数理解析研究所講究録
1098巻 1999年 42-69

ハミルトン系における 繰り込み群方程式の正準性*

山口義幸 (立命館大・総研)
YAMAGUCHI Y. Yoshiyuki (Ritsumeikan University)

概要

繰り込み群の方法は、元の運動方程式から速い運動を無視することによって繰り込み群方程式と言う遅い運動を表す方程式にReduceする方法である。この方法によると、永年項を処理し大域的な解を得ることができる。しかし、Reduceされた方程式である繰り込み群方程式が元の系の性質を持っているか否かは自明ではない。そこで本研究ではハミルトン系に対して繰り込み群方程式を適用し、どのような場合に正準性が受け継がれるかを調べる。また、摂動によって近似されているものとはなにかについても議論する。

目次

1. はじめに
2. 繰り込み群の方法
3. 位置変数による繰り込み群方程式
4. 作用・角変数による繰り込み群方程式
5. 変数の取り方による正準性の有無について
6. 繰り込み群方程式と正準摂動論
7. 何を近似しているか
8. まとめ

---

*この研究は南部保貞氏 (名古屋大学理学部物理ＣＧ研) との共同研究による

1 はじめに

自然界の時間発展を記述するには、通常力学系が用いられ、その非線形性を理解することは重要な課題である。特に、ハミルトン系では2自由度系 [1, 2] や多自由度系 [3, 4] で $1/f$ スペクトルなどの遅い緩和が観測されており、その動的性質は興味深い。一般に、2自由度以上で系は非可積分となり、厳密解から系の性質を知ることはできないため、摂動論的な方法や数値計算によって力学的性質が調べられてきた。ここでは、摂動論的な方法によって系の性質を知る方法に着目する。

一つの有力な方法は、摂動されたハミルトン系に対する理論である、Kolmogorov-Arnold-Moser (KAM) 定理 [5] や Poincaré-Birkhoff 定理 [6] を用いることである。これらの定理から、相空間内の自己相似的階層構造が明らかにされており、相空間ではこの自己相似構造の中で Markov 的な遷移運動をするという仮定を用いて遅い緩和の議論がなされている [7, 8, 9]。これらの議論は定性的な理解を与えるが、個々の系の定量的な性質まではわからない。この目的のためには近似解を構成する方法が有力である。

ところが、正則な摂動法は共鳴のためにしばしば永年項を生み、摂動を破ってしまう。この問題に対して、多くの特異摂動法 [10] と呼ばれる方法、例えば、平均化法、multiple scale methods、matched asymptotic expansions などが考案されてきたが、個々の系の特徴に合わせた適当な方法で、適当なスケールを持ったパラメータを用いて解析しなければならないという難点を持つ。近年提唱された繰り込み群の方法 [11, 12] はこれらの方法を統一おり、小さいパラメータのスケールが自動的に決定されるという意味で、もっとも強力な方法の一つである。繰り込み群の方法では、元の運動方程式から速い運動を無視し、遅い運動を表す繰り込み群方程式に Reduce する。これは、幾何学的には包絡線方程式として解釈され、近似的にではあるが大域的な解を与える。しかし、Reduce された方程式である繰り込み群方程式が元の運動方程式の性質 (ここでは特に正準性) を受け継いでいるかどうかは自明ではない。そこで本研究では、繰り込み群方程式はどんな場合に正準性を受け継ぐかを調べ、正準性を持っている場合については正準摂動論 [13, 14] との関係を議論する。

この報告の構成は以下の通り。まず、第2節において、簡単な例を用いて繰り込み群の方法を復習する。つぎに、 位置座標 q と、作用・角変数

(I, θ) の運動方程式から構成された繰り込み群方程式の正準性をそれぞれ第3節と第4節において議論する。位置座標 q から得られる繰り込み群方程式は一般には正準性を保たないが、この原因は第5節において議論される。繰り込み群方程式が正準性を持つ場合の正準摂動論との比較は第6節において行う。第7節では、各近似法によって近似されている量とは何かを考察する。最終第8節はまとめを示す。

2 繰り込み群の方法

この節では簡単な例によって繰り込み群の方法を復習する。次の系を考えよう。

$$H(p,q) = \frac{1}{2}(p^2 + q^2) + \frac{\epsilon}{2}q^2 \tag{1}$$

q に対する運動方程式は

$$\frac{d^2q}{dt^2} + q = -\epsilon q \tag{2}$$

となり、厳密解は

$$q(t) = B\cos(\sqrt{1+\epsilon}\ t) + C\sin(\sqrt{1+\epsilon}\ t) \tag{3}$$

となる。一方、

$$q = q^{(0)} + \epsilon q^{(1)} + \epsilon^2 q^{(2)} + \cdots \tag{4}$$

なる展開によって式(2)を摂動的に解くと、

$$\begin{aligned} q(t; t_0, B, C) = {} & B\cos t + C\sin t + \frac{\epsilon}{2}\,(t - t_0)\,(C\cos t - B\sin t) \\ & - \frac{\epsilon^2}{8}\big[(t - t_0)\,(C\cos t - B\sin t) \\ & + (t - t_0)^2\,(B\cos t + C\sin t)\big] + O(\epsilon^3) \end{aligned} \tag{5}$$

となる。ここで、t_0 は初期時刻である。永年項のために解(5)は $\epsilon(t - t_0) << 1$ なる領域でしか成り立たない。そこで、積分定数 B, C を初期時刻の関数であると思って、次の**繰り込み群方程式**をたてる。

$$\left(\frac{\partial q}{\partial t_0}\right)_{t_0 = t} = 0, \qquad \text{for} \forall t \tag{6}$$

つまり

$$\begin{aligned}\dot{B} &= \left(\frac{\epsilon}{2}-\frac{\epsilon^2}{8}\right)C \\ \dot{C} &= -\left(\frac{\epsilon}{2}-\frac{\epsilon^2}{8}\right)B\end{aligned} \tag{7}$$

これを解いて式(5)に代入することにより、繰り込まれた解

$$\begin{aligned}q^{\mathrm{RG}}(t) &= q(t;t,B(t),C(t)) \\ &= B\cos\left(1+\frac{\epsilon}{2}-\frac{\epsilon^2}{8}\right)\ t + C\sin\left(1+\frac{\epsilon}{2}-\frac{\epsilon^2}{8}\right)\ t\end{aligned} \tag{8}$$

を得る。この繰り込まれた解は、厳密解(3)を $O(\epsilon^2)$ まで近似している。

繰り込み群方程式(7)は変数 B, C を正準共役な変数とするハミルトン系になっている。実際、

$$H^{\mathrm{RG}}(B,C) = \frac{1}{2}\left(\frac{\epsilon}{2}-\frac{\epsilon^2}{8}\right)(B^2+C^2) \tag{9}$$

を用いて

$$\begin{aligned}\dot{B} &= \frac{\partial H^{\mathrm{RG}}}{\partial C} \\ \dot{C} &= -\frac{\partial H^{\mathrm{RG}}}{\partial B}\end{aligned} \tag{10}$$

と書ける。

今は簡単な系で示したが、実は調和振動子に解析関数を摂動として加えた1自由度系では繰り込み群方程式は必ずハミルトン系になる。そこで次の節からは、カオスが生じ得る2自由度系でも繰り込み群方程式がハミルトン系になるか否かを考察する。

