている. そこでは, 完全分解被覆と呼ばれる, もはや類体論の手のとどかないようなアーベル拡大があることが示されている (cf. loc. cit.).

以上の様な輝かしい成果の一方, Spencer Bloch によって数論曲面の不分岐類体論が (特別の場合に) 証明された (cf. [B]). この結果は後になって加藤-斎藤 (秀) によって [K-S1] に於いて一般の数論曲面の場合に証明されるのであるが, その証明に上記加藤, 及び斎藤が証明していた様々な類体論が本質的に利用されるのである. 更に彼等は [K-S2] で数論曲面の不分岐類体論の分岐版である 2 次元大域体の類体論を厳密に証明し, さらに [K-S3] に於いて, 任意標数の任意次元大域体 (素体上有限生成の体を意味する. 彼等は arithmeic fields と呼んでいる.) に対して類体論を証明した.

3. イデール類群 C_Kの定義

さて, 我々の体 K にもどる. 本節での主目的は K に対して標準的なイデール類群 C_K を定義することにある. 先ず, 記号を fix する.

__**Notations**__ :

P_A^2 : A の全ての高さ 2 の素イデアルの集合.
P_A^1 : A の全ての高さ 1 の素イデアルの集合.
$P_{\mathfrak{m}}^1$: $A_{\mathfrak{m}}$ の 全ての高さ 1 の素イデアルの集合.
$A_{\mathfrak{m}} := \varprojlim_n A_{(\mathfrak{m})}/(\mathfrak{m})^n$. ただし $\mathfrak{m} \in P_A^2$ とする.
$A_{\mathfrak{p}} := \varprojlim_n A_{(\mathfrak{p})}/(\mathfrak{p})^n$. ただし $\mathfrak{p} \in P_A^1$ とする.
$A_{\mathfrak{m},\mathfrak{p}_{\mathfrak{m}}} := \varprojlim_n A_{\mathfrak{m}(\mathfrak{p}_{\mathfrak{m}})}/(\mathfrak{p}_{\mathfrak{m}})^n$. ただし, $\mathfrak{p}_{\mathfrak{m}} \in P_{\mathfrak{m}}^1$ とする.
$K_m := \mathrm{Frac}\, A_{\mathfrak{m}}$, $K_{\mathfrak{p}} := \mathrm{Frac}\, A_{\mathfrak{p}}$, $K_{\mathfrak{m},\mathfrak{p}_{\mathfrak{m}}} := \mathrm{Frac}\, A_{\mathfrak{m},\mathfrak{p}_{\mathfrak{m}}}$.

Remark 7 : 上記 Notations で, $A_{(\mathfrak{m})}$, $A_{(\mathfrak{p})}$ 等は各々 A の素イデアル $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{p}$ による局所化を表し, 又 $A_{\mathfrak{m}(\mathfrak{p}_\mathfrak{m})}$ は $A_\mathfrak{m}$ の高さ 1 の素イデアル $\mathfrak{p}_\mathfrak{m}$ による局所化を表すものとする. 又, Frac は全商環を意味する.

Remark 8 : 上記 $K_{\mathfrak{m},\mathfrak{p}_\mathfrak{m}}$ は所謂上で述べた 3 次元局所体である. 更に, $A_\mathfrak{m}$ は 2 次元完備局所環であるが, 上で述べた斎藤秀司によって扱われた 2 次元完備局所環 B と異なる点は剰余体が $A_\mathfrak{m}$ では 1 次元局所体であり, B では有限体であるという点である.

さて, 続いて高次元局所体の Milnor K-群の Kato-Filtration を解説する. $K_{\mathfrak{m},\mathfrak{p}_\mathfrak{m}}$ を上で得た 3 次元局所体とする. このとき, $K_{\mathfrak{m},\mathfrak{p}_\mathfrak{m}}$ の Milnor K-群 $K_3^M(K_{\mathfrak{m},\mathfrak{p}_\mathfrak{m}})$ に加藤に従って, 以下のような Filtration を導入する.

定義 3 : x_1, x_2, x_3 を $K_{\mathfrak{m},\mathfrak{p}_\mathfrak{m}}$ の乗法群 $K^*_{\mathfrak{m},\mathfrak{p}_\mathfrak{m}}$ の元とする. この時, $i \geq 0$ なる自然数 i に対して, $K_3^M(K_{\mathfrak{m},\mathfrak{p}_\mathfrak{m}})$ の部分群 $U^iK_3^M(K_{\mathfrak{m},\mathfrak{p}_\mathfrak{m}})$ を

$$U^iK_3^M(K_{\mathfrak{m},\mathfrak{p}_\mathfrak{m}}):=\{\mathrm{Im}\colon x_1\otimes x_2\otimes x_3 \mapsto K_3^M(K_{\mathfrak{m},\mathfrak{p}_\mathfrak{m}}) \mid x_1 \in (1+{\mathfrak{p}_\mathfrak{m}}^i A_{\mathfrak{m},\mathfrak{p}_\mathfrak{m}})^*,\ x_2, x_3 \in K^*_{\mathfrak{m},\mathfrak{p}_\mathfrak{m}}\}$$

として定義する.

