数理解析研究所講究録
1097 巻 1999 年 50-68

多重ゼータ値入門

九州大学　数理学研究科　金子昌信

0. はじめに

Euler が級数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^k}$ について、現代のゼータ関数の理論すべてに通じるとも言える根本的な研究をしたことはよく知られるところです。多重ゼータ値というのはこの級数のある多重和版であって、二重和の場合にやはり Euler が既に研究をしています。こちらはこれまで数学の主流の中に登場することはなかった (不勉強の認識不足だったら済みません) ようですが、近年、(長年の眠りから醒めて?) 量子群や結び目不変量、あるいは数理物理とか、多方面に現れ活発な研究がされるようになっています。中でも私が惹かれているのは、Riemann ゼータの場合もそうですが、定義を見れば簡単な和で表されるひとつの実数、たったこれだけ(?)のものが、$\mathbf{P}^1\setminus\{0,1,\infty\}$ の基本群における Galois 表現の "Hodge counterpart" として、数論の深遠な真理と密接なかかわりを持っているらしい点です。

数研での講演では、最初の定義からはじめていくつか基本的な事柄を紹介し、最先端との関係については Drinfel'd の理論のほんのさわりだけを急いで述べたに留まりました。それは時間の制限ということもありましたが、何より私の理解がまだ不十分なことによります。それでこの原稿も、もっと進んだ話を期待される方には物足りないでしょうが、これから勉強してみようという方々への「入門」としての役割が果たせればそれでよしとしたいと思います。

1. 定義と問題、予想

「多重ゼータ値」(multiple zeta values) $\zeta(k_1,k_2,\ldots,k_n)$ を次で定義します。(Euler/Zagier sums とか multiple harmonic series とか呼ばれることもあります。厄介なのは k_i の順序が逆に書かれることもあることで、これは注意が必要です。ここでは Don Zagier 氏の用法に従います。それは単に、筆者が始めに多重ゼータ値に出会ったのが彼の講義だったからです。)

$$\zeta(k_1,k_2,\ldots,k_n)=\sum_{0<m_1<m_2<\cdots<m_n}\frac{1}{m_1^{k_1}m_2^{k_2}\cdots m_n^{k_n}}.$$

ここに m_i,k_i は正整数で $k_n\geq 2$ とします。これは収束のためで、すなわち右辺を m_n に関する和として Dirichlet 級数の形

$$\sum_{m_n=n}^{\infty}\frac{A(k_1,k_2,\ldots,k_{n-1};m_n)}{m_n^{k_n}},$$

ここに

$$A(k_1,k_2,\ldots,k_{n-1};m_n)=\sum_{0<m_1<m_2<\cdots<m_{n-1}<m_n}\frac{1}{m_1^{k_1}m_2^{k_2}\cdots m_{n-1}^{k_{n-1}}},$$

と書いてみれば $A(k_1,k_2,\ldots,k_{n-1};m_n)$ は $(\log m_n)^{n-1}$ の order で押えられるので、$k_n>1$ が収束条件であることがわかります。勿論 k_i を整数に限らずともよい訳ですが、ここでは整数の時の多重ゼータ「値」のみを考えます。(k_i を変数と見ての研究は [AK], [AET] などを参照。)

多重ゼータ値 $\zeta(k_1,k_2,\ldots,k_n)$ について、和 $k:=k_1+k_2+\cdots+k_n$ を weight、k_i の個数 n をこのゼータ値の depth と呼びます。

Example. weight 1 の多重ゼータ値は (条件 $k_n>1$ より) ありません。weight 2 は $\zeta(2)$ が一つだけ。weight 3 は $\zeta(3)$ と $\zeta(1,2)$ の二つ。$\zeta(3)$ は depth 1、$\zeta(1,2)$ は depth 2 です。weight 4 のものは $\zeta(4),\zeta(1,3),\zeta(2,2),\zeta(1,1,2)$ と、四つあります。

一般に、weight が k の多重ゼータ値は 2^{k-2} 個あります。ただしそれは、index の集合が 2^{k-2} 通りということで、実際の値は、例えば weight 3 では $\zeta(3)=\zeta(1,2)$ (Euler [E]) というように、全て異なるわけではありません。その辺のことについては追追述べていきます。

depth が 1 の多重ゼータ値とは Riemann ゼータ函数の特殊値に他ならず、Euler は $\zeta(2k)$ を Bernoulli 数と円周率 π で具体的に書いたのでした。多重ゼータ値の場合も特別な場合は π の冪の有理数倍という形に値が求まることもありますが、(現段階での) 主眼はむしろ、それぞれの値の性格よりも index の異なる多重ゼータ値の間の関係式を理解しよう、ということにあります。ここでその問題意識を定式化し、予想されていることもあわせて述べておくとします。

Definition. 各 $k\geq 0$ に対し、$\mathbf{Q}$ 上のベクトル空間 $\mathcal{Z}_k$ を $\mathcal{Z}_0=\mathbf{Q}$, $\mathcal{Z}_1=\{0\}$,

$$\mathcal{Z}_k:=\sum_{\substack{1\leq n\leq k-1\\ k_1+\cdots+k_n=k}}\mathbf{Q}\zeta(k_1,k_2,\ldots,k_n)\quad(k\geq 2)$$

で定義し、さらに $\mathcal{Z}:=\sum_{k\geq 0}\mathcal{Z}_k$ とおく。

各 $\mathcal{Z}_k$ は weight が k である多重ゼータ値 (有限個) で張られる有限次元 $\mathbf{Q}$ ベクトル空間です。$\mathcal{Z}$ は無限次元であることが、Euler の結果 ($\pi^{2k}\in\mathcal{Z}_{2k}$) と Lindemann による π の超越性からわかります。(π^2, π^4, $\pi^6,\ldots$ が $\mathbf{Q}$ 上一次独立。)

予想 1. $\mathcal{Z}:=\bigoplus_{k\geq 0}\mathcal{Z}_k$ (ベクトル空間の直和) であろう。

問題 1. 各 $\mathcal{Z}_k$ の次元 $d_k:=\dim_{\mathbf{Q}}\mathcal{Z}_k$ を求めよ。

さて、$\mathcal{Z}$ は、後述のように、単なるベクトル空間であるだけでなく、$\mathbf{Q}$-algebra になることが示されます。そこで問題として、

問題 2. $\mathcal{Z}$ の $\mathbf{Q}$-algebra としての構造は何か。

問題 1、2 について、次の予想 (いわば、多重ゼータ値の理論における Main Conjecture) があります。

予想 2. $\mathcal{Z}$ は (無限生成の) free associative (commutative) algebra であって、weight k の (algebra) generator の個数 M_k 及び $\mathcal{Z}_k$ の $\mathbf{Q}$ 線形空間としての次元 d_k は次の

母関数表示で与えられる:

$$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(1-t^k)^{M_k}} = \sum_{k=0}^{\infty} d_k t^k = \frac{1}{1-t^2-t^3}.$$

すなわち M_k は

$$M_k = \frac{1}{k} \sum_{d|k} \mu\left(\frac{k}{d}\right) P_d,$$

ここに P_d は Perrin number と呼ばれ、$P_1 = 0, P_2 = 2, P_3 = 3, P_d = P_{d-2} + P_{d-3}$ $(d \geq 4)$ で定まる数で、μ は Möbius 関数、そして d_k は

$$d_0 = 1,\ d_1 = 0,\ d_2 = 1,\ d_k = d_{k-2} + d_{k-3}\ (k \geq 3)$$

で与えられる。(M_k は予想式の対数微分をとって Möbius 反転公式を使い、 d_k は予想式に $1-t^2-t^3$ を掛けて係数を較べる。)

注 1. 予想 1 から、すべての $\alpha \in \mathcal{Z} \setminus \mathbf{Q}$ が超越数であることが従います。それは、あとで見るように $\mathcal{Z}_{k_1}\mathcal{Z}_{k_2} \subseteq \mathcal{Z}_{k_1+k_2}$ なので、$1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \ldots$ の各最高 weight の成分を考えると、決してこれらは $\mathbf{Q}$ 上従属にはならないからです。