3 位置変数による繰り込み群方程式

ここでは、得られた結果だけを述べていくことにする。詳細は参考文献[16, 17]を参照されたい。

定理 1 [16]
次の形の2自由度系を考える。

$$H(p,q) = \frac{1}{2}(p_1^2+p_2^2+q_1^2+q_2^2)+\epsilon V(q_1,q_2) \tag{11}$$

ここで、ϵ は十分小さいパラメータ、$V(q_1,q_2)$ は 3 次もしくは 4 次の同次関数とする。q_1, q_2 に対する運動方程式を

$$q_j^{(0)} = B_j \cos t + C_j \sin t \tag{12}$$

なる 0 次解のもとで摂動的に解き、B_j, C_j に対する繰り込み群方程式を作る。このとき、

繰り込み群方程式が ϵ の second leading order まで
ハミルトン系になる
$\Longleftrightarrow$ 元の系は座標 (q_1, q_2) の回転によって変数分離可能 ♠♠

摂動ポテンシャルが奇数次数項のみの場合、繰り込み群方程式には ϵ の偶数次数項のみが現れる。したがって ϵ の second leading order とは $O(\epsilon^4)$ のことである。定理 1 の摂動ポテンシャルは一般化できて、次の定理 2 が成り立つ。

定理 2 [17]
定理 1 は摂動ポテンシャル $V(q_1,q_2)$ を偶数次数項 (例えば $q_1 q_2^3$ など) のみを含む解析関数に拡張できる。♠♠

定理 2 では摂動ポテンシャルから奇数次数項を排除した。変数分離の可否を見るためには、偶数次数項のみの場合は $O(\epsilon^2)$ まで計算すればよいが、奇数次数項が入ると $O(\epsilon^4)$ まで計算しなければならない。しかし、定理 1 の結果からみて、奇数次数項が入っても定理 2 は成り立つと予想している。

4 作用・角変数による繰り込み群方程式

前節で行った議論を、位置座標 q ではなく、作用・角変数 (I,θ) を用いて行う [18]。考える系は、系 (11) を

$$\begin{aligned} q_j &= \sqrt{2I_j} \sin \theta_j \\ p_j &= \sqrt{2I_j} \cos \theta_j \end{aligned} \tag{13}$$

と変換し、一般化した N 自由度系

$$H(I,\theta) = H_0(I) + \epsilon V(I,\theta) \tag{14}$$

$$H_0(I) = \sum_{k=1}^{N} \omega_k I_k \tag{15}$$

である。ただし、$V(I,\theta)$ は全ての θ_j について 2π 周期の周期的解析関数であり、次のように Fourier 級数展開できる：

$$V(I,\theta) = \sum_{n} \hat{V}_n(I) e^{in\cdot\theta} \tag{16}$$

ここに、

$$I = (I_1, I_2, \ldots, I_N) \tag{17}$$
$$\theta = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_N) \tag{18}$$
$$n = (n_1, n_2, \ldots, n_N) \tag{19}$$

である。系 (14) の正準運動方程式

$$\begin{aligned} I_j &= -\frac{\partial H}{\partial \theta_j} = -\epsilon \frac{\partial V}{\partial \theta_j} \\ \theta_j &= \frac{\partial H}{\partial I_j} = \omega_j - \epsilon \frac{\partial V}{\partial I_j} \end{aligned} \tag{20}$$

から構成した繰り込み群方程式に対して、次の定理 3 が成り立つ。

定理 3
系 (14) において、繰り込み群方程式は $O(\epsilon^2)$ までいつでもハミルトン系になる。♠♠

以下、本節では定理 3 の証明を示す。

4.1 ナイーブ解の構成

まず I_j, θ_j を ϵ で展開する。

$$\left\{ \begin{array}{lcl} I_j &=& I_j^{(0)} + \epsilon I_j^{(1)} + \epsilon^2 I_j^{(2)} + \cdots \\ \theta_j &=& \theta_j^{(0)} + \epsilon \theta_j^{(1)} + \epsilon^2 \theta_j^{(2)} + \cdots \end{array} \right. \tag{21}$$

この展開を用いて、ϵ のオーダー毎に解を構成して行く。

4.1.1 $O(\epsilon^0)$

運動方程式は

$$\dot{I}_j^{(0)} = 0$$
$$\dot{\theta}_j^{(0)} = \omega_j(I^{(0)}) \tag{22}$$

であるから、解は

$$I_j^{(0)} = \alpha_j$$
$$\theta_j^{(0)} = \omega_j\, t + \beta_j \tag{23}$$

となる。ここに、α_j, β_j は積分定数であり、後に永年項を消去するためこれらに対する繰り込み群方程式をたてる。

4.1.2 $O(\epsilon^1)$

運動方程式は

$$\dot{I}_j^{(1)} = -\frac{\partial V}{\partial \theta_j}(I^{(0)}, \theta^{(0)}) = -\sum_n i n_j \hat{V}_n e^{in\cdot\theta^{(0)}} \tag{24}$$

$$\dot{\theta}_j^{(1)} = \frac{\partial V}{\partial I_j}(I^{(0)}, \theta^{(0)}) = \sum_n \frac{\partial \hat{V}_n}{\partial I_j} e^{in\cdot\theta^{(0)}} \tag{25}$$

これを解いて、

$$I_j^{(1)} = -\sum_{n:\mathrm{Res}} i n_j \hat{V}_n e^{in\cdot\beta}\, t - \sum_{n:\mathrm{Non}} \frac{i n_j}{i n\cdot\omega} \hat{V}_n e^{in\cdot\theta^{(0)}} \tag{26}$$

$$\theta_j^{(1)} = \sum_{n:\mathrm{Res}} \frac{\partial \hat{V}_n}{\partial I_j} e^{in\cdot\beta}\, t + \sum_{n:\mathrm{Non}} \frac{1}{i n\cdot\omega} \frac{\partial \hat{V}_n}{\partial I_j} e^{in\cdot\theta^{(0)}} \tag{27}$$

ここに、和記号の意味は、

$$\sum_{n:\mathrm{Res}} : \quad n\cdot\omega = 0 \text{となるような} n \text{について和を取る} \tag{28}$$

$$\sum_{n:\mathrm{Non}} : \quad n\cdot\omega \neq 0 \text{となるような} n \text{について和を取る} \tag{29}$$

である。t に比例する項が永年項となっている。

4.1.3 $O(\epsilon^2)$

運動方程式は、

$$
\begin{aligned}
\dot{I}_j^{(2)} &= -\sum_{k=1}^{N}\left[\frac{\partial^2 V}{\partial I_k \partial \theta_j} I_k^{(1)} + \frac{\partial^2 V}{\partial \theta_k \partial \theta_j}\theta_k^{(1)}\right] \\
&= -\sum_{k=1}^{N}\sum_{n}\left[i n_j \frac{\partial \hat{V}_n}{\partial I_k} I_k^{(1)} + i n_j i n_k \hat{V}_n \theta_k^{(1)}\right] e^{i n\cdot\theta^{(0)}} \qquad (30)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\dot{\theta}_j^{(2)} &= \sum_{k=1}^{N}\left[\frac{\partial^2 V}{\partial I_k \partial I_j} I_k^{(1)} + \frac{\partial^2 V}{\partial \theta_k \partial I_j}\theta_k^{(1)}\right] \\
&= \sum_{k=1}^{N}\sum_{n}\left[\frac{\partial^2 \hat{V}_n}{\partial I_k \partial I_j} I_k^{(1)} + i n_k \frac{\partial \hat{V}_n}{\partial I_j}\theta_k^{(1)}\right] e^{i n\cdot\theta^{(0)}} \qquad (31)
\end{aligned}
$$