さて, 我々のイデール類群を定義するのに, もう一つ準備が必要である. それは, 分岐を control する Modulus M である.

定義 4 : 我々は モジュラス M を,

$$M:=\bigoplus\nolimits_{\mathfrak{p}\in P_A^1} n_\mathfrak{p}\,(\bar{\mathfrak{p}})$$

で定義する. ただし, $n_\mathfrak{p}$ は 0 以上の自然数で, 殆ど全ての $\mathfrak{p}$ で 0 であり, かつ $(\bar{\mathfrak{p}})$ は $\mathfrak{p}=0$ で定義される A の素因子を表す.

この M はいわば effective な A の Divisor であると考えられる. 以下でこの M を用いて, 我々のイデール類群 C_K を定義する.

先ず 全ての高さ 2 の素イデアル $\mathfrak{m} \in P_A^2$ に対して, 群 $C_M(\mathfrak{m})$ を次で定義する. 即ち,

$$C_M(\mathfrak{m}):=\mathrm{Coker}\left(K_3^M(K_\mathfrak{m}) \overset{diag}{\to} \bigoplus\nolimits_{\mathfrak{p}_\mathfrak{m}}\left(K_3^M(K_{\mathfrak{m},\mathfrak{p}_\mathfrak{m}})/U^{M(\mathfrak{p}_\mathfrak{m})}K_3^M(K_{\mathfrak{m},\mathfrak{p}_\mathfrak{m}})\right)\right) \tag{3.1}$$

ここで, $\mathfrak{p}_\mathfrak{m}$ は $P_\mathfrak{m}^1$ の元を走り, $M(\mathfrak{p}_\mathfrak{m})$ を写像 Spec $A_\mathfrak{m} \to$ Spec A によって $\mathfrak{p}_\mathfrak{m}$ が $\mathfrak{p}_\mathfrak{m} \mapsto \mathfrak{p}$ に移るとき, $M(\mathfrak{p}_\mathfrak{m}):=n_\mathfrak{p}$ で定義する. 又, *diag* とは *diagonal* 写像の事である.

更に今定義した群 $C_M(\mathfrak{m})$ を用いて次に群 $C_M(K)$ を定義する．即ち

$$C_M(K) := \mathrm{Coker}\left(\bigoplus\nolimits_{\mathfrak{p}\in P_A^1} K_3^M(K_{\mathfrak{p}}) \to \bigoplus\nolimits_{\mathfrak{m}\in P_A^2} C_M(\mathfrak{m})\right) \tag{3.2}$$

として定義する．ここで各 $K_3^M(K_{\mathfrak{p}})$ の像が $C_M(\mathfrak{m})$ の直和に入ることも非自明だが証明される (詳しくは [Ma] 参照)．そして $C_M(K)$ には discrete な位相を入れる

Remark 9 : $C_M(K)$ は群としては非常に大きい．例えば, M を任意の modulus, $D_{\mathfrak{p}}$ を任意の素因子とすると，$(C_{M+D_{\mathfrak{p}}}(K)/C_M(K))/p$ は大体 $A/u_{\mathfrak{p}}$ の Pontyragin dual に等しい ($u_{\mathfrak{p}}$は 素イデアル $\mathfrak{p}$ の定義式で, $A/u_{\mathfrak{p}}$ は剰余体有限の 2 次元完備局所環である)．

さて，イデール類群は以上の準備の基で次で定義される．

定義 5 (イデール類群 C_K の定義): $C_M(K)$ をモジュラス M に対して上で定義される群とするとき，イデール類群 C_K を次の射影極限で定義する．

$$C_K := \varprojlim\nolimits_M C_M(K) \tag{3.3}$$

ただし, $\varprojlim_M$ は $M' > M$ ($\Leftrightarrow$ $M'-M$ が effective) なる場合の全射, $C_{M'}(K) \twoheadrightarrow C_M(K)$ に関して取る．

位相の定義 : 今定義した C_K に位相を定義する．それは C_K に 各 $C_M(K)$ から定まる逆極限位相を入れる．勿論, 各 $C_M(K)$ は discrete な位相を持つとする．つまり, $\mathrm{Ker}(C_K \to C_M(K))$ は常に C_K で open である．

Remark 10 : 以上の定義によって, 我々は K に対して canonical に定まる位相群 C_K を得たが, この造り方は加藤-斎藤両氏が 2 次元大域体のイデール類群を造る仕方をそのまま真似たものである (cf. [K-S2])．