注 2. $\zeta(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ の代わりにそれを $(2\pi i)^{weight}$ で割ったものを考え $\mathcal{Z}$ にあたるものを定義し、その構造について同様の予想をたてることができます。(予想 2 で $M_2 = 0$ となり最右辺が $1-t^2$ 倍される。)「周期」という観点からはむしろその方が自然です。π の冪を消してしまいますから、現段階では $\mathcal{Z}$ にあたるものが無限次元かも分からなくなります。また、$\mathbf{Q}$ 上ではなく $\mathbf{Z}$ 上ですべてを考えてもよいはずで、そのときの構造なり、係数を mod p すると? など、まだ手付かずのようです。

注 3. ここでは省略してしまいますが、algebra generator の個数についてはより精密に、各 weight, depth にいくつの生成元がとれるだろうという予想もあります ([Br2], [De2])。

注 4. 予想の根拠ですが、バックグラウンドだけ述べますと、この話は $\mathbf{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$ の基本群への Galois 作用の話の Hodge 版であるはずであり、両者を統一的に見る視点がある、という Motif の考え方 (Deligne [De1])、および (無関係ではないのですが) Drinfel'd の quasi-triangular quasi-Hopf algebra の理論 ([Dr]) に出てくる Drinfel'd associator, それへの Grothendieck-Teichmüller 群 (のあるバージョン) の作用についての Drinfel'd のある定理ならびに予想といったところでしょうか。後者についてはあとの節で少し解説を試みます。予想は数値的には weight が 16 くらいまでは確かめられているようです。

注 5. A. Goncharov のあるプレプリント ([G2]) には "Having the theory of mixed Tate motives over $\mathbf{Z}$ one can prove that dim $\mathcal{Z}_k$ is not bigger than expected." と書いてあります (!!)。その後のプレプリントを見ると、少なくとも depth が 3 以下の多重ゼータ値で張られる空間については現段階で得られる完全な結果 (つまり $\zeta(2)$ と $\zeta(3)$ が $\mathbf{Q}$ 上独立かといった問題をさておいて) を証明しているようです。そこには $GL_2(\mathbf{Z}), GL_3(\mathbf{Z})$ のコホモロジーとの関係が述べられており、depth 2 の場合は、

Galois の場合の Ihara-Takao の結果 ([M], ある Lie 環の subspace の次元と $SL_2(\mathbf{Z})$ の cusp form の空間の次元の一致) に対応するものとなっています。申し訳ありませんが Goncharov の仕事についてはこれ以上の詳細を紹介できるほど理解していません。文献だけ挙げるにとどめます。

注 6. M. Hoffman は、$\mathcal{Z}$ は線形空間として index k_i が 2 又は 3 であるような $\zeta(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ で張られるだろうと予想しています。確かに数は合いますが、どれだけ根拠があるのかはよくわかりません。(彼自身も bold conjecture といってます。) ([H3])

M_k, d_k の予想値を表にしておきます。

表 1: M_k, d_k の予想値

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
M_k	—	0	1	1	0	1	0	1	1	1	1	2	2	3	3	4	5	7	8
d_k	1	0	1	1	1	2	2	3	4	5	7	9	12	16	21	28	37	49	65

2. 反復積分表示と duality

どんなゼータ関数でも積分表示が得られると (それが大予想だったりする) 分かることがぐっと増えます。これは多重ゼータ値についても然りですが、この場合の基本的な表示は「反復積分」表示というものです。(一般の多様体上で、微分 1 形式の反復積分を用いることにより、基本群の、アーベル商=ホモロジー群より更に深い商 (ベキ零商) を捉えよう (基本群の de Rham theory) としたのが K. T. Chen の仕事です。)

まず、k 個の $\varepsilon_i \in \{0, 1\}$ の組 $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k)$ で $\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_k = 0$ なるものに対し積分 $I(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k)$ を

$$\begin{aligned} I(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k) &= \int\cdots\int_{0<t_1<\cdots<t_k<1} \frac{dt_k}{A_{\varepsilon_k}(t_k)} \cdots \frac{dt_1}{A_{\varepsilon_1}(t_1)} \\ &= \int_0^1 \frac{dt_k}{A_{\varepsilon_k}(t_k)} \int_0^{t_k} \cdots \int_0^{t_3} \frac{dt_2}{A_{\varepsilon_2}(t_2)} \int_0^{t_2} \frac{dt_1}{A_{\varepsilon_1}(t_1)}, \end{aligned}$$

で定義します。ただし $A_0(t)$ と $A_1(t)$ はそれぞれ t および $1-t$ を表し、下の積分は右から先に行っています。このとき

Theorem (多重ゼータ値の反復積分表示).

$$\begin{aligned} \zeta(k_1, \ldots, k_n) &= I(1, \underbrace{0, \ldots, 0}_{k_1-1}, 1, \underbrace{0, \ldots, 0}_{k_2-1}, \ldots, 1, \underbrace{0, \ldots, 0}_{k_n-1}) \\ &= \underbrace{\int_0^1 \frac{dt}{t} \cdots \int_0^t \frac{dt}{t}}_{k_n-1} \int_0^t \frac{dt}{1-t} \underbrace{\int_0^t \frac{dt}{t} \cdots \int_0^t \frac{dt}{t}}_{k_{n-1}-1} \int_0^t \frac{dt}{1-t} \cdots \\ &\quad \cdots \underbrace{\int_0^t \frac{dt}{t} \cdots \int_0^t \frac{dt}{t}}_{k_2-1} \int_0^t \frac{dt}{1-t} \underbrace{\int_0^t \frac{dt}{t} \cdots \int_0^t \frac{dt}{t}}_{k_1-1} \int_0^t \frac{dt}{1-t} \end{aligned}$$

proof. 単純に $\dfrac{1}{1-t}$ を冪級数に展開して項別積分を繰り返していっても出来ますが、あとのこともあって、ここで多重対数級数 $Li_{k_1,\cdots,k_n}(z)$ (multiple polylogarithm と呼ぶ?) を導入し、その反復積分表示を与えることで証明することにします。

Definition. 自然数 $n \geq 1$, $k_i \geq 1$ に対し、

$$Li_{k_1,\cdots,k_n}(z) := \sum_{0<m_1<\cdots<m_n} \frac{z^{m_n}}{m_1^{k_1}\cdots m_n^{k_n}}.$$

これは少なくとも $|z|<1$ で解析的な関数を定めます。$k_n \geq 2$ ならば $z=1$ でも収束し、多重ゼータ値 $\zeta(k_1,\cdots,k_n)$ はこの関数の $z=1$ での値に他なりません。この関数について、次が成り立ちます。

Lemma.

$$\frac{d}{dz}Li_{k_1,k_2,\ldots,k_n}(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{z}Li_{k_1,k_2,\ldots,k_{n-1},k_n-1}(z), & \text{if } k_n > 1 \\ \dfrac{1}{1-z}Li_{k_1,k_2,\ldots,k_{n-1}}(z), & \text{if } k_n = 1. \end{cases}$$

proof. $k_n > 1$ の場合は項別に微分するだけです。$k_n = 1$ の場合は、項別に微分して、和の中の m_n の部分を $\displaystyle\sum_{m_n=m_{n-1}+1}^{\infty} z^{m_n-1} = \frac{z^{m_{n-1}}}{1-z}$ と計算するとわかります。∎

$Li_1(z) = \displaystyle\int_0^z \frac{dt}{1-t}$ から出発して、この Lemma を積分したものを繰り返し使うと直ちに次が得られます。($Li_{k_1,k_2,\ldots,k_n}(0)=0$ に注意。)

Proposition.

$$\begin{aligned} Li_{k_1,k_2,\ldots,k_n}(z) &= \underbrace{\int_0^z \frac{dt}{t}\cdots\int_0^t \frac{dt}{t}}_{k_n-1}\int_0^t \frac{dt}{1-t}\underbrace{\int_0^t \frac{dt}{t}\cdots\int_0^t \frac{dt}{t}}_{k_{n-1}-1}\int_0^t \frac{dt}{1-t}\cdots \\ &\quad \cdots\underbrace{\int_0^t \frac{dt}{t}\cdots\int_0^t \frac{dt}{t}}_{k_2-1}\int_0^t \frac{dt}{1-t}\underbrace{\int_0^t \frac{dt}{t}\cdots\int_0^t \frac{dt}{t}}_{k_1-1}\int_0^t \frac{dt}{1-t}. \end{aligned}$$