これらのうち、時間積分に関係する部分は

$$
\begin{aligned}
I_k^{(1)} e^{i n\cdot\theta^{(0)}} &= -\sum_{m:\mathrm{Res}} i m_k \hat{V}_m e^{i m\cdot\beta}\ t\ e^{i n\cdot\theta^{(0)}} \\
&\quad -\sum_{m:\mathrm{Non}} \frac{i m_k}{i m\cdot\omega}\hat{V}_m e^{i(m+n)\cdot\theta^{(0)}} \qquad (32)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\theta_k^{(1)} e^{i n\cdot\theta^{(0)}} &= \sum_{m:\mathrm{Res}} \frac{\partial \hat{V}_m}{\partial I_k} e^{i m\cdot\beta}\ t\ e^{i n\cdot\theta^{(0)}} \\
&\quad +\sum_{m:\mathrm{Non}} \frac{1}{i m\cdot\omega}\frac{\partial \hat{V}_m}{\partial I_k} e^{i(m+n)\cdot\theta^{(0)}} \qquad (33)
\end{aligned}
$$

であるから、これらを時間積分すると、

$$
\begin{aligned}
\sum_n \int dt\ I_k^{(1)} e^{in\cdot\theta^{(0)}} =& -\sum_{n:\mathrm{Res}} \sum_{m:\mathrm{Res}} im_k \hat{V}_m e^{i(m+n)\cdot\beta}\ \frac{t^2}{2} \\
&- \sum_{m+n:\mathrm{Res}} \sum_{m:\mathrm{Non}} \frac{im_k}{im\cdot\omega} \hat{V}_m\ t\ e^{i(m+n)\cdot\beta} \\
&- \sum_{n:\mathrm{Non}} \sum_{m:\mathrm{Res}} \frac{im_k}{in\cdot\omega} \hat{V}_m e^{im\cdot\beta} \left(t - \frac{1}{in\cdot\omega} \right) e^{in\cdot\theta^{(0)}} \\
&- \sum_{m+n:\mathrm{Non}} \sum_{m:\mathrm{Non}} \frac{im_k}{i(m\cdot\omega)(i(m+n)\cdot\omega)} \hat{V}_m e^{i(m+n)\cdot\theta^{(0)}}
\end{aligned}
\tag{34}
$$

$$
\begin{aligned}
\sum_n \int dt\ \theta_k^{(1)} e^{in\cdot\theta^{(0)}} =& \sum_{n:\mathrm{Res}} \sum_{m:\mathrm{Res}} \frac{\partial \hat{V}_m}{\partial I_k} e^{i(m+n)\cdot\beta}\ \frac{t^2}{2} \\
&+ \sum_{m+n:\mathrm{Res}} \sum_{m:\mathrm{Non}} \frac{1}{im\cdot\omega} \frac{\partial \hat{V}_m}{\partial I_k}\ t\ e^{i(m+n)\cdot\beta} \\
&+ \sum_{n:\mathrm{Non}} \sum_{m:\mathrm{Res}} \frac{1}{in\cdot\omega} \frac{\partial \hat{V}_m}{\partial I_k} e^{im\cdot\beta} \left(t - \frac{1}{in\cdot\omega} \right) e^{in\cdot\theta^{(0)}} \\
&+ \sum_{m+n:\mathrm{Non}} \sum_{m:\mathrm{Non}} \frac{1}{(im\cdot\omega)(i(m+n)\cdot\omega)} \frac{\partial \hat{V}_m}{\partial I_k} e^{i(m+n)\cdot\theta^{(0)}}
\end{aligned}
\tag{35}
$$

これらから、$O(\epsilon^2)$ の解が得られる。

4.2 作用・角変数による繰り込み群方程式

さて、繰り込み群方程式に寄与する永年項について考える。時間積分 (34) で得られた永年項のうち、$O(\epsilon^2)$ の t^2 に比例する項と高周波数成分 $te^{in\cdot\theta^{(0)}}$ (n : Non) は $O(\epsilon^1)$ の永年項、高周波数成分の係数にそれぞれ繰り込める。したがって、$O(\epsilon^0)$ の積分定数 α, β に対する繰り込み群方程式は以下のよう

になる。

$$
\begin{aligned}
\frac{d\alpha_j}{dt}(t) = &-\epsilon \sum_{n:\mathrm{Res}} in_j \hat{V}_n(\alpha) e^{in\cdot\beta} \\
&+ \epsilon^2 \sum_{k=1}^{N} \sum_{m+n:\mathrm{Res}} \sum_{m:\mathrm{Non}} \frac{in_j}{im\cdot\omega} \left[im_k \frac{\partial \hat{V}_n}{\partial \alpha_k} \hat{V}_m - in_k \hat{V}_n \frac{\partial \hat{V}_m}{\partial \alpha_k} \right] e^{i(m+n)\cdot\beta}
\end{aligned} \tag{36}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{d\beta_j}{dt}(t) = &\ \epsilon \sum_{n:\mathrm{Res}} \frac{\partial \hat{V}_n}{\partial \alpha_j}(\alpha) e^{in\cdot\beta} \\
&- \epsilon^2 \sum_{k=1}^{N} \sum_{m+n:\mathrm{Res}} \sum_{m:\mathrm{Non}} \frac{1}{im\cdot\omega} \left[im_k \frac{\partial^2 \hat{V}_n}{\partial \alpha_k \partial \alpha_j} \hat{V}_m - in_k \frac{\partial \hat{V}_n}{\partial \alpha_j} \frac{\partial \hat{V}_m}{\partial \alpha_k} \right] \\
&\times e^{i(m+n)\cdot\beta}
\end{aligned} \tag{37}
$$

4.3 繰り込み群方程式の変形

ここで、ちょっとした計算のトリックを使う。まず、次の関係に注意しよう。

$$
\begin{aligned}
m+n : \mathrm{Res} &\Longleftrightarrow (m+n)\cdot\omega = 0 \\
&\Longleftrightarrow n\cdot\omega = -m\cdot\omega \\
&\Longrightarrow [m : \mathrm{Non} \Leftrightarrow n : \mathrm{Non}]
\end{aligned}
$$