Remark 11 : 上で述べた イデール類群は次の様に一見分かり易く表せる．即ち

$$C_K := \left(\prod_{\mathfrak{m},\mathfrak{p}_{\mathfrak{m}}}{}' K_3^{top}(K_{\mathfrak{m},\mathfrak{p}_{\mathfrak{m}}})\right) \Big/ \prod\nolimits_{\mathfrak{p}\in P_A^1} K_3^M(K_{\mathfrak{p}}) \prod\nolimits_{\mathfrak{m}\in P_A^2} K_3^M(K_{\mathfrak{m}}) \cdots (\Diamond)$$

ここで $\prod'_{\mathfrak{m},\mathfrak{p}_{\mathfrak{m}}}$ は直積の部分集合で或る条件を満足するもの (簡単な記述は出来ない, 詳細は [Ma] 参照) であり，$K_3^{top}(*)$ は A. N. Parshin によって定義された topological Milnor K-群である．例えば 3 次元局所体 $K_{\mathfrak{m},\mathfrak{p}_{\mathfrak{m}}}$ に対しては,

<u>定理</u> : $K_3^{top}(K_{\mathfrak{m},\mathfrak{p}_\mathfrak{m}}) = K_3^M(K_{\mathfrak{m},\mathfrak{p}_\mathfrak{m}}) \,/\, \bigcap_{i\geqq 0} U^i\, K_3^M(K_{\mathfrak{m},\mathfrak{p}_\mathfrak{m}})$ なる等号が成立する. ただし, $U^i K_3^M(K_{\mathfrak{m},\mathfrak{p}_\mathfrak{m}})$ は Kato-filtration である.

等が成立する. 尚, 上の表示で分母の各群 $K_3^M(K_\mathfrak{p})$, $K_3^M(K_\mathfrak{m})$ 等は分子の群である直積の部分集合 $\prod'_{\mathfrak{m},\mathfrak{p}_\mathfrak{m}} K_3^{top}(K_{\mathfrak{m},\mathfrak{p}_\mathfrak{m}})$ の対応する箇所に diagonal に入るものとする (詳細は略するが, 各々の体 $K_\mathfrak{p}$, $K_\mathfrak{m}$ の類体論の相互律写像 $K_3^M(K_\mathfrak{p}) \overset{\rho_{K_\mathfrak{p}}}{\to} C_{K_\mathfrak{p}}\,(\to C_K)$, $K_3^M(K_\mathfrak{m}) \overset{\rho_{K_\mathfrak{m}}}{\to} C_{K_\mathfrak{m}}\,(\to C_K)$ を経由して C_K 入る, ここで $C_{K_\mathfrak{p}}$, $C_{K_\mathfrak{m}}$ 等は各体 $K_\mathfrak{p}$, $K_\mathfrak{m}$ のイデール類群 (定義は [Ma], [Sa] 及び上記斎藤氏の定理参照)).

4. 主定理の証明

先ず, 主定理を再記する.

<u>主定理</u> (3 次元完備局所環の類体論): p を奇素数とし, $A = \mathbb{F}_q[[X,Y,Z]]$ (ここで $q = p^m$), K を A の商体とする. ここで K に対し Milnor-Kato 予想が成立するとする. 上記イデール類群 C_K に対し,

$$\rho_K^* : H^1_{\mathrm{Gal}}(K, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \overset{\sim}{\to} \mathrm{Hom}_c(C_K, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$

なる標準同型が存在する. ただし, $\mathrm{Hom}_c(C_K, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ は位数有限の C_K からの連続準同形全体のなす群を意味し, $H^1_{\mathrm{Gal}}(K, *)$ は K の Galois コホモロジーとする.

さて, 今から主定理を証明する. その為には先ず, 次の pairing が reciprocity map を造ることを説明する.

<u>**Reciprocity Pairing**</u> : 先ず次の Galois コホモロジー $H^1_{\mathrm{Gal}}(K, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ とイデール類群 C_K との 標準的 pairing (,) が存在する.

$$H^1_{\mathrm{Gal}}(K, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \times C_K \overset{(\ ,\ )}{\longrightarrow} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \ \cdots\ (*) \tag{4.1}$$

そして, この pairing (,) は $H^1_{\mathrm{Gal}}(K, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ の元 χ と C_K の元 $(a_{\mathfrak{m},\mathfrak{p}_\mathfrak{m}})_{\mathfrak{m},\mathfrak{p}_\mathfrak{m}}$ (ただし, ここでは上の Remark 11 で述べた イデール類群の explicit 表示 (◊) を用いた) に対して,

$$(\chi, (a_{\mathfrak{m},\mathfrak{p}_\mathfrak{m}})_{\mathfrak{m},\mathfrak{p}_\mathfrak{m}}) \mapsto \Sigma_{\mathfrak{m},\mathfrak{p}_\mathfrak{m}} (\chi_{\mathfrak{m},\mathfrak{p}_\mathfrak{m}}, a_{\mathfrak{m},\mathfrak{p}_\mathfrak{m}})_{\mathfrak{m},\mathfrak{p}_\mathfrak{m}} \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \tag{4.2}$$

として定義される.