$k_n > 1$ の場合にこの式で $z=1$ とおいて得られるのが定理1、すなわち多重ゼータ値の反復積分表示です。この表示から、多重ゼータ値の weight とは積分 $\displaystyle\int \frac{dt}{*}$ の回数で、そのうちの $\displaystyle\int \frac{dt}{1-t}$ の個数が depth だということがわかります。はじめの $\dfrac{dt}{A_{\varepsilon_1}(t)} = \dfrac{dt}{1-t}$ と最後の $\dfrac{dt}{A_{\varepsilon_k}(t)} = \dfrac{dt}{t}$ は決まっているので、残り $k-2$ 個のうちの $\dfrac{dt}{1-t}$ の個数が depth マイナス 1 だから、weight k で depth n の多重ゼータ値 (の index set) の個数は $\dbinom{k-2}{n-1}$ となります。従って、先に述べた如く、weight k の多

重ゼータ値の個数は 2^{k-2} です。

この反復積分表示を用いて、多重ゼータ値の "duality" を自然に導くことが出来ます。すなわち、まず積分順序を交換して

$$I(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_k)=\int_0^1\frac{dt_1}{A_{\varepsilon_1}(t_1)}\int_{t_1}^1\cdots\int_{t_{k-2}}^1\frac{dt_{k-1}}{A_{\varepsilon_{k-1}}(t_{k-1})}\int_{t_{k-1}}^1\frac{dt_k}{A_{\varepsilon_k}(t_k)}.$$

そこで変数変換 $(t_1,\ldots,t_k)\mapsto(1-t_k,\ldots,1-t_1)$ を行うと直ちに

$$I(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_k)=I(1-\varepsilon_k,\ldots,1-\varepsilon_1)$$

が言えます。これを $\zeta(k_1,\ldots,k_n)$ に翻訳することにより次の Duality Theorem が言えます。

Theorem (Duality). $\mathbf{k}=(k_1,k_2,\ldots,k_n)$ に対し $\zeta(\mathbf{k})$ で $\zeta(k_1,k_2,\ldots,k_n)$ を表すことにする。今 $\mathbf{k}$ が、その成分が 1 とそうでないところを区別して

$$\mathbf{k}=(\underbrace{1,\ldots,1}_{a_1-1},b_1+1,\underbrace{1,\ldots,1}_{a_2-1},b_2+1,\ldots,\underbrace{1,\ldots,1}_{a_s-1},b_s+1)$$

の形に書けているとする。ここで $s\geq 1,\ a_1,b_1,\ldots,a_s,b_s\geq 1$. これに対して

$$\mathbf{k}'=(\underbrace{1,\ldots,1}_{b_s-1},a_s+1,\underbrace{1,\ldots,1}_{b_{s-1}-1},a_{s-1}+1,\ldots,\underbrace{1,\ldots,1}_{b_1-1},a_1+1)$$

と置くと

$$\zeta(\mathbf{k}')=\zeta(\mathbf{k}).$$

$\mathbf{k}$ と $\mathbf{k}'$, $\zeta(\mathbf{k}')$ と $\zeta(\mathbf{k})$ は互いに他方の *dual* であると言います ($(\mathbf{k}')'=\mathbf{k}$ に注意)。weight k, depth n の多重ゼータ値の dual は、weight は同じ k で、depth が $k-n$ となります。

Example. $\zeta(1,2)=\zeta(3)$ (Euler). 一般に $\zeta(\underbrace{1,1,\ldots,1}_{k-2},2)=\zeta(k)$. (Th. の記号で $s=1,\ a_1=b_1=k-1$.) いくつかランダムに並べると $\zeta(1,2,2)=\zeta(2,3)$, $\zeta(2,1,3)=\zeta(1,3,2)$, $\zeta(3,4)=\zeta(1,1,2,1,2)$ など。また、$\zeta(2,2,\ldots,2)$ や $\zeta(1,3,1,3,\ldots,1,3)$ などは "self dual" です。

3. 多重ゼータ値の積

先に少し触れたように $\mathcal{Z}$ は積で閉じています。

Proposition. $\mathcal{Z}$ は積について閉じている。即ち $\mathbf{Q}$ - algebra の構造を持つ。また $\mathcal{Z}_{k_1}\mathcal{Z}_{k_2}\subseteq\mathcal{Z}_{k_1+k_2}$.

proof. 実際には二つの多重ゼータ値の積はいくつかの多重ゼータ値の自然数係数の一次結合で書けます。これを見るのに二通りの方法があります。しかもそれぞれ得られる一次結合の見かけが違うため、そこから多重ゼータ値の間の線形関係が生じます。これについては後節で述べます。

まず、定義の冪級数表示を用いて、二つの積を計算してみます。

$$\begin{aligned}
\zeta(p)\zeta(q) &= \left(\sum_{0<m}\frac{1}{m^p}\right)\left(\sum_{0<n}\frac{1}{n^q}\right)=\sum_{0<m,n}\frac{1}{m^pn^q}\\
&= \left(\sum_{0<m<n}+\sum_{0<m=n}+\sum_{0<n<m}\right)\frac{1}{m^pn^q}\\
&= \zeta(p,q)+\zeta(p+q)+\zeta(q,p),\\
\zeta(p)\zeta(q,r) &= \left(\sum_{0<l}\frac{1}{l^p}\right)\left(\sum_{0<m<n}\frac{1}{m^qn^r}\right)=\sum_{\substack{0<l\\0<m<n}}\frac{1}{l^pm^qn^r}\\
&= \left(\sum_{0<l<m<n}+\sum_{0<l=m<n}+\sum_{0<m<l<n}+\sum_{0<m<l=n}+\sum_{0<m<n<l}\right)\frac{1}{l^pm^qn^r}\\
&= \zeta(p,q,r)+\zeta(p+q,r)+\zeta(q,p,r)+\zeta(q,p+r)+\zeta(q,r,p).
\end{aligned}$$

一般の場合にどのように計算されるかはこれを見て察しがつくことと思いますが、次のようになります。すなわち

$$\zeta(k_1,\cdots,k_n)=\sum_{0<m_1<\cdots<m_n}\frac{1}{m_1^{k_1}\cdots m_n^{k_n}},\quad \zeta(k_1',\cdots,k_{n'}')=\sum_{0<m_1'<\cdots<m_{n'}'}\frac{1}{m_1'^{k_1'}\cdots m_{n'}'^{k_{n'}'}}$$

とすると

$$\zeta(k_1,\cdots,k_n)\zeta(k_1',\cdots,k_{n'}')=\sum_{\substack{0<m_1<\cdots<m_n\\0<m_1'<\cdots<m_{n'}'}}\frac{1}{m_1^{k_1}\cdots m_n^{k_n}m_1'^{k_1'}\cdots m_{n'}'^{k_{n'}'}}$$

ですが、この和を、上の例のように $\displaystyle\sum_{0<l_1\le l_2\le\cdots\le l_{n+n'}}$ のタイプの和（ただし l_i は m_j または $m'_{j'}$ であって、m_j の大小順序及び $m'_{j'}$ の大小順序はもとの通り保たれ、また $\le$ は $<$ と $=$ に分けて書く)、の disjoint union として書くと、右辺が多重ゼータ値の自然数係数一次線型結合として書き表されることがわかります。この計算から直ちに、積の weight は各 weight の和になることが見てとれますが、右辺の各和に $=$ があるとそこで depth が一つ落ちますので、この積を和に書く表示は depth を保ちません (つまり右辺に現れる index の depth は必ずしも左辺の二つの depth の和にならない)。(ここで注意をしておくと、duality を見てもわかるように、depth という概念を値 $\alpha\in\mathcal{Z}$ に対して定義するのはそう straightforward ではありません (index set で見ると $\zeta(3)$ は depth 1 で $\zeta(1,2)$ は depth 2 だが両者の値は等しい)。ここでは省きます。)

Hoffman [H2] はこの積のルールを generic なレベルで帰納的に定義し、その積から定まる代数構造を決定しています。すなわち彼は、2 変数非可換多項式環 $\mathbf{Q}[x,y]_{n.c.}$ に