これを用いると、式(36)の $O(\epsilon^2)$ 項は

$$
\begin{aligned}
&\sum_{m+n:\mathrm{Res}} \sum_{m:\mathrm{Non}} \frac{in_j}{im\cdot\omega} \left\{ im_k \frac{\partial \hat{V}_n}{\partial \alpha_k} \hat{V}_m - in_k \hat{V}_n \frac{\partial \hat{V}_m}{\partial \alpha_k} \right] e^{i(m+n)\cdot\beta} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{m+n:\mathrm{Res}} \left\{ \sum_{m:\mathrm{Non}} \frac{in_j}{im\cdot\omega} \left[im_k \frac{\partial \hat{V}_n}{\partial \alpha_k} \hat{V}_m - in_k \hat{V}_n \frac{\partial \hat{V}_m}{\partial \alpha_k} \right] \right. \\
&\qquad \left. + \sum_{n:\mathrm{Non}} \frac{im_j}{in\cdot\omega} \left[in_k \frac{\partial \hat{V}_m}{\partial \alpha_k} \hat{V}_n - im_k \hat{V}_m \frac{\partial \hat{V}_n}{\partial \alpha_k} \right] \right\} e^{i(m+n)\cdot\beta} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{m+n:\mathrm{Res}} \sum_{m:\mathrm{Non}} \frac{i(m_j+n_j)}{im\cdot\omega} \left[im_k \frac{\partial \hat{V}_n}{\partial \alpha_k} \hat{V}_m - in_k \hat{V}_n \frac{\partial \hat{V}_m}{\partial \alpha_k} \right] e^{i(m+n)\cdot\beta} \\
&= \frac{\partial}{\partial \beta_j} \left\{ \frac{1}{2} \sum_{m+n:\mathrm{Res}} \sum_{m:\mathrm{Non}} \frac{1}{im\cdot\omega} \left[im_k \frac{\partial \hat{V}_n}{\partial \alpha_k} \hat{V}_m - in_k \hat{V}_n \frac{\partial \hat{V}_m}{\partial \alpha_k} \right] e^{i(m+n)\cdot\beta} \right\}
\end{aligned}
\tag{38}
$$

となり、式(37)の $O(\epsilon^1)$ の項は

$$
\begin{aligned}
&\sum_{m+n:\mathrm{Res}} \sum_{m:\mathrm{Non}} \frac{1}{im\cdot\omega} \left[im_k \frac{\partial^2 \hat{V}_n}{\partial \alpha_k \partial \alpha_j} \hat{V}_m - in_k \frac{\partial \hat{V}_n}{\partial \alpha_j} \frac{\partial \hat{V}_m}{\partial \alpha_k} \right] e^{i(m+n)\cdot\beta} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{m+n:\mathrm{Res}} \left\{ \sum_{m:\mathrm{Non}} \frac{1}{im\cdot\omega} \left[im_k \frac{\partial^2 \hat{V}_n}{\partial \alpha_k \partial \alpha_j} \hat{V}_m - in_k \frac{\partial \hat{V}_n}{\partial \alpha_j} \frac{\partial \hat{V}_m}{\partial \alpha_k} \right] \right. \\
&\qquad \left. + \sum_{n:\mathrm{Non}} \frac{1}{in\cdot\omega} \left[in_k \frac{\partial^2 \hat{V}_m}{\partial \alpha_k \partial \alpha_j} \hat{V}_n - im_k \frac{\partial \hat{V}_m}{\partial \alpha_j} \frac{\partial \hat{V}_n}{\partial \alpha_k} \right] \right\} e^{i(m+n)\cdot\beta} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{m+n:\mathrm{Res}} \sum_{m:\mathrm{Non}} \frac{1}{im\cdot\omega} \left[im_k \left(\frac{\partial^2 \hat{V}_n}{\partial \alpha_k \partial \alpha_j} \hat{V}_m + \frac{\partial \hat{V}_m}{\partial \alpha_j} \frac{\partial \hat{V}_n}{\partial \alpha_k} \right) \right. \\
&\qquad \left. - in_k \left(\frac{\partial \hat{V}_n}{\partial \alpha_j} \frac{\partial \hat{V}_m}{\partial \alpha_k} + \frac{\partial^2 \hat{V}_m}{\partial \alpha_k \partial \alpha_j} \hat{V}_n \right) \right] e^{i(m+n)\omega} \\
&= \frac{\partial}{\partial \alpha_j} \left\{ \frac{1}{2} \sum_{m+n:\mathrm{Res}} \sum_{m:\mathrm{Non}} \frac{1}{im\cdot\omega} \left[im_k \frac{\partial \hat{V}_n}{\partial \alpha_k} \hat{V}_m - in_k \hat{V}_n \frac{\partial \hat{V}_m}{\partial \alpha_k} \right] e^{i(m+n)\omega} \right\}
\end{aligned}
\tag{39}
$$

となる。以上により、繰り込み群方程式(36)(37)は

$$\frac{d\alpha_j}{dt}(t) = -\frac{\partial}{\partial\beta_j}\left\{\epsilon\sum_{n:\mathrm{Res}}\hat{V}_n(\alpha)e^{in\cdot\beta}\right.$$
$$\left.-\frac{\epsilon^2}{2}\sum_{m+n:\mathrm{Res}}\sum_{m:\mathrm{Non}}\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{im\cdot\omega}\left[im_k\frac{\partial\hat{V}_n}{\partial\alpha_k}\hat{V}_m - in_k\hat{V}_n\frac{\partial\hat{V}_m}{\partial\alpha_k}\right]e^{i(m+n)\cdot\beta}\right\} \tag{40}$$
$$\frac{d\beta_j}{dt}(t) = \frac{\partial}{\partial\alpha_j}\left\{\epsilon\sum_{n:\mathrm{Res}}\hat{V}_n(\alpha)e^{in\cdot\beta}\right.$$
$$\left.-\frac{\epsilon^2}{2}\sum_{m+n:\mathrm{Res}}\sum_{m:\mathrm{Non}}\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{im\cdot\omega}\left[im_k\frac{\partial\hat{V}_n}{\partial\alpha_k}\hat{V}_m - in_k\hat{V}_n\frac{\partial\hat{V}_m}{\partial\alpha_k}\right]e^{i(m+n)\cdot\beta}\right\} \tag{41}$$

となり、この系は

$$H^{\mathrm{RG}}(\alpha,\beta) = \epsilon\sum_{n:\mathrm{Res}}\hat{V}_n(\alpha)e^{in\cdot\beta}$$
$$-\frac{\epsilon^2}{2}\sum_{m+n:\mathrm{Res}}\sum_{m:\mathrm{Non}}\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{im\cdot\omega}\left[im_k\frac{\partial\hat{V}_n}{\partial\alpha_k}\hat{V}_m - in_k\hat{V}_n\frac{\partial\hat{V}_m}{\partial\alpha_k}\right]e^{i(m+n)\cdot\beta} \tag{42}$$

をハミルトニアンとして持つハミルトン系である。■

5 変数の取り方による正準性の有無について

第3節と第4節において、元の系を正準変換しただけであるにもかかわらず、繰り込み群の性質が変わってしまうことを見た。本節では、この原因について考察する。ここでは、位置座標 q から繰り込み群方程式を構成する方法を q-RG 法、作用・角変数から構成する方法を (I,θ)-RG 法と呼ぶ。q-RG 法では、正準性は $O(\epsilon^2)$ で破れるから、それぞれの $O(\epsilon^2)$ の解の構成の仕方から振り返って見よう。

5.1 q-RG 法における $O(\epsilon^2)$ の解の構成

運動方程式は、

$$\frac{d^2q_j^{(2)}}{dt^2} + q_j^{(2)} = -\sum_{k=1}^{N}\frac{\partial^2 V}{\partial q_k\partial q_j}q_k^{(1)} \tag{43}$$