ただし, $\chi_{\mathfrak{m},\mathfrak{p}_\mathfrak{m}}$ は Restriction $H^1_{\mathrm{Gal}}(K, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \to H^1_{\mathrm{Gal}}(K_{\mathfrak{m},\mathfrak{p}_\mathfrak{m}}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ による χ の $H^1_{\mathrm{Gal}}(K_{\mathfrak{m},\mathfrak{p}_\mathfrak{m}}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ の中での像を表し, 更に, pairing $(\ ,\ )_{\mathfrak{m},\mathfrak{p}_\mathfrak{m}}$ は

加藤-Parshin によって定義された3次元局所体 $K_{\mathfrak{m},\mathfrak{p}_\mathfrak{m}}$ に対する reciprocity pairing

$$H^1_{\mathrm{Gal}}(K_{\mathfrak{m},\mathfrak{p}_\mathfrak{m}}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \times K^M_3(K_{\mathfrak{m},\mathfrak{p}_\mathfrak{m}}) \overset{(\ ,\ )_{\mathfrak{m},\mathfrak{p}_\mathfrak{m}}}{\longrightarrow} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \tag{4.3}$$

とする．そして，実際にこの piaring (,) が C_K を経由する事は各体 $K_\mathfrak{p}$, $K_\mathfrak{m}$ の reciprocity law を用いる事により示される．

さて，(4.1) の reciprocity pairing (∗) は自然に次の準同形 ρ^*_K を誘導する．

$$\rho^*_K\colon H^1_{\mathrm{Gal}}(K, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \to \mathrm{Hom}(C_K, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}). \tag{4.4}$$

勿論この 写像 ρ^*_K の dual を考える事により，相互律写像

$$\rho_K\colon C_K \to \mathrm{Gal}(K^{ab}/K) \tag{4.5}$$

を得るのであるが（ここで $H^1_{\mathrm{Gal}}(K, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \cong \mathrm{Hom}_c(\mathrm{Gal}(K^{ab}/K), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ である事を使った)，我々は引き続き写像 ρ^*_K を分析 (analyze) する．

目標は ρ^*_K の同型であるが，これは全ての 2 以上の自然数 n に対して，modulo n での同型 ρ^*_K/n を言えば良い．先ず，標数 p と素な自然数 n に対しては (俗に l-part と呼ばれる)，比較的簡単にこの同型が示せるので省略し (本当はこの l-part の証明に Milnor-Kato conjecture を使い，又実際は斎藤秀司による正則でない 2次元完備正規局所環 (剰余体有限) の Hasse 原理等，相当に深い定理を使うのであるが，比較的簡単と言ったのはこれらの予想，定理 を modulo して，という意味である)，p-part つまり p^m を法とした同型の証明のみ扱うことにする．そしてこの p-part も結局は mod p での同型のみを言えば充分であることが簡単な (こっちは本当に簡単!) induction ででる．

よって，我々の目標は次の同型の証明である．即ち，

$$\rho^*_K\colon H^1_{\mathrm{Gal}}(K, \mathbb{Z}/p) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_c(C_K, \mathbb{Z}/p) \cdots (\blacklozenge). \tag{4.6}$$

ここで，本当はつまりアプリオリには ρ^*_K の像は唯の代数的な写像の集合 $\mathrm{Hom}(C_K, \mathbb{Z}/p)$ にしか行かないのだが，($\blacklozenge$) の言わんとする所の事はこの ρ^*_Kの像が実はイデール類群から $\mathbb{Z}/p$への連続準同形 $\mathrm{Hom}_c(C_K, \mathbb{Z}/p)$ 全体に一致するということなのである．さて，次の可換図式が決定的な鍵を握る．

<u>定理 (**The key diagram**)</u>：次の可換図式が存在する.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathbb{Z}/p \arrow[r] \arrow[d, equal] & H^1_{\mathrm{Gal}}(K,\mathbb{Z}/p) \arrow[r] \arrow[d, "\rho_{K^*}/p"] & \bigoplus_{\mathfrak{p}} H^2_{\mathfrak{p}}(K_{\mathfrak{p}},\mathbb{Z}/p) \arrow[r] \arrow[d, "\bigoplus \rho^*_{K_{\mathfrak{p}}}"] & \bigoplus_{\mathfrak{m}} K_3(A_{\mathfrak{m}})^*/p \arrow[d, equal] \\
0 \arrow[r] & \mathbb{Z}/p \arrow[r] & \mathrm{Hom}_c(C_K/p,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \arrow[r] & \bigoplus_{\mathfrak{p}} \mathrm{Hom}_c(U^0C_{K_{\mathfrak{p}}}/p,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \arrow[r] & \bigoplus_{\mathfrak{m}} K_3(A_{\mathfrak{m}})^*/p.
\end{tikzcd} \tag{4.7}$$