おいて $x \longleftrightarrow \dfrac{dt}{t}$, $y \longleftrightarrow \dfrac{dt}{1-t}$ という対応のもとに x で始まり y で終わる word を反復積分により対応する多重ゼータ値と同一視し、上の積法則にあたる積を $\mathbf{Q}[x,y]_{n.c.}$ 内で帰納的に定義しています。そして、 $\mathbf{Q}[x,y]_{n.c.}$ がこの積で、Lyndon words と呼ばれる特別な words によって free に生成される commutative associative algebra になることを証明しています (彼はこの algebra を "harmonic algebra" と呼んでいる)。

次に、反復積分表示を用いた Proposition の証明を与えます。先の $\zeta(k_1,\cdots,k_n)$ 乃至 $Li_{k_1,k_2,\ldots,k_n}(z)$ の反復積分表示を簡略化して

$$\int_0^1 \omega_1\omega_2\cdots\omega_k \text{ 乃至} \int_0^z \omega_1\omega_2\cdots\omega_k$$

と書くことにします。ただし、ω_i は $\dfrac{dt}{t}$ または $\dfrac{dt}{1-t}$ で、右端の ω_k は常に $\dfrac{dt}{1-t}$, また $\zeta(k_1,\cdots,k_n)$ については左端の ω_1 は $\dfrac{dt}{t}$ である ($k_n>1$ の条件) とします。次の命題が言えると、 $z=1$ とおいて、示したかったこと (多重ゼータの積がまた $\mathcal{Z}$ に入ること) が出ます。

Proposition (shuffle product).

$$\int_0^z \omega_1\omega_2\cdots\omega_k \cdot \int_0^z \omega_{k+1}\omega_{k+2}\cdots\omega_{k+k'} = \sum_{\substack{\sigma\in\mathfrak{S}_{k+k'} \\ \sigma(1)<\sigma(2)<\cdots<\sigma(k) \\ \sigma(k+1)<\sigma(k+2)<\cdots<\sigma(k+k')}} \int_0^z \omega_{\sigma^{-1}(1)}\omega_{\sigma^{-1}(2)}\cdots\omega_{\sigma^{-1}(k+k')}$$

proof. これを称して shuffle product と言います。右辺の微分形式の (順序も考えた) 集合 $\{\omega_{\sigma^{-1}(1)},\omega_{\sigma^{-1}(2)},\ldots,\omega_{\sigma^{-1}(k+k')}\}$ は、$\{\omega_1,\ldots,\omega_k,\omega_{k+1},\ldots,\omega_{k+k'}\}$ の並べ替えであって $\{\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_k\}$ はこの順序に、$\{\omega_{k+1},\omega_{k+2},\ldots,\omega_{k+k'}\}$ もこの順序に現れるもの (shuffle) 全体です。

証明は $k+k'$ に関する帰納法で行います。$k=k'=1$ のとき、この式は $Li_1(z)^2 = 2Li_{1,1}(z)$ となりますが、これの両辺の微分は前節の Lemma より等しいことがわかり、共に $z=0$ で 0 ですから $Li_1(z)^2 = 2Li_{1,1}(z)$ が言えます。一般の場合も両辺の微分を較べます。$\{\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_k\}$ と $\{\omega_{k+1},\omega_{k+2},\ldots,\omega_{k+k'}\}$ の shuffle は ω_1 から始まるか、ω_{k+1} から始まるかのいずれかであることに注意して、右辺の和をそれぞれで始まる二つに分けます。反復積分の定義から、例えば $\left(\int_0^z \omega_1\omega_2\cdots\omega_k\right)' = \omega_1(z)\int_0^z \omega_2\cdots\omega_k$ ($\omega_i = \dfrac{dt}{t}$ or $\dfrac{dt}{1-t}$ に応じて $\omega_i(z) = \dfrac{1}{z}$ or $\dfrac{1}{1-z}$ とする) であるので、丁度左辺の微分が積の微分で二つの項に分かれるのに対応して、右辺の微分が、$\omega_1(z)$ がかかる項と、 $\omega_{k+1}(z)$ がかかる項に分かれて、それぞれに induction の仮定が使えて等しいことが分かるという仕組みになっています。∎

Example.

weight 2: $\quad Li_1(z)^2 = \displaystyle\int_0^z \frac{dt}{1-t}\int_0^z \frac{dt}{1-t} = 2\int_0^z \frac{dt}{1-t}\frac{dt}{1-t}$

$$
\begin{aligned}
&= 2Li_{1,1}(z)\\
\text{weight 3:}\quad & Li_1(z)Li_2(z) = \int_0^z \frac{dt}{1-t}\int_0^z \frac{dt}{t}\frac{dt}{1-t} = \int_0^z \frac{dt}{1-t}\frac{dt}{t}\frac{dt}{1-t} + 2\int_0^z \frac{dt}{t}\frac{dt}{1-t}\frac{dt}{1-t}\\
&= Li_{2,1}(z) + 2Li_{1,2}(z)\\
& Li_1(z)Li_{1,1}(z) = \int_0^z \frac{dt}{1-t}\int_0^z \frac{dt}{1-t}\frac{dt}{1-t} = 3\int_0^z \frac{dt}{1-t}\frac{dt}{1-t}\frac{dt}{1-t}\\
&= 3Li_{1,1,1}(z)\\
\text{weight 4:}\quad & Li_1(z)Li_3(z) = Li_{3,1}(z) + Li_{2,2}(z) + 2Li_{1,3}(z)\\
& Li_1(z)Li_{1,2}(z) = Li_{1,2,1}(z) + 3Li_{1,1,2}(z)\\
& Li_1(z)Li_{2,1}(z) = 2Li_{2,1,1}(z) + 2Li_{1,2,1}(z)\\
& Li_1(z)Li_{1,1,1}(z) = 4Li_{1,1,1,1}(z)\\
& Li_2(z)^2 = 2Li_{2,2}(z) + 4Li_{1,3}(z)\\
& Li_2(z)Li_{1,1}(z) = Li_{2,1,1}(z) + 2Li_{1,2,1}(z) + 3Li_{1,1,2}(z)\\
& Li_{1,1}(z)^2 = 6Li_{1,1,1,1}(z)
\end{aligned}
$$

4. Double Shuffle Relation

前節で与えた、二つの多重ゼータ値の積を和に書き直す二通りの方法から、多重ゼータ値の線形関係式が得られます。こうして得られる関係を double shuffle relation と呼ぶことにします。つまり、多重ゼータ値を二つとってその積を二通りに計算すると、先の depth についての考察から両者の表示は必ず異なる (値は勿論等しい) ので、一つの非自明な線形関係式が生じるわけです。

さらにこれを、'$\zeta(1)$' も許して拡張します。まず例で見ます。$\zeta(1)$ の発散を度外視して、前節の級数の積から計算されるルールで $\zeta(1)\zeta(2)$ を計算すると

$$\zeta(1)\zeta(2) = \zeta(1,2) + \zeta(3) + \zeta(2,1).$$

一方、反復積分の shuffle product より

$$Li_1(z)Li_2(z) = Li_{2,1}(z) + 2Li_{1,2}(z).$$

ここでやはり発散を無視して $z = 1$ とおいてやると、

$$\zeta(1)\zeta(2) = \zeta(2,1) + 2\zeta(1,2).$$

この二つを較べると $\zeta(3) = \zeta(1,2)$ となり、Euler の等式が得られます。(実際 Euler の議論も発散する $\zeta(1)$ をそのまま使ったものです!) この計算は一般に、$\zeta(1)\zeta(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ $(k_n > 1)$ の同様の計算に対して正当化出来て (両方から出てくる、発散項 (この例では $\zeta(2,1)$) が打ち消す)、それは Hoffman の関係式として知られているものになります (§5 参照)。ここではこうして得られる関係式をも double shuffle relation ということにします。