であり、この解は積分形式で次のように書ける。

$$q_j^{(2)} = \int^t ds \sin(t-s) \left[-\sum_{k=1}^{N} \frac{\partial^2 V}{\partial q_k \partial q_j}(s) q_k^{(1)}(s) \right] \tag{44}$$

ただし、$N=2$ とする。ここで、右辺の $[\cdot]$ の中から永年項を生み出す項を拾い集めると、

$$(F_j\ s\ + G_j)e^{is} + \text{c.c.(complex conjugate)} \tag{45}$$

となる。ここで、F_j を含む項は $O(\epsilon^1)$ の永年項に、G_j を含む項は非永年項に起因していることに注意しておく。これらから、 $O(\epsilon^2)$ の永年項は

$$F_j \left[\frac{1}{4i}\ t^2\ e^{it} - \left(\frac{1}{2i} \right)^2\ t\ e^{it} \right] + G_j \frac{1}{2i}\ t\ e^{it} + \text{c.c.} \tag{46}$$

となる。これらの項のうち、t^2 に比例する項は $O(\epsilon^1)$ の永年項の係数に繰り込め、また G_j に比例する項は正準性を保つことが簡単な計算によって確かめられる。よって、$O(\epsilon^2)$ で正準性を破っているのは、$O(\epsilon^1)$ の永年項から生まれた、t に比例する永年項である。

5.2 (I,θ)-RG 法における $O(\epsilon^2)$ の解の構成

運動方程式は、

$$\begin{aligned} \dot{I}_j^{(2)} &= -\sum_{k=1}^{N} \left[\frac{\partial^2 V}{\partial I_k \partial \theta_j} I_k^{(1)} + \frac{\partial^2 V}{\partial \theta_k \partial \theta_j} \theta_k^{(1)} \right] = F_j^{(I)} t + G_j^{(I)} + \text{others} \\ \dot{\theta}_j^{(2)} &= \sum_{k=1}^{N} \left[\frac{\partial^2 V}{\partial I_k \partial I_j} I_k^{(1)} + \frac{\partial^2 V}{\partial \theta_k \partial I_j} \theta_k^{(1)} \right] = F_j^{(\theta)} t + G_j^{(\theta)} + \text{others} \end{aligned} \tag{47}$$

であり、$F_j^{(I)}, F_j^{(\theta)}$ は $O(\epsilon^1)$ の永年項に、$G_j^{(I)}, G_j^{(\theta)}$ は非永年項に起因する項である。この運動方程式を積分すると、

$$\begin{aligned} I_j^{(2)} &= F_j^{(I)} \frac{1}{2}\ t^2 + G_j^{(I)}\ t \\ \theta_j^{(2)} &= F_j^{(\theta)} \frac{1}{2}\ t^2 + G_j^{(\theta)}\ t \end{aligned} \tag{48}$$

となるが、q-RG 法の時と同様に、t^2 の項は $O(\epsilon^1)$ の永年項の係数に繰り込め、$G_j^{(I)}, G_j^{(\theta)}$ に比例する項は正準性を保つ。したがって、(I,θ)-RG 法の場合には任意の摂動ポテンシャル V に対して、繰り込み群方程式は $O(\epsilon^2)$ までハミルトン系になる。

5.3　2つの方法の比較

q-RG 法と (I,θ)-RG 法との違いは、表1からも分かる通り、$O(\epsilon^1)$ の永年項から生まれる $O(\epsilon^2)$ の t に比例する永年項が存在するか否かであり、この違いは運動方程式を積分するときの核に起因している。つまり、

$$q\text{-RG 法} \;:\; \int^t ds\ \sin(t-s) \times [\text{運動方程式の右辺}](s) \tag{49}$$

$$(I,\theta)\text{-RG 法} \;:\; \int^t ds\ 1 \times [\text{運動方程式の右辺}](s) \tag{50}$$

の様に、q-RG 法では核は $\sin(t-s)$ であるが、(I,θ)-RG 法では核は 1 になっている。結局、作用・角変数という取り方が特別なわけではなく、適当な積分核を与える変数ならば繰り込み群方程式はハミルトン系になる。実際、

$$\begin{aligned} q &= \tilde{q}\cos t + \tilde{p}\sin t \\ p &= -\tilde{q}\sin t + \tilde{p}\cos t \end{aligned} \tag{51}$$

と正準変換し、$(\tilde{q},\tilde{p})$ から得られる繰り込み群方程式はハミルトン系になることがわかる。

$O(\epsilon^1)$	$O(\epsilon^2)$	
	q-RG 法	(I,θ)-RG 法
$F\,t$	$F\,t^2/2$	$F\,t^2/2$
	$F\,t$ (★)	−
G	$G\,t$	$G\,t$

表 1: q-RG 法と (I,θ)-RG 法の永年項の比較。$O(\epsilon^2)$ の各永年項が $O(\epsilon^1)$ のどの項に起因するかを概略的に示した。各項の比例係数は無視している。(★) で示した項が繰り込み群方程式の正準性を破っている。

6　繰り込み群方程式と正準摂動論

第4節により、作用・角変数で運動方程式を書くとそれに対する繰り込み群方程式は必ずハミルトン系になることがわかった。正準性を保つ摂動法としては、他に正準摂動論 [13, 14]があるので、本節では (I,θ)-RG 法と正準摂動論との関係を調べる。まずは正準摂動論についての概説を行った後、

正準摂動論をわれわれの系に対して適用し、その結果得られる Reduce されたハミルトニアンを (I,θ)-RG 法で得られたハミルトニアンと比較する。

6.1 正準摂動論の概説

正準摂動論とは、変数を正準変換することによって「解きやすく」する方法である。変換の具体的な形は生成子 $S(I^*,\theta^*)$ を用いて

$$I_j = I_j^* + \epsilon \left\{I_j^*, S\right\} + \frac{\epsilon^2}{2}\left\{\left\{I_j^*, S\right\}, S\right\} \tag{52}$$

$$\theta_j = \theta_j^* + \epsilon \left\{\theta_j^*, S\right\} + \frac{\epsilon^2}{2}\left\{\left\{\theta_j^*, S\right\}, S\right\} \tag{53}$$

と書ける。ここに、$\{\cdot,\cdot\}$ はポアソン括弧

$$\{f,g\} := \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial \theta_k^*}\frac{\partial g}{\partial I_k^*} - \frac{\partial f}{\partial I_k^*}\frac{\partial g}{\partial \theta_k^*} \tag{54}$$

である。

生成子 S を ϵ で展開して、

$$S = S_1(I^*,\theta^*) + \epsilon S_2(I^*,\theta^*) + \cdots \tag{55}$$

とすると、変換後の新しいハミルトニアンも ϵ 展開で書けて、

$$H^*(I^*,\theta^*) = H_0^*(I^*,\theta^*) + \epsilon H_1^*(I^*,\theta^*) + \epsilon^2 H_2^*(I^*,\theta^*) + \cdots \tag{56}$$