ここで, 上の行は完全であり, 下の行は $\mathbb{Z}/p$, $\mathrm{Hom}_c(C_K/p,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ で完全である. 更に縦の写像 $(\bigoplus \rho^*_{K_{\mathfrak{p}}})$ は同型であり,

$$U^0C_{K_{\mathfrak{p}}} := \varprojlim_{i\geq 0}\left(\prod\nolimits'_{\mathfrak{q}\in P^1_{\widetilde{A/u_{\mathfrak{p}}}}} \left(U^0K_3^M(K_{\mathfrak{p},\mathfrak{q}})/U^iK_3^M(K_{\mathfrak{p},\mathfrak{q}})\right)\right)/K_3^M(K_{\mathfrak{p}}) \tag{4.8}$$

は体 $K_{\mathfrak{p}}$ のイデール類群 $C_{K_{\mathfrak{p}}}$ の部分群で (ただし, $P^1_{\widetilde{A/u_{\mathfrak{p}}}}$ は完備局所環 $A/u_{\mathfrak{p}}$ の正規化 $\widetilde{A/u_{\mathfrak{p}}}$ の高さ 1の素点全体の集合, $K_{\mathfrak{p},\mathfrak{q}}$は $K_{\mathfrak{p}}$を含む完備離散附値体で剰余体が $\widetilde{A/u_{\mathfrak{p}}}$ の高さ1の素イデアル $\mathfrak{q}$での完備化の商体になるようなものとする), $K_{\mathfrak{p}}$ の最大不分岐アーベル拡大に対応するものとする.

先ず, 上の 定理 (The key diagram) を仮定して主定理を証明する.

<u>主定理の証明</u>　我々は (4.6) の写像 (♦) の同型さえ証明すれば良い. 所が上の The key diagram (4.7) で縦の写像 $(\bigoplus \rho^*_{K_{\mathfrak{p}}})$ は同型である事に注意して, diagram chase で結局写像 ρ_{K^*}/p の同型が直に出る. そして, この同型が (♦) の同型に他ならない.　証明終.

<u>定理 (**The key diagram**) の解説</u>, 我々の残りの義務は上記定理 (The key diagram) の証明であるが, 厳密な記述は長くなるだけなので簡潔に解説するに止める. 先ず, 上の完全列を説明する.

以下 $X = \mathrm{Spec}\,A\setminus(X,Y,Z)$ (ただし (X,Y,Z) は A の極大イデアル) とし, $H^i_{\text{ét}}(*) := H^i_{\text{ét}}(*,\mathbb{Z}/p)$ とする.

$\cup\,\mathfrak{m}_i$ で有限個の閉点からなる X の余次元2 の閉部分スキーム, $\overline{\mathfrak{p}_j}$ で高さ 1の素点 $\mathfrak{p}_j$ で定義される X の余次元1 の閉部分スキームを表すとし, 組 $(X\setminus(\cup\mathfrak{m}_i), \cup\overline{\mathfrak{p}_j}\setminus(\cup\mathfrak{m}_i))$ から得られる次の エタール・コホモロジーの localization sequence を考える.

$$\bigoplus_{j=1\ldots m} H^1_{\overline{\mathfrak{p}_j}\setminus(\cup\mathfrak{m}_i)}(X\setminus(\cup\mathfrak{m}_i)) \to H^1_{\text{ét}}(X\setminus(\cup\mathfrak{m}_i)) \to H^1_{\text{ét}}(X\setminus(\cup\mathfrak{m}_i\oplus\cup\overline{\mathfrak{p}_j})) \to$$
$$\bigoplus_{j=1\ldots m} H^2_{\overline{\mathfrak{p}_j}\setminus(\cup\mathfrak{m}_i)}(X\setminus(\cup\mathfrak{m}_i)) \to H^2_{\text{ét}}(X\setminus(\cup\mathfrak{m}_i)) \to H^2_{\text{ét}}(X\setminus(\cup\mathfrak{m}_i\oplus\cup\overline{\mathfrak{p}_j})) \to$$
$$\to \cdots. \tag{4.9}$$