問題 3. 多重ゼータ値のすべての線形関係式は duality と double shuffle relation から導かれるであろうか。

計算機での計算によると、weight 10 まではこれらの関係式で、予想される次元まで落とすことが出来ます。

Example. weight 2: $\zeta(2)$ のみの 1 次元で関係式はなし。

weight 3: ゼータ値は $\zeta(3)$ と $\zeta(1,2)$ のふたつで、duality (もしくは double shuffle relation) $\zeta(3)=\zeta(1,2)$ が唯一の関係。よって $\mathcal{Z}_3$ は 1 次元、つまり $d_3=1$.

weight 4: 4 つのゼータ値があるが、duality で $\zeta(1,1,2)=\zeta(4)$. また $\zeta(1)\zeta(3)$ から生じる double shuffle relation が $\zeta(4)=\zeta(1,3)+\zeta(2,2)$, $\zeta(2)\zeta(2)$ から生じる double shuffle relation が $\zeta(4)=4\zeta(1,3)$. 従って $\zeta(1,3)=\dfrac{1}{4}\zeta(4)$, $\zeta(2,2)=\dfrac{3}{4}\zeta(4)$. すなわち $d_4=1$.

weight 5: ゼータ値は $2^{5-2}=8$ 個。duality は $\zeta(1,1,3)=\zeta(1,4)$, $\zeta(1,2,2)=\zeta(2,3)$, $\zeta(2,1,2)=\zeta(3,2)$, $\zeta(1,1,1,2)=\zeta(5)$. そして、$\zeta(1)\zeta(4)$ から生じる double shuffle relation $\zeta(5)=\zeta(1,4)+\zeta(2,3)+\zeta(3,2)$ と $\zeta(2)\zeta(3)$ から生じる double shuffle relation $\zeta(5)=6\zeta(1,4)+2\zeta(2,3)$ によって 2 次元以下に落ちます。例えば $\zeta(1,4)$ と $\zeta(2,3)$ を基底 (の候補) にとると、$\zeta(5)=6\zeta(1,4)+2\zeta(2,3)$, $\zeta(3,2)=5\zeta(1,4)+\zeta(2,3)$ と表せます (残りは duality で)。$\zeta(1,4)$ と $\zeta(2,3)$ が実際に $\mathbf{Q}$ 上独立かは今の段階では答えられそうにない問題です。

5. いろいろな関係式

前節の double shuffle relation とは別に、見て形がすぐわかる関係式の系列がいくつか知られていますのでそれを紹介します。

まず、一番早くから知られているのが

Theorem (Hoffman の関係式). $(k_1,k_2,\ldots,k_n)$ を一つの index set とし $(k_n>1)$ 固定する。このとき

$$\sum_{l=1}^{n}\zeta(k_1,\ldots,k_l+1,\ldots,k_n)=\sum_{\substack{1\le l\le n\\ k_l\ge 2}}\sum_{j=0}^{k_l-2}\zeta(k_1,\ldots,k_{l-1},j+1,k_l-j,k_{l+1},\ldots,k_n).$$

先に述べたようにこれは $\zeta(1)$ を用いた double shuffle relation と見做すことも出来ます。つまり、左辺は $\zeta(1)\zeta(k_1,k_2,\ldots,k_n)$ $(k_n>1)$ を級数表示で展開したものから、右辺は反復積分の shuffle 積から出てくるものから、ともに共通の項を取り去ったものになっています。

次に、

Theorem (Sum formula). $0<n<k$ なる n, k を固定したとき

$$\sum_{\substack{k_1,\ldots,k_{n-1}\ge 1,\ k_n\ge 2\\ k_1+\cdots+k_n=k}}\zeta(k_1,\ldots,k_n)=\zeta(k)$$

が成り立つ。つまり weight, depth が等しいすべての多重ゼータ値の和が Riemann ゼータ値になる。

proof. [K] で Zagier さんの証明を紹介したのでここでは落合啓之さんの証明を紹介します。

定理の左辺を $S(k,n)$ とおき、母関数

$$\sum_{0<n<k} S(k,n)X^{n-1}Y^{k-n-1}$$

を作ります。これを級数表示を用いて計算していきます。まず k についての和が

$$\begin{aligned}
\sum_{k=n+1}^{\infty} S(k,n)Y^{k-n-1} &= \sum_{k_1,\dots,k_n} \zeta(k_1,k_2,\dots,k_n)Y^{k_1+\cdots+k_n-n-1} \\
&= \sum_{k_1,\dots,k_n}\ \sum_{0<m_1<\cdots<m_n} \frac{Y^{k_1+\cdots+k_n-n-1}}{m_1^{k_1}m_2^{k_2}\cdots m_n^{k_n}} \\
&= \sum_{0<m_1<\cdots<m_n}\ \sum_{k_1,\dots,k_n} \frac{Y^{k_1-1}}{m_1^{k_1}}\cdots\frac{Y^{k_{n-1}-1}}{m_{n-1}^{k_{n-1}}}\frac{Y^{k_n-2}}{m_n^{k_n}} \\
&= \sum_{0<m_1<\cdots<m_n} \frac{1}{(m_1-Y)\cdots(m_{n-1}-Y)(m_n-Y)m_n}
\end{aligned}$$

と計算され、

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{(m_1-Y)\cdots(m_{n-1}-Y)(m_n-Y)m_n} \\
= &\int_0^1 x_n^{Y-1}dx_n \int_0^{x_n} x_{n-1}^{m_n-m_{n-1}-1}dx_{n-1}\cdots\int_0^{x_2} x_1^{m_2-m_1-1}dx_1\int_0^{x_1} x_0^{m_1-Y-1}dx_0
\end{aligned}$$

と積分で書くと

$$\begin{aligned}
&\sum_{0<m_1<\cdots<m_n} \frac{1}{(m_1-Y)\cdots(m_{n-1}-Y)(m_n-Y)m_n} \\
= &\int_0^1 x_n^{Y-1}dx_n \int_0^{x_n} \frac{dx_{n-1}}{1-x_{n-1}}\cdots\int_0^{x_2}\frac{dx_1}{1-x_1}\int_0^{x_1}\frac{dx_0}{x_0^Y(1-x_0)} \\
= &\int_{0<x_0<x_n<1} \frac{x_n^{Y-1}}{x_0^Y(1-x_0)}\frac{1}{(n-1)!}\left(\int_{x_0}^{x_n}\frac{dx}{1-x}\right)^{X-1} dx_0dx_n.
\end{aligned}$$

n に関する和をとって結局

$$\begin{aligned}
\sum_{0<n<k} S(k,n)X^{n-1}Y^{k-n-1} &= \int_{0<x_0<x_n<1}\frac{dx_0dx_n}{x_0(1-x_n)}\left(\frac{x_n}{x_0}\right)^{Y-1}\left(\frac{1-x_0}{1-x_n}\right)^{X-1} \\
&= \int_{1\le u,v}\frac{u^{Y-1}v^{X-1}}{uv-1}dudv \\
&= \sum_{m=1}^{\infty}\int_{1\le u,v} u^{Y-m-1}v^{X-m-1}dudv \\
&= \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(Y-m)(X-m)}.
\end{aligned}$$

一方

$$\sum_{0<n<k} \zeta(k) X^{n-1} Y^{k-n-1} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(Y-m)(X-m)}$$

は簡単に計算されて、求める式がえられます。∎

次の定理は大野泰生さんによるもので、上の二つの定理および Duality をも含む一般的な関係式です。

Theorem (Ohno). $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ と $(k'_1, k'_2, \ldots, k'_{n'})$ を互いに *dual* な *index sets* とし、$\ell \geq 0$ とする。このとき、

$$\sum_{\varepsilon_1+\varepsilon_2+\cdots+\varepsilon_n=\ell} \zeta(k_1+\varepsilon_1, k_2+\varepsilon_2, \ldots, k_n+\varepsilon_n) = \sum_{\varepsilon'_1+\varepsilon'_2+\cdots+\varepsilon'_{n'}=\ell} \zeta(k'_1+\varepsilon'_1, k'_2+\varepsilon'_2, \ldots, k'_{n'}+\varepsilon'_{n'}).$$