となる。H_n^* の形は、

$$H_0^* = H_0(I^*) \tag{57}$$

$$H_1^* = < V(I^*,\theta^*) >_\tau \tag{58}$$

$$H_2^* = < F_2 >_\tau \tag{59}$$

ここに、$<\cdot>_\tau$ は H_0^* の時間 τ による平均を表し、

$$F_2 := \{V, S_1\} + \frac{1}{2}\{\{H_0, S_1\}, S_1\} \tag{60}$$

$$S_1 = \int d\tau\,(V - < V >_\tau) \tag{61}$$

$$S_2 = \int d\tau\,(F_2 - < F_2 >_\tau) \tag{62}$$

である。

6.2 変換されたハミルトニアンの構成

それでは、系 (14) に対して、H_0^*, H_1^*, H_2^* を求めて見よう。

6.2.1 $O(\epsilon^0)$

$$H_0^*(I^*) = H_0(I^*) \tag{63}$$

これにより、I^*, θ^* の H_0^* による時間発展は

$$I_j^* = \alpha_j \tag{64}$$

$$\theta_j^* = \omega_j \tau + \beta_j, \qquad \omega_j := \frac{\partial H_0^*}{\partial I_j^*}(I^*) \tag{65}$$

6.2.2 $O(\epsilon^1)$

$$\begin{aligned} H_1^* &=< V(I^*, \theta^*) >_\tau \\ &= \sum_n \hat{V}_n(\alpha) < e^{in\cdot(\omega\tau+\beta)} >_\tau \\ &= \sum_{n:\mathrm{Res}} \hat{V}_n(I^*) e^{in\cdot\theta^*} \end{aligned} \tag{66}$$

ここに、共鳴している n に対しては $n \cdot \beta = n \cdot \theta^*$ となることを用いた。一方、S_1 は

$$\begin{aligned} S_1 &= \int d\tau \left(V(I^*, \theta^*) - < V(I^*, \theta^*) >_\tau \right) \\ &= \int d\tau \sum_{n:\mathrm{Non}} \hat{V}_n(I^*) e^{in\cdot\theta^*} \\ &= \sum_{n:\mathrm{Non}} \frac{1}{in\cdot\omega} \hat{V}_n(I^*) e^{in\cdot\theta^*} \end{aligned} \tag{67}$$

6.2.3 $O(\epsilon^2)$

$$
\begin{aligned}
\{V, S_1\} &= \sum_{k=1}^{N}\sum_{n}\left[\frac{\partial(\hat{V}_n e^{in\cdot\theta^*})}{\partial\theta_k^*}\frac{\partial S_1}{\partial I_k^*} - \frac{\partial(\hat{V}_n e^{in\cdot\theta^*})}{\partial I_k^*}\frac{\partial S_1}{\partial\theta_k^*}\right] \\
&= \sum_{k=1}^{N}\sum_{n}\sum_{m:\mathrm{Non}}\frac{1}{im\cdot\omega}\left[in_k\hat{V}_n\frac{\partial\hat{V}_m}{\partial I_k^*} - im_k\frac{\partial\hat{V}_n}{\partial I_k^*}\hat{V}_m\right]e^{i(m+n)\cdot\theta^*} \qquad (68)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\{\{H_0, S_1\}, S_1\} \\
&= -\sum_{k=1}^{N}\left[\frac{\partial}{\partial\theta_k^*}\left(\sum_{n:\mathrm{Non}}\hat{V}_n e^{in\cdot\theta^*}\right)\frac{\partial S_1}{\partial I_k^*} - \frac{\partial}{\partial I_k^*}\left(\sum_{n:\mathrm{Non}}\hat{V}_n e^{in\cdot\theta^*}\right)\frac{\partial S_1}{\partial\theta_k^*}\right] \\
&= \sum_{k=1}^{N}\sum_{n:\mathrm{Non}}\sum_{m:\mathrm{Non}}\frac{1}{im\cdot\omega}\left(im_k\frac{\partial\hat{V}_n}{\partial I_k^*}\hat{V}_m - in_k\hat{V}_n\frac{\partial\hat{V}_m}{\partial I_k^*}\right)e^{i(m+n)\theta^*} \qquad (69)
\end{aligned}
$$

これらより、

$$
\begin{aligned}
F_2 &= \{V, S_1\} + \frac{1}{2}\{\{H_0, S_1\}, S_1\} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\sum_{n:\mathrm{Non}}\sum_{m:\mathrm{Non}}\frac{1}{im\cdot\omega}\left(in_k\hat{V}_n\frac{\partial\hat{V}_m}{\partial I_k^*} - im_k\frac{\partial\hat{V}_n}{\partial I_k^*}\hat{V}_m\right)e^{i(m+n)\cdot\theta^*} \\
&\quad + \sum_{k=1}^{N}\sum_{n:\mathrm{Res}}\sum_{m:\mathrm{Non}}\frac{1}{im\cdot\omega}\left(in_k\hat{V}_n\frac{\partial\hat{V}_m}{\partial I_k^*} - im_k\frac{\partial\hat{V}_n}{\partial I_k^*}\hat{V}_m\right)e^{i(m+n)\cdot\theta^*} \qquad (70)
\end{aligned}
$$

ここで、

$$
m : \mathrm{Non}\text{かつ}\, n : \mathrm{Res} \Longrightarrow m + n : \mathrm{Non}
$$

に気をつけると、H_2^* に第２項からの寄与はなく、

$$
\begin{aligned}
H_2^* &= < F_2 >_\tau \\
&= -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\sum_{m+n:\mathrm{Res}}\sum_{m:\mathrm{Non}}\frac{1}{im\cdot\omega}\left(im_k\frac{\partial\hat{V}_n}{\partial I_k^*}\hat{V}_m - in_k\hat{V}_n\frac{\partial\hat{V}_m}{\partial I_k^*}\right)e^{i(m+n)\cdot\theta^*}
\end{aligned}
$$

(71)

$$S_2 = \int d\tau \, (F_2 - < F_2 >_\tau)$$
$$= \sum_{k=1}^{N} \sum_{m:\mathrm{Non}} \left(\frac{1}{2} \sum_{m+n:\mathrm{Non}, n:\mathrm{Non}} + \sum_{m+n:\mathrm{Non}} \right) \frac{1}{(im \cdot \omega)(i(m+n) \cdot \omega)}$$
$$\times \left(in_k \hat{V}_n \frac{\partial \hat{V}_m}{\partial I_k^*} - im_k \frac{\partial \hat{V}_n}{\partial I_k^*} \hat{V}_m \right) e^{i(m+n)\cdot\theta^*} \tag{72}$$