ここで, 我々は$\cup\mathfrak{m}_i \to P^2_A$, $\cup\mathfrak{p}_j \to P^1_A$ なる極限を取る. つまり, 有限集合$\cup\mathfrak{m}_i$ を徐々に増やしてP^2_A に近ずけ, 同じく高さ 1の素点 $\mathfrak{p}_j$ の有限集合$\cup\mathfrak{p}_j$ も徐々に増やしてP^1_A に近ずける. そしてその極限を考える. するとこの場合, $X\setminus(\cup\mathfrak{m}_i\oplus\cup\overline{\mathfrak{p}_j})$ は X から全ての高さ 2の閉点と高さ 1の素点を抜くことを意味し, これは極限に於いて結局 X の generic point つまり X の関数体になる. そしてこの X の関数体がまさにK となって重要な同型 $H^1_{\text{ét}}(X\setminus(\cup\mathfrak{m}_i\oplus\cup\overline{\mathfrak{p}_j}), \mathbb{Z}/p) \tilde{\to} H^1_{\text{ét}}(K, \mathbb{Z}/p)$ を得る. 又, 容易に同型 $H^2_{\overline{\mathfrak{p}_j}\setminus(\cup\mathfrak{m}_i)}(X\setminus(\cup\mathfrak{m}_i), \mathbb{Z}/p) \tilde{\to} H^2_{\mathfrak{p}_j}(A_{\mathfrak{p}_j}, \mathbb{Z}p)$ (Limit $\cup\mathfrak{m}_i \to P^2_A$) も分る. そして$H^1_{\text{ét}}(X\setminus(\cup\mathfrak{m}_i))$ や $H^2_{\text{ét}}(X\setminus(\cup\mathfrak{m}_i))$ (Limit $\cup\,\mathfrak{m}_i \to P^2_A$) を計算するのに, 次の エタール localization sequence を利用するのである. 即ち

$$\bigoplus_{i=1\ldots n} H^1_{\mathfrak{m}_i}(X_{\text{ét}}, \mathbb{Z}/p) \to H^1_{\text{ét}}(X, \mathbb{Z}/p) \to H^1_{\text{ét}}(X\setminus\cup_{i=1\ldots n}\mathfrak{m}_i, \mathbb{Z}/p) \to$$
$$\bigoplus_{i=1\ldots n} H^2_{\mathfrak{m}_i}(X_{\text{ét}}, \mathbb{Z}/p) \to H^2_{\text{ét}}(X, \mathbb{Z}/p) \to H^2_{\text{ét}}(X\setminus\cup_{i=1\ldots n}\mathfrak{m}_i, \mathbb{Z}/p) \to$$
$$\bigoplus_{i=1\ldots n} H^3_{\mathfrak{m}_i}(X_{\text{ét}}, \mathbb{Z}/p) \to H^3_{\text{ét}}(X, \mathbb{Z}/p) \to H^3_{\text{ét}}(X\setminus\cup_{i=1\ldots n}\mathfrak{m}_i, \mathbb{Z}/p) \to \cdots. \tag{4.10}$$

この完全系列より直に $H^1_{et}(X\setminus(\cup\mathfrak{m}), \mathbb{Z}/p) \tilde{\to} \mathbb{Z}/p$ (Limit $\cup\mathfrak{m}_i \to P^2_A$) が分かり, 更に Limit $\cup\mathfrak{m}_i \to P^2_A$ に於いて, Grothendieck Dualty ([H]) も併用する事により次の同型を得る.

$$H^2_{\text{ét}}(X\setminus(\cup\,\mathfrak{m}_i), \mathbb{Z}/p) \cong (K^M_3(A_{\mathfrak{m}})/p)^* \quad (\text{Limit} \cup\mathfrak{m}_i \to P^2_A)$$

も分る. ただし, $(K^M_3(A_{\mathfrak{m}})/p)^*:\ = \mathrm{Hom}_c(K^M_3(A_{\mathfrak{m}}), \mathbb{Z}/p)$ とする. そして, (4.9) にこれらの結果を代入して, 結局我々の diagram (4.7) の上の行を得る (勿論これで完全性の証明が出来ている).

さて, 次に下の行の完全性であるが, こちらは $\mathrm{Hom}_c(*, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ を取る前の次の完全列の証明に帰着される. 即ち,

定理：次の完全列が存在する.

$$\prod_{\mathfrak{p}\in P_A^1} (U^0 C_{K_\mathfrak{p}}/p) \to C_K/p \to \mathbb{Z}/p \to 0. \tag{4.11}$$

ここで各 $U^0 C_{K_\mathfrak{p}}$ は (4.8) で述べた群であるとする.

証明(sketch)　まず同型 $K_3^M(K_{\mathfrak{m},\mathfrak{p}_\mathfrak{m}})/U^0K_3^M(K_{\mathfrak{m},\mathfrak{p}_\mathfrak{m}}) \cong K_2^M(\kappa(\mathfrak{p}_\mathfrak{m}))$ が成立する (cf. [Ka1]). 更に 各 $U^0K_3^M(K_{\mathfrak{p},\mathfrak{q}})$ に対して唯1つ $U^0K_3^M(K_{\mathfrak{m},\mathfrak{p}_\mathfrak{m}})$ が対応し, 同型 $U^0K_3^M(K_{\mathfrak{p},\mathfrak{q}}) \cong U^0K_3^M(K_{\mathfrak{m},\mathfrak{p}_\mathfrak{m}})$ が存在する. よって直ぐ上で述べた同型を使うと結局 (4.11) で,

$$\mathrm{Coker}\,(\prod_{\mathfrak{p}\in P_A^1} (U^0C_{K_\mathfrak{p}}/p) \to C_K/p)$$

$$\cong \mathrm{Coker}\left(\bigoplus\nolimits_\mathfrak{p} K_3^M(K_\mathfrak{p})/p \to \bigoplus_\mathfrak{m}\left((\bigoplus_{\mathfrak{p}_\mathfrak{m}} K_2^M(\kappa(\mathfrak{p}_\mathfrak{m})))/K_3^M(K_\mathfrak{m})\right)/p\right)$$