証明は [O] を参照下さい。適当な母関数を作って sum formula の Zagier さんによる証明の線に沿って計算していきます。この定理の $\ell = 0$ の場合が duality, また、index sets を $(\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{n-1}, 2)$ とその dual $(n+1)$ に取り、$\ell = k - n - 1$ とすると先の sum formula が得られます。さらに $\ell = 1$ として得られる関係式の一方の辺の dual をとったものが Hoffman の関係式になります。ただ、この一般的な関係式をもってしても $\mathcal{Z}_k$ の予想次元 d_k にまで reduce するには少なすぎます。例えば予想では $d_8 = 4,\ d_9 = 5,\ d_{10} = 7,\ d_{11} = 9$ ですが、計算機によると Ohno の関係式により $d_8 \leq 18,\ d_9 \leq 30,\ d_{10} \leq 57,\ d_{11} \leq 101$ がわかるという具合で、予想数とのずれ (比) は (1 より大なる数)^{weight} に比例して大きくなっていきます。

最後に、結び目不変量の計算から導かれる関係式を紹介します。まず記号を用意します。$\mathbf{k} = (k_1, k_2, \ldots, k_n)$ について $\mathrm{wt}(\mathbf{k}) = k_1 + k_2 + \cdots + k_n$, $\mathrm{dep}(\mathbf{k}) = n$, 更に、$k_i > 1$ なる i の個数を height と呼んで (最近の Ohno-Zagier の用法に倣う) $\mathrm{ht}(\mathbf{k})$ と書くことにします。定義から $\mathrm{ht}(\mathbf{k}) \leq \mathrm{wt}(\mathbf{k})/2$ に注意。

Theorem (Le-J. Murakami). 条件 $1 \leq s \leq k$ を満たす自然数 s, k を固定するとき、

$$\sum_{\substack{\mathbf{k} \\ ht(\mathbf{k})=s,\, wt(\mathbf{k})=2k}} (-1)^{dep(\mathbf{k})} \zeta(\mathbf{k}) = \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \sum_{r=0}^{k-s} \binom{2k+1}{2r} (2 - 2^{2r}) B_{2r} \cdot \pi^{2k}.$$

(B_{2r} は Bernoulli 数)

これは偶数 weight での関係式です。(奇数 weight の関係式も出て来るのですが、duality を使うと自明な関係になってしまう。) 右辺は π^{2k} の有理数倍ですから Euler の公式より $\zeta(2k)$ の有理数倍です。あるいは右辺は

$$2(-1)^k \sum_{r=0}^{k-s} (-1)^r \left(1 - \frac{1}{2^{2r-1}}\right) \zeta(2r) \zeta(\underbrace{2, 2, \ldots, 2}_{k-r})$$

と書くことも出来ます ($\zeta(0)=-\frac{1}{2}$ とする)。これは、やはり Euler による (と思われます。[E] には出ておらず、その他の論文を調べた訳ではありませんが、$\sin(x)$ の無限積展開から直ちに出るので)

$$\zeta(\underbrace{2,2,\ldots,2}_{n})=\frac{\pi^{2n}}{(2n+1)!}$$

と $\zeta(2r)$ の公式から出ます。ついでに、このように値の求まるゼータ値に

$$\zeta(\underbrace{1,3,1,3,\ldots,1,3}_{2n})=\frac{2\pi^{4n}}{(4n+2)!}$$

があります。他にもありますが、[BBB], [BBBL] などを参照ください。

定理は、一つの絡み目に対し二通りの不変量を計算し比べることにより出るのですが、そこに多重ゼータ値が現れる理由は、一方の不変量として Kontsevich 不変量というものをとっていて、それが後で述べる Drinfel'd associator (多重ゼータ値のある母関数) というものを用いて定義されていることにあります。この Kontsevich 不変量は、絡み目に対し、($\mathbf{C}$ 上の単純)Lie 環とその表現を決めるごとに既に知られていた不変量を再現するという不変量で、Le-Murakami では、自明な (2 成分) 絡み目及び古典型 Lie 環 (とそのベクトル表現) をとって多重ゼータ値の関係式を得ています。原理的には絡み目と、Lie 環 (及びその表現) を決めるごとに多重ゼータ値の関係式が得られる理屈ですが、実際の計算は大変のようです。最近高向崇さんが、絡み目として自明な結び目をひとひねり (framed link として) したもの、Lie 環は古典型にとって新たな関係式を導いています ([T])。また井原健太郎さんが、自明な結び目と例外型 Lie 環 (G_2) をとって計算しています ([IhK], この場合は一般的な形で関係式を書くには至ってませんが、ある種計算のアルゴリズムは与えられています)。

6. Drinfel'd associator

多重ゼータ値は、Drinfel'd associator と呼ばれるものの係数として自然に現れてきます (多重ゼータ値の最も良い母関数と言えるのではないでしょうか)。そして、Drinfel'd の理論 (quasi-triangular quasi-Hopf algebra) と、そこに登場するある Lie 環の構造についての予想 (それが $\mathbf{P}^1\setminus\{0,1,\infty\}$ の基本群への Galois 表現と密接に関係している) が、1 節でのべた "main conjecture" の一つの支持根拠を与えています。ここではごく簡単にこのあたりの事情を解説いたします。

Drinfel'd は $\varphi_{KZ}(x,y)$ という、$\mathbf{C}$ 係数 2 変数非可換冪級数環 $\mathbf{C}[[x,y]]_{n.c.}$ の元で、ある三つの代数関係式 ([Dr] の (2.12), (5.3), (2.13)) を満たすもの (Drinfel'd associator) を KZ 方程式

$$\frac{dG}{dt}=\frac{1}{2\pi i}\left(\frac{x}{t}+\frac{y}{t-1}\right)G(t)$$

の特別な二つの解の比として構成しています ($G(t)$ は $\mathbf{C}[[x,y]]_{n.c.}$ に値をとる適当な領域上の解析関数)。[Dr] には $\varphi_{KZ}(x,y)$ の explicit な式は書かれていませんが (ある商へ移っての係数は計算されている (後述))、[LM2] においてそれがある仕方 ('各

$\zeta(k_1,k_2,\ldots,k_n)$ の係数' を与える) で与えられています。この節の最後に $\varphi_{KZ}(x,y)$ の degree の低いところ (6 次まで) を、Lyndon words に対応する Lie elements (ある種の Hall 基底) で書いた式を載せておきます。ともかく、

$\varphi_{KZ}(x,y)$ の係数は $\zeta(k_1,k_2,\ldots,k_n)/(2\pi i)^{weight}$ の整数係数の和で (weight と単項式の次数は一致)、すべての多重ゼータ値がどこかの係数に現れる

ことが分かります。

さて、K を標数 0 の体とし、$\varphi_{KZ}(x,y)$ と同じ三つの関係式を満たす K 係数 2 変数非可換冪級数全体の集合を $M_1(K)$ とします。Drinfel'd は、$GRT_1(K)$ なる群 (a variant of Grothendieck-Teichmüller group, 集合としては、ある関係式で定義される K 上の 2 変数非可換冪級数全体) とその $M_1(K)$ への作用を定義し、

i) $GRT_1(K)$ の $M_1(K)$ への作用は free かつ transitive,　ii) $M_1(\mathbf{Q}) \neq \phi$

なることを証明しました。しかも $GRT_1(K) = \exp(\mathfrak{grt}_1(K))$ なる Lie 環 $\mathfrak{grt}_1(K)$ (集合としては $\subset K[[x,y]]_{n.c.}$) があって、この $\mathfrak{grt}_1(K)$ は、Deligne や伊原先生のお仕事との関連から、3 以上の各奇数次に一つづつの生成元をもつ K 上の 自由 Lie 環であろう、と予想されています。そうするとどういうことになるか。上の i) と ii) から、$\varphi_{KZ}(x,y)$ に $\exp(\mathfrak{grt}_1(\mathbf{C}))$ の元を作用させて $\mathbf{Q}$ 係数に出来るはずです。そうして、$\mathfrak{grt}_1(K)$ の構造に関する予想を認めると、$\exp(1+c_3\omega_3+c_5\omega_5+c_7\omega_7+c_8[\omega_3,\omega_5]+\cdots)$ の形の元の作用で $\mathbf{Q}$ 係数に出来る。ただしここで c_i は $\mathbf{C}$ の元で、ω_i は $\mathfrak{grt}_1(\mathbf{C})$ の degree i の生成元です。ここでは Lie 環の定義も作用の定義もしていないのでいい加減ですが、ともかくこの作用は $\varphi_{KZ}(x,y)$ の各次数部分に、$c_3\omega_3$, $c_5\omega_5$, $c_7\omega_7$, $c_8[\omega_3,\omega_5]$, ... 達の同じ次数の有理数係数斉次式を加える、という形をしています。従って、$\mathbf{Q}$ 係数に出来るということは、特に $\varphi_{KZ}(x,y)$ の各係数が $\mathbf{Q}[c_3,c_5,\ldots]$ に含まれるということを意味し、これが §1 の予想 (正確には $\zeta(k_1,k_2,\ldots,k_n)/(2\pi i)^{weight}$ での version) をサポートするものとなっています。というのも、自由 Lie 環の斉次部分の次元を与える Witt の公式から、$\mathfrak{grt}_1(K)$ (が予想される構造を持つとして) の degree k 部分の次元は予想 2 の式で与えられる M_k に等しいからです。