となる。

6.3 正準摂動論のまとめ

$O(\epsilon^2)$ までの変換されたハミルトニアン $H^*(I^*, \theta^*)$ と、変換の生成子 $S(I^*, \theta^*)$ は次のようになる。

$$H^*(I^*, \theta^*) = H_0(I^*) + \epsilon \sum_{n:\mathrm{Res}} \hat{V}_n(I^*) e^{in\cdot\theta^*}$$
$$- \frac{\epsilon^2}{2} \sum_{m+n:\mathrm{Res}} \sum_{m:\mathrm{Non}} \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{im \cdot \omega} \left(im_k \frac{\partial \hat{V}_n}{\partial I_k^*} \hat{V}_m - in_k \hat{V}_n \frac{\partial \hat{V}_m}{\partial I_k^*} \right) e^{i(m+n)\cdot\theta^*} \tag{73}$$

$$S = \sum_{n:\mathrm{Non}} \frac{1}{in \cdot \omega} \hat{V}_n(I^*) e^{in\cdot\theta^*}$$
$$+ \epsilon \sum_{k=1}^{N} \sum_{m:\mathrm{Non}} \left(\frac{1}{2} \sum_{m+n:\mathrm{Non}, n:\mathrm{Non}} + \sum_{m+n:\mathrm{Non}} \right) \frac{1}{(im \cdot \omega)(i(m+n) \cdot \omega)}$$
$$\times \left(in_k \hat{V}_n \frac{\partial \hat{V}_m}{\partial I_k^*} - im_k \frac{\partial \hat{V}_n}{\partial I_k^*} \hat{V}_m \right) e^{i(m+n)\cdot\theta^*} \tag{74}$$

6.4 (I, θ)-RG 法との比較

ここでは系の回転数を用いて正準摂動論と (I, θ)-RG 法を比較しよう。考えることは、同じ初期条件を与えたときに、回転数が一致するか否かである。回転数 Ω_j を次のように定義する。

$$\Omega_j := \lim_{t \to \infty} \frac{\theta_j(t)}{t} \tag{75}$$

θ_j が 0 次の場合は、$\Omega_j = \omega_j$ となる。まず、θ_j と、後に使う I_j をあからさまに書いておく。

● (I,θ)**-RG 法の** I_j, θ_j

(I,θ)-RG 法から得られる $O(\epsilon^2)$ までの解は次の通り。

$$
\begin{aligned}
I_j = \alpha_j &- \epsilon \sum_{n:\mathrm{Non}} \frac{in_j}{in\cdot\omega} \hat{V}_n(\alpha) e^{in\cdot(\omega t+\beta)} \\
&+ \epsilon^2 \Bigg[-\sum_{k=1}^{N} \sum_{n:\mathrm{Non}} \sum_{m:\mathrm{Res}} \frac{in_j}{(in\cdot\omega)^2} \left(im_k \frac{\partial \hat{V}_n}{\partial I_k} \hat{V}_m - in_k \hat{V}_n \frac{\partial \hat{V}_m}{\partial I_k} \right) e^{i(m+n)\cdot(\omega t+\beta)} \\
&+ \sum_{k=1}^{N} \sum_{m+n:\mathrm{Non}} \sum_{m:\mathrm{Non}} \frac{in_j}{(im\cdot\omega)(i(m+n)\cdot\omega)} \\
&\qquad \times \left(im_k \frac{\partial \hat{V}_n}{\partial I_k} \hat{V}_m - in_k \hat{V}_n \frac{\partial \hat{V}_m}{\partial I_k} \right) e^{i(m+n)\cdot(\omega t+\beta)} \Bigg]
\end{aligned}
\tag{76}
$$

$$
\begin{aligned}
\theta_j = \omega_j\, t + \beta_j(t) &+ \epsilon \sum_{n:\mathrm{Non}} \frac{1}{in\cdot\omega} \frac{\partial \hat{V}_n}{\partial I_j}(\alpha) e^{in\cdot(\omega t+\beta)} \\
&+ \epsilon^2 \Bigg[\sum_{k=1}^{N} \sum_{n:\mathrm{Non}} \sum_{m:\mathrm{Res}} \frac{1}{(in\cdot\omega)^2} \left(im_k \frac{\partial^2 \hat{V}_n}{\partial I_k \partial I_j} \hat{V}_m - in_k \frac{\partial \hat{V}_n}{\partial I_j} \frac{\partial \hat{V}_m}{\partial I_k} \right) e^{i(m+n)\cdot(\omega t+\beta)} \\
&- \sum_{k=1}^{N} \sum_{m+n:\mathrm{Non}} \sum_{m:\mathrm{Non}} \frac{1}{(im\cdot\omega)(i(m+n)\cdot\omega)} \\
&\qquad \times \left(im_k \frac{\partial^2 \hat{V}_n}{\partial I_k \partial I_j} \hat{V}_m - in_k \frac{\partial \hat{V}_n}{\partial I_j} \frac{\partial \hat{V}_m}{\partial I_k} \right) e^{i(m+n)\cdot(\omega t+\beta)} \Bigg]
\end{aligned}
\tag{77}
$$

ここで、α_j, β_j はハミルトニアン (42) に従う変数である。

● 正準摂動論 の I_j, θ_j

正準摂動論から得られる $O(\epsilon^2)$ までの I_j, θ_j は次の通り。

$$
\begin{aligned}
I_j = I_j^* &- \epsilon \sum_{n:\mathrm{Non}} \frac{in_j}{in\cdot\omega}\hat{V}_n(I^*)e^{in\cdot\theta_j^*} \\
&+ \epsilon^2 \left[\sum_{k=1}^{N}\sum_{m:\mathrm{Non}}\left(\frac{1}{2}\sum_{m+n:\mathrm{Non},n:\mathrm{Non}} + \sum_{m+n:\mathrm{Non}}\right)\frac{i(m_j+n_j)}{(im\cdot\omega)(i(m+n)\cdot\omega)}\right. \\
&\qquad\qquad \times \left(im_k\frac{\partial\hat{V}_n}{\partial I_k^*}\hat{V}_m - in_k\hat{V}_n\frac{\partial\hat{V}_m}{\partial I_k^*}\right)e^{i(m+n)\cdot\theta^*} \\
&\left. + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\sum_{m:\mathrm{Non}}\sum_{n:\mathrm{Non}}\frac{im_j}{(im\cdot\omega)(in\cdot\omega)}\left(im_k\frac{\partial\hat{V}_n}{\partial I_k^*}\hat{V}_m - in_k\hat{V}_n\frac{\partial\hat{V}_m}{\partial I_k^*}\right)e^{i(m+n)\cdot\theta^*}\right]
\end{aligned}
\tag{78}
$$

$$
\begin{aligned}
\theta_j = \theta_j^* &+ \epsilon\sum_{n:\mathrm{Non}}\frac{1}{in\cdot\omega}\frac{\partial\hat{V}_n}{\partial I_j^*}(I^*)e^{in\cdot\theta_j^*} \\
&+ \epsilon^2\left\{-\sum_{k=1}^{N}\sum_{m:\mathrm{Non}}\left(\frac{1}{2}\sum_{m+n:\mathrm{Non},n:\mathrm{Non}} + \sum_{m+n:\mathrm{Non}}\right)\frac{1}{(im\cdot\omega)(i(m+n)\cdot\omega)}\right. \\
&\times\left[im_k\left(\frac{\partial^2\hat{V}_n}{\partial I_k^*\partial I_j^*}\hat{V}_m + \frac{\partial\hat{V}_n}{\partial I_k^*}\frac{\partial\hat{V}_m}{\partial I_j^*}\right) - in_k\left(\frac{\partial\hat{V}_n}{\partial I_j^*}\frac{\partial\hat{V}_m}{\partial I_k^*} + \hat{V}_n\frac{\partial^2\hat{V}_m}{\partial I_k^*\partial I_j^*}\right)\right]e^{i(m+n)\cdot\theta^*} \\
&\left. + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\sum_{m:\mathrm{Non}}\sum_{n:\mathrm{Non}}\frac{1}{(im\cdot\omega)(in\cdot\omega)}\left(im_k\frac{\partial\hat{V}_n}{\partial I_k^*}\frac{\partial\hat{V}_m}{\partial I_j^*} - in_k\hat{V}_n\frac{\partial^2\hat{V}_m}{\partial I_k^*\partial I_j^*}\right)e^{i(m+n)\cdot\theta^*}\right\}
\end{aligned}
\tag{79}
$$