となることが分かる. 更に $\bigoplus_\mathfrak{m}$ の各要素に対して同型

$$(\bigoplus_{\mathfrak{p}_\mathfrak{m}\in P_\mathfrak{m}^1} K_2^M(\kappa(\mathfrak{p}_\mathfrak{m})))/K_3^M(K_\mathfrak{m}) \cong K_1^M(\kappa(\mathfrak{m}))$$

があり, 結局全ては

$$\mathrm{Coker}\left(\bigoplus\nolimits_{\mathfrak{p}\in P_A^1} K_3^M(K_\mathfrak{p})/p \to \bigoplus_{\mathfrak{m}\in P_A^2} K_1^M(\kappa(\mathfrak{m}))/p\right)$$

の計算に帰着される. そしてこの群は更に次の群と同型になることが分る. 即ち

$$\mathrm{Coker}\left(\bigoplus\nolimits_{\mathfrak{p}\in P_A^1} K_3^M(K_\mathfrak{p})/p \to \bigoplus_{\mathfrak{m}\in P_A^2} K_1^M(\kappa(\mathfrak{m}))/p\right)$$
$$\cong \mathrm{Coker}\left(\bigoplus\nolimits_{\mathfrak{p}\in P_A^1} K_2^M(\kappa(\mathfrak{p}))/p \to \bigoplus_{\mathfrak{m}\in P_A^2} K_1^M(\kappa(\mathfrak{m}))/p\right). \tag{4.12}$$

ここで Gersten-Quillen の定理は, 環 A に対し完全列

$$\bigoplus\nolimits_{\mathfrak{p}\in P_A^1} K_2^M(\kappa(\mathfrak{p})) \to \bigoplus_{\mathfrak{m}\in P_A^2} K_1^M(\kappa(\mathfrak{m})) \to \mathbb{Z}.$$

が存在する事を主張し (cf. [Q]), この完全列に $\bigotimes \mathbb{Z}/p$ することにより, 結局 (4.12) は $\mathbb{Z}/p$ と同型になる事が分るのである. これで下の行の完全性の証明が終る. $\rho^*_{K_p}$ の同型の証明は大変なので省略し, [Ma](I) に詳細をゆずることにする.

以上で主定理の証明 (の解説) が終った.

<u>**系の解説**</u> 系は今証明された主定理を体 K, L に各々適用する事により得られる. つまり完全列 $C_L \overset{\text{Norm}}{\to} C_K \to C_K/N_{L/K}(C_L) \to 0$ (の双対) と完全列 $\mathrm{Gal}(L^{ab}/L) \to \mathrm{Gal}(K^{ab}/K) \to \mathrm{Gal}(L/K) \to 0$ の双対を考えると直ぐに出てくる (ただし, ここで C_K に入った位相の定義と [Ka3] から商群 $C_K/N_{L/K}(C_L)$ には discrete な位相が入ることに注意する). 詳細を知りたい方は [Ma] (I) を読んで下さい.

Remark 12 : 系の statement で "L の中での A の整閉包が正則" という条件は本質的である. 実際もし正則でないとすると L に対して主定理が適用されない. それどころか 2 次元完備局所環 $\mathbb{F}_p[[X, Y]]$ に対してその商体を N とすると, 或る有限次アーベル拡大 M/N であって, これらの体 M, N に対して斎藤氏の定義したイデール類群を C_M, C_N とすると M 内での $\mathbb{F}_p[[X, Y]]$ の整閉包が正則でないようなもので $[C_N : N_{M/N}(C_M)] > |\mathrm{Gal}(M/N)|$ となる例が存在する! この様な例は志甫氏によって初めて与えられた. この例及びその他の結果を論文 [Ma-Sh] で紹介する予定である.

Remark 13 : よく加藤先生が仰ることであるが, 与えられた代数多様体の類体論とその代数多様体の特異点とは深く関係している. この哲学は実際斎藤秀司先生による正則でない 2 次元完備局所環の類体論で実証済みである (そこでは特異点が引き起こす特有の現象が詳細に記述されている cf. [Sa]). そして実際 Swan conductor に対しても同様の現象を記述したのが [Ka6] である. 複素数体上の代数多様体の分類論の深い定理がどれだけ類体論と結びつけられるのだろうか? 今後, 川又, 森両氏等による最近の目覚ましい代数幾何の進歩と高次元類体論の融合を促進したい.