Example. $\widetilde{\zeta}(k) = \zeta(k)/(2\pi i)^k$ と書いて、例えば

$$\begin{aligned}
c_3 = \widetilde{\zeta}(3),\ \omega_3 &= [x,[x,y]] - [[x,y],y] \\
c_5 = \widetilde{\zeta}(5),\ \omega_5 &= [x,[x,[x,[x,y]]]] - 2[x,[x,[[x,y],y]]] \\
&+ \frac{3}{2}[[x,[x,y]],[x,y]] + 2[x,[[[x,y],y],y]] \\
&+ \frac{1}{2}[[x,y],[[x,y],y]] - [[[[x,y],y],y],y]
\end{aligned}$$

として $\exp(1+c_3\omega_3+c_5\omega_5+c_7\omega_7+c_8\omega_8+\cdots)$ を $\varphi_{KZ}(x,y)$ へ作用させると、$M_1(\mathbf{Q})$ の元の 5 次の項までが

$$1+\frac{1}{24}[x,y] - \frac{1}{1440}\left([x,[x,[x,y]]] - \frac{1}{4}[x,[[x,y],y]] + [[[x,y],y],y]\right) + (6\ 次以上)$$

と得られます。

$\varphi_{KZ}(x,y)$ の構成法から、「$\log\varphi_{KZ}(x,y)$ は Lie element」 なることがわかります (x,y で生成される $\mathbf{C}$ 上の自由 Lie 環 $\mathcal{L}$ を $[x,y]=xy-yx$ により $\mathbf{C}[[x,y]]_{n.c.}$ に埋め込んでいる)。(このことは、下の具体式で見てとれるように、$\varphi_{KZ}(x,y)$ を Lie element で書いたときに Lie element の積の部分の係数が多重ゼータ値の shuffle 積で現れることと対応しています。)

問題 4. $\log\varphi_{KZ}(x,y)$ が Lie element なること、及び三つの基本 (定義) 関係式からどれだけの多重ゼータ値の関係式がでてくるか？

$\log\varphi_{KZ}(x,y)$ が $\mathcal{L}'=[\mathcal{L},\mathcal{L}]$ に入ることは簡単にわかるのですが、Drinfel'd はその $\mathcal{L}'/\mathcal{L}''$, ($\mathcal{L}''=[\mathcal{L}',\mathcal{L}']$) における像を計算しています。これは丁度 $\zeta(\underbrace{1,1,\ldots,1}_{m-1},n+1)$ の形の多重ゼータ値がかかるところを見ることになっている筈で (ちゃんと確かめてません!)、[Dr] の (2.15) 式は Zagier [Z2] で証明されている母関数表示

$$1-\sum_{m,n=1}^{\infty}\zeta(\underbrace{1,1,\ldots,1}_{m-1},n+1)X^mY^n=\exp\left(\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\zeta(k)}{k}(X^k+Y^k-(X+Y)^k)\right)$$

と同等の式の筈です。(ちなみに Galois の方ではこれ (というよりこれと $(X,Y)\mapsto(-X,-Y)$ としたものの比、か) にあたるのが Jacobi sum の universal power series (adelic beta function) の explicit formula ([Ih2] とその文献参照) です。)

$\varphi_{KZ}(x,y)$ の低次の具体形: $\varphi_{KZ}(x,y)=\Phi(\frac{x}{2\pi i},\frac{y}{2\pi i})$ とすると $\Phi(X,Y)=1-\zeta(2)[X,Y]-\zeta(3)[X,[X,Y]]+\zeta(1,2)[[X,Y],Y]+\cdots$. これを各斉次成分ごとに degree 6 まで以下に書く。記号 $\circ$ は shuffle product で、実際の公式での係数は shuffle product で和に直した形で書けることを意味します。たとえば $\zeta(2)\circ\zeta(2)$ なら $2\zeta(2,2)+4\zeta(1,3)$. (値としては $\zeta(2)^2$ に等しい。) (計算機には degree 10 まで入っているのでご入用の方は言ってください。)

deg 2: $-\zeta(2)[X,Y]$

deg 3: $-\zeta(3)[X,[X,Y]]+\zeta(1,2)[[X,Y],Y]$

deg 4: $-\zeta(4)[X,[X,[X,Y]]]+\zeta(1,3)[X,[[X,Y],Y]]-\zeta(1,1,2)[[[X,Y],Y],Y]$
$+\frac{1}{2}\zeta(2)\circ\zeta(2)[X,Y]^2$

deg 5: $-\zeta(5)[X,[X,[X,[X,Y]]]]+\zeta(1,4)[X,[X,[[X,Y],Y]]]$
$+(2\zeta(1,4)+\zeta(2,3))[[X,[X,Y]],[X,Y]]-\zeta(1,1,3)[X,[[[X,Y],Y],Y]]$
$-(3\zeta(1,1,3)+\zeta(1,2,2))[[X,Y],[[X,Y],Y]]+\zeta(1,1,1,2)[[[[X,Y],Y],Y],Y]$
$+\zeta(2)\circ\zeta(3)[X,Y]\cdot[X,[X,Y]]-\zeta(1,2)\circ\zeta(2)[[X,Y],Y]\cdot[X,Y]$

deg 6: $-\zeta(6)[X,[X,[X,[X,[X,Y]]]]]+\zeta(1,5)[X,[X,[X,[[X,Y],Y]]]]$
$+(\zeta(2,4)+2\zeta(1,5))[X,[[X,[X,Y]],[X,Y]]]-\zeta(1,1,4)[X,[X,[[[X,Y],Y],Y]]]$
$-(\zeta(1,2,3)+3\zeta(1,1,4))[X,[[X,Y],[[X,Y],Y]]]$
$-(\zeta(2,1,3)+3\zeta(1,2,3)+6\zeta(1,1,4))[[X,[[X,Y],Y]],[X,Y]]$
$+\zeta(1,1,1,3)[X,[[[[X,Y],Y],Y],Y]]$
$+(\zeta(1,1,2,2)+4\zeta(1,1,1,3))[[X,Y],[[[X,Y],Y],Y]]$

$$
\begin{aligned}
&-\zeta(1,1,1,1,2)[[[[[X,Y],Y],Y],Y],Y] \\
&+\zeta(2)\circ\zeta(4)[X,Y]\cdot[X,[X,[X,Y]]]-\zeta(2)\circ\zeta(1,3)[X,Y]\cdot[X,[[X,Y],Y]] \\
&+\zeta(1,1,2)\circ\zeta(2)[[[X,Y],Y],Y]\cdot[X,Y]-\zeta(1,2)\circ\zeta(3)[[X,Y],Y]\cdot[X,[X,Y]] \\
&+\frac{1}{2}\zeta(3)\circ\zeta(3)[X,[X,Y]]^2+\frac{1}{2}\zeta(1,2)\circ\zeta(1,2)[[X,Y],Y]^2-\frac{1}{6}\zeta(2)\circ\zeta(2)\circ\zeta(2)[X,Y]^3
\end{aligned}
$$

7. 文献、引用等についてのコメント

M. Hoffman が集めた多重ゼータ値に関する文献表が

http://www.nadn.navy.mil/Users/math/meh

にあるのでそれもご覧下さい。

Euler は [E] において、depth が 2 のときの多重ゼータ値を詳しく研究し、沢山の関係式を導いて、また予想しています。彼の問題意識の一つに $\zeta(k_1,k_2)$ が $\zeta(k)$ で書き表されるのはいつか、ということがあったように見受けられます。この方向についての最近の研究については Ohno-Zagier [OZ] があります。

予想 1,2 について言及した文献として [Br2], [De2], [G2], [G3], [H3], [Z1] があります。

"Galois side" については [De1], [Ih1], [Ih2], [Ih3] など、また [Ih2] の文献表をご覧下さい。

反復積分の shuffle product identity を一般的な situation で証明しその代数構造を調べたのは Ree [R] です。K. T. Chen の仕事については、Illinois Journal of Math. の 34 号 (1990) が特集号になっており、そこの解説と文献リストを参照下さい。

多重ゼータ値の反復積分表示 (§2) は、[Z1] によれば Kontsevich によるとあります。(Deligne も知っていたはずとの松本眞さんの指摘も尤も。)

Double shuffle relation (§4) については [G2], [G3] に、ある generic な形で述べられてあり、いくつか結果があるようなのですが、私にはまだ関係がもひとつよくわかっていません。[H3] にも少しコメントがあります。

Sum formula (§5) は [H3] によると 1988 年にはじめ C. Moen が予想、$k=3$ の時に証明し、一般の場合は A. Granville と D. Zagier により証明 (1996) されました。

Hoffman の harmonic algebra (§3) についてや、Ohno の関係式 (§5) を $\mathbf{C}[[x,y]]_{n.c.}$ でのある derivation で解釈する試みについては [K] も参照。実は今回の解説は [K] に書いたことと多く重複しています。

Drinfel'd associator については、「原典」[Dr] の他に [BN], [GL] など (私は素人なので、他にも知らない基本的な文献があることと思いますが)。日本語で書かれたものに、河野俊丈さんの「場の理論とトポロジー」(岩波講座 現代数学の展開) や「超幾何関数論」(青本・喜多、Springer) の付録の中に解説があります。

物理との関係は hep-th にある Broadhurst の論文をご覧下さい。

多重ゼータ値の一般化(指標をつける、etc.)については全然触れませんでした。[G2], [G3], [G4], [BBB], [BBBL] など。また、荒川恒男さんとの共著論文 "Multiple L-values" を準備中であります。

最後になってしまいましたが、シンポジウムで話す機会を与えて下さいました伊原康隆先生に感謝いたします。

参考文献

[AET] Akiyama, S., Egami, S., Tanigawa, Y: An analytic continuation of multiple zeta functions and their values at non-positive integers, *preprint,* 1999.

[AK] Arakawa, T., Kaneko, M. : Multiple zeta values, poly-Bernoulli numbers, and related zeta functions, *Nagoya Math. J.* **153** (1999), 1–21.

[BBB] Borwein, J. M., Bradley, D. M. and Broadhurst, D. J.: Evaluations of k-fold Euler/Zagier sums: a compendium of results for arbitrary k, hep-th/9611004.

[BBBL] Borwein, J. M., Bradley, D. M. and Broadhurst, D. J., Lisoněk, P. : Special values of multidimentional polylogarithms, *preprint,* CECM Research Report 98-106, May, 1998.

[BBG] Borwein, D., Borwein, J. M. and Girgensohn, R. : Explicit evaluation of Euler sums, *Proc. Edin. Math. Soc.* **38** (1995), 277–294.

[BN] Bar-Natan, D. : On associators and the Grothendieck-Teichmüller group I, *Selecta Mathematica,* New Series **4** (1998), 183–212.

[Br1] Broadhurst, D. J. : On the enumeration of irreducible k-fold Euler sums and their roles in knot theory and field theory, hep-th/9604128.

[Br2] Broadhurst, D. J. : Conjectured enumeration of irreducible multiple zeta values, from knots and Feynman diagrams, hep-th/9612012.

[De1] Deligne, P. : Le groupe fondamental de la droite projective moins trois points, in Galois Groups over $\mathbf{Q}$, Publ. MSRI, no. 16 (1989), 79–297. Springer, Berlin Heidelberg New York.

[De2] Deligne, P. : Letters to Broadhurst, dated May 29 and June 4, 1997.

[Dr] Drinfel'd, V. G. : On quasitriangular quasi-Hopf algebras and a group closely connected with $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$, *Leningrad Math. J.* **2** (1991), 829–860.

[E] Euler, L. : Meditationes circa singulare serierum genus, *Novi Comm. Acad. Sci. Petropol* **20** (1775), 140–186, reprinted in *Opera Omnia ser. I, vol. 15*, B. G. Teubner, Berlin (1927), 217–267.

[G1] Goncharov, A. B. : Hyperlogarithms, mixed Tate motives and multiple ζ-numbers, *Preprint MSRI 058-93*, June 1993.

[G2] Goncharov, A. B. : Multiple polylogarithms at roots of unity and motivic Lie algebras, *preprint*, June 1997.

[G3] Goncharov, A. B. : Multiple polylogarithms, cyclotomy and modular complexes, *Math. Res. Letters* **5** (1998), 497–516.

[G4] Goncharov, A. B. : The dihedral Lie algebras and Galois symmetries of $\pi_1^{(\ell)}(\mathbf{P}^1 \setminus \{0, \mu_N, \infty\})$ *preprint*, 1998.

[GL] Gonzalez-Lorca, J. : Série de Drinfel'd, monodromie et algèbres de Hecke, *preprint*, 1998.

[H1] Hoffman, M. : Multiple harmonic series, *Pacific J. Math.* **152** (1992), 275–290.

[H2] Hoffman, M. : The algebra of multiple harmonic series, *J. of Algebra* **194** (1997), 477–495.

[H3] Hoffman, M. : Algebras of multiple zeta values, quasi-symmetric functions, and Euler sums, seminaire de combinatoire, Université du Québec à Montréaal, May 1, 1998, (text available at http://www.nadn.navy.mil/Users/math/meh).

[HWN] Huard, J. G., Williams, K. S. and Nan-Yue, Z. : On Tornheim's double series, *Acta Arithmetica* **65-2** (1996), 105–117.

[Ih1] Ihara, Y. : The Galois representation arising from $\mathbf{P}^1 - \{0, 1, \infty\}$ and Tate twists of even degree, in Galois Groups over $\mathbf{Q}$, Publ. MSRI, no. 16 (1989), 299–313. Springer, Berlin Heidelberg New York.

[Ih2] Ihara, Y. : Braids, Galois groups, and some arithmetic functions, in Proceedings of the ICM Kyoto 1990, (1991), 99–120. Springer.

[Ih3] Ihara, Y. : On the stable derivation algebra associated with some braid groups, *Israel J. Math.* **80** (1992), 135–153.

[IhK] Ihara, K. : The G_2 link invariant and relations of multiple zeta values, 九州大学修士論文 (1999.3).

[K] Kaneko, M. : 多重ゼータ値と多重ベルヌーイ数、都立大学数学教室セミナー報告 1997 (出たのは 1998).

[LM1] Le, T. Q. T. and Murakami, J. : Kontsevich's integral for the Homfly polynomial and relations between values of multiple zeta functions, *Topology and its Applications* **62** (1995), 193–206.

[LM2] Le, T. Q. T. and Murakami, J. : Kontsevich's integral for the Kauffman polynomial, *Nagoya Math. J.* **142** (1996), 39–65.

[M] Matsumoto, M. : On the Galois image in the derivation algebra of π_1 of the projective line minus three points, *Contemporary Math.* **186** (1995), 201–213.

[O] Ohno, Y. : A generalization of the duality and sum formulas on the multiple zeta values, *J. of Number Th.* **74** (1999), 39–43.

[OZ] Ohno, Y., Zagier, D. : *in preparation.*

[R] Ree, R. : Lie elements and an algebra associated with shuffles, *Ann. of Math.* **68** (1958), 210–220.

[T] Takamuki, T. : The Kontsevich invariant and relations of multiple zeta values, 九州大学博士論文 (1999.3).

[Z1] Zagier, D. : Values of zeta functions and their applications, in ECM volume, *Progress in Math.*, **120**, (1994), 497-512.

[Z2] Zagier, D. : Multiple zeta values, *in preparation.*