Remark 14 : 未だ check はしていないが, 上記証明はほぼ間違い無く, 扱っている 3 次元完備正則局所環が混標数の場合にも適用可能と思われる. つまり, $\mathbb{Z}_p[[X, Y]]$ なる混標数 3 次元完備正則局所環に対しても完全に本稿と同じ類体論が成立すると思われる.

Remark 15 : 上記証明は実際には n-変数の場合にも使え, $\mathbb{F}_p[[X_1, \ldots, X_n]]$ の商体に対しても同様の類体論が存在する (cf. [Ma] (II)).

Acknowledgement: 論文完成に甚大な援助を下さった加藤和也先生, 森田康夫先生 及び 学友の志甫 淳, 佐藤周友両氏に深く感謝します. 最後に研究集会で発表する機会を下さった伊原康隆先生に感謝します.

REFERENCES

[B] S. BLOCH, *Algebraic K-theory and class field theory for arithmetic surfaces*, Ann. of Math. 114 (1981), 229-265.

[H] R. HARTSHORNE, *Residue and Duality*, Lecture Notes in Mathematics, No 20 Springer-Verlag, Berlin-New York 1966.

[Ka1] K. KATO, *Generalized local class field theory by using Milnor K- groups I, II, III*, J. Fac. Sci. Univ, Tokyo 26 (1979), 303-376; 27 (1980), 603-683; 29 (1982), 31-43.

[Ka2] ———, *Residue homomorphism in Milnor K-Theory*, Galois Groups and Their Representations, Adv. Stud. Pure Math., vol. 2, Kinokuniya-North Holland, Amsterdam, 1983, 153-172.

[Ka3] ———, *Class field theory and algebraic K-theory*, Lecture Notes in Mathematics, vol 1016. Springer, Berlin Heidelberg New York, pp. 109 -127.

[Ka4] ———, *Galois cohomology of complete discrete valued fields* Algebraic K-Theory, Oberwolfach 1980, Lecture Notes in Math., vol 967, Springer-Verlag, Berlin and New York, 1983, 109-126.

[Ka6] ———, *Swan conductors for characters of degree one in the imperfect residue field case*, Contemp. Math. 83 (1989) 101-132.

[Ka7] ———, *Generalized class field theory*, Proceedings of the International Congress of Mathematics, Kyoto, 1990, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1991,pp. 419-428.

[Ka8] ———, *A generalization of class field theory*, Sugaku 40 (1998), 289-311,(to appear in AMS translation of Sugaku).

[K-S1] K. KATO AND S. SAITO, *Unramified class field theory of arithmetic surfaces*, Ann. Math. 118 (1983) 241-275.

[K-S2] ———, *Two-dimensional class field theory,* Galois Groups and their Representations, Adv. Stud. Pure Math., vol. 2 Kinokuniya-North Holland, Amsterdam, 1983, 103-152.

[K-S3] ———, *Global class field theory for arithmetic schemes*, Contemp. Math. 5 Part I (1986) 255-330.

[Kaw] Y. KAWAMATA, *Crepant blowing-up of 3-dimensional canonical singularities and its application to degenerations of surfaces*, Ann. Math. 127 (1988), 93-163.

[Ko] Y. KOYA, *A generalization of class formation by using hypercohomology*, Invent. Math. 101 (1990), 705-715.

[Ma] K. MATSUMI, *Class field Theory for higher dimensional complete regular local rings of positive characteristic (I), (II), preprint.*

[Ma-Sh] K. MATSUMI & A. SHIHO, *A remark on class field theory for two-dimensional local rings*, preprint.

[Mi] J. MILNOR, *Algebraic K-theory and quadratic forms*, Invent. Math. 9 (1970), 318-344.

[Na] M. NAGATA, *Local rings*, Interscience Publ., vol. 13, Wiley, New York, 1962.

[Pa] A. N. PARSHIN, *Local class field theory*, Trudy Mat. Inst. Akad. Nauk SSSR 165 (1985), 143-170; English transl. in Proc. Steklov. Inst. Math. (1991).

[Q] D. QUILLEN, *Higher algerbraic K-theory. I*, Algebraic K-Theory. I:Higher K-Theries (H, Bass, ed.), Lecture Notes in Math., vol. 341, Springer-Verlag, Berline and New York, 1973.

[R] K. RIBET, On modular representations of Gal($\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}$) arising from modular forms, Invent. Math. 100, 431-476, (1990).

[Sa] S. SAITO, *Class field theory for two-dimensional local rings*, Galois Groups and Their Representations, Kyoto 1985/Tokyo 1986, Adv. Stud. Pure Math., vol. 12, Kinokuniya-North Holland, Amsterdam, 1987, 343-373.

[Ta] T. TAKAGI, 代数的整数論, 岩波書店 第 2 版 1971 (in Japanese).

[W] A. WILES, *Modular elliptic curves and Fermat's Last Theorem*, Annals of Mathematics vol. 144.