ここで、I_j^*, θ_j^* はハミルトニアン (73) に従う変数である。

さて、どちらの方法でも $\theta_j(t)$ の $O(\epsilon^1)$, $O(\epsilon^2)$ の項は振動しているだけなので回転数には寄与しない。結局 (I,θ)-RG 法、正準摂動論の回転数 Ω_j^{RG},Ω_j^{CP} はそれぞれ次のようになる。

$$\Omega_j^{\mathrm{RG}}(\alpha_0,\beta_0)=\omega_j+\lim_{t\to\infty}\frac{\beta_j(t)}{t}=\lim_{t\to\infty}\frac{\tilde\beta_j(t)}{t} \tag{80}$$

$$\Omega_j^{\mathrm{CP}}(I_0^*,\theta_0^*)=\lim_{t\to\infty}\frac{\theta_j^*(t)}{t} \tag{81}$$

ただし、左辺の引数 $\alpha_0,\beta_0,I_0^*,\theta_0^*$ はそれぞれの変数の $t=0$ での初期値を表すベクトルである。また、

$$\tilde\beta_j(t):=\omega_j t+\beta_j(t) \tag{82}$$

であり、新しい変数 $\tilde\beta$ は α とともにハミルトニアン

$$H(\alpha,\tilde\beta)=H_0(\alpha)+H^{\mathrm{RG}}(\alpha,\tilde\beta) \tag{83}$$

に従う変数である。式 (42) と (73) からこのハミルトニアンは、(I^*,θ^*) が従うハミルトニアン $H^*(I^*,\theta^*)$ と

$$H^*(I^*,\theta^*)=H_0(I^*)+H^{\mathrm{RG}}(I^*,\theta^*) \tag{84}$$

なる関係にあるから、

$$\begin{cases} I_0^*=\alpha_0 \\ \theta_0^*=\tilde\beta_0=\beta_0 \end{cases} \tag{85}$$

なるとき、Ω_j^{RG} と Ω_j^{CP} は同一の値となる。しかし、式 (76)-(79) をみると、$O(\epsilon^1)$ と $O(\epsilon^2)$ の高周波成分 $e^{in\cdot\theta^{(0)}}$,$e^{i(m+n)\cdot\theta^{(0)}}$ があるために、式 (85) が成り立っていても I,θ の初期値が一致するとは限らない。そこで、双方の方法で I,θ の初期値を一致させた時に式 (85) が成り立つかどうかを見てみよう。

I,θ の初期条件 I_0,θ_0 を固定し、この初期条件を与えるように α_0,β_0 (もしくは I_0^*,θ_0^*) を決定してやる。式 (76)-(77) よりその条件式は、

$$\begin{aligned} I_0&=\alpha_0+\epsilon f^{(1)}(\alpha_0,\beta_0)+\epsilon^2 f^{(2)}(\alpha_0,\beta_0)+\dots \\ \theta_0&=\beta_0+\epsilon g^{(1)}(\alpha_0,\beta_0)+\epsilon^2 g^{(2)}(\alpha_0,\beta_0)+\dots \end{aligned} \tag{86}$$

ただし、$f^{(j)}, g^{(j)}, (j=1,2)$ は式(76)-(77)から与えられる。

これを逆に解くために、α_0, β_0 を ϵ の冪に展開する。

$$\begin{aligned}\alpha_0 &= \alpha_0^{(0)} + \epsilon\alpha_0^{(1)} + \epsilon^2\alpha_0^{(2)} + \dots \\ \beta_0 &= \beta_0^{(0)} + \epsilon\beta_0^{(1)} + \epsilon^2\beta_0^{(2)} + \dots\end{aligned} \tag{87}$$

回転数 $\Omega(\alpha_0, \beta_0)$ も ϵ の冪に展開すると、

$$\begin{aligned}\Omega(\alpha_0, \beta_0) &= \omega + \epsilon\Omega^{(1)}(\alpha_0, \beta_0) + \epsilon\Omega^{(2)}(\alpha_0, \beta_0) + \dots \\ &= \omega + \epsilon\Omega^{(1)}(\alpha_0^{(0)} + \epsilon\alpha_0^{(1)}, \beta_0^{(0)} + \epsilon\beta_0^{(1)}) + \Omega^{(2)}(\alpha_0^{(0)}, \beta_0^{(0)}) + O(\epsilon^3)\end{aligned} \tag{88}$$

これより、$O(\epsilon^2)$ までの回転数が一致するためには、$O(\epsilon^1)$ までの α_0, β_0 を見れば良いことが分かる。式(86)を逆に解くと、

$$\alpha_0^{(0)} = I_0, \tag{89}$$

$$\beta_0^{(0)} = \theta_0, \tag{90}$$

$$\alpha_0^{(1)} = -f^{(1)}(\alpha_0^{(0)}, \beta_0^{(0)}) \tag{91}$$

$$\beta_0^{(1)} = -g^{(1)}(\alpha_0^{(0)}, \beta_0^{(0)}) \tag{92}$$

となる。同様に I^*, θ^* も求まり、これらの関数形は式(89)-(92)と同じ形になる。ここに、$f^{(1)}, g^{(1)}$ は解(76)-(77)において $t=0$ として得られる関数であるが、$O(\epsilon^1)$ までは (I,θ)-RG 法と正準摂動論とで解が完全に一致しているので、双方の間で違いは生じない。以上により、同一の初期条件に対して回転数 Ω^{RG} と Ω^{CP} は $O(\epsilon^2)$ まで一致することがわかった。

7 何を近似しているか

ここまで、q-RG 法、(I,θ)-RG 法、正準摂動論と3つの近似法を見て来たが、これらは何を近似しているのだろうか？ここでは簡単な系で数値計算をした結果を示し、それぞれが近似しているものは何かを考察する。

考える系は、

$$H = \frac{1}{2}(p^2 + q^2) + \frac{\epsilon}{4}q^4 \tag{93}$$

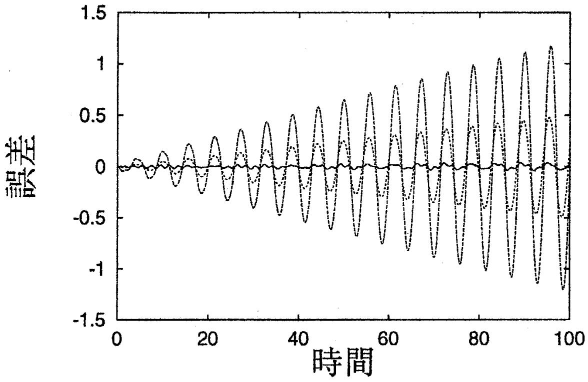
である。この系で、

$$\begin{aligned} \epsilon &= 0.3 \\ q(0) &= 1 \\ p(0) &= 0 \end{aligned}$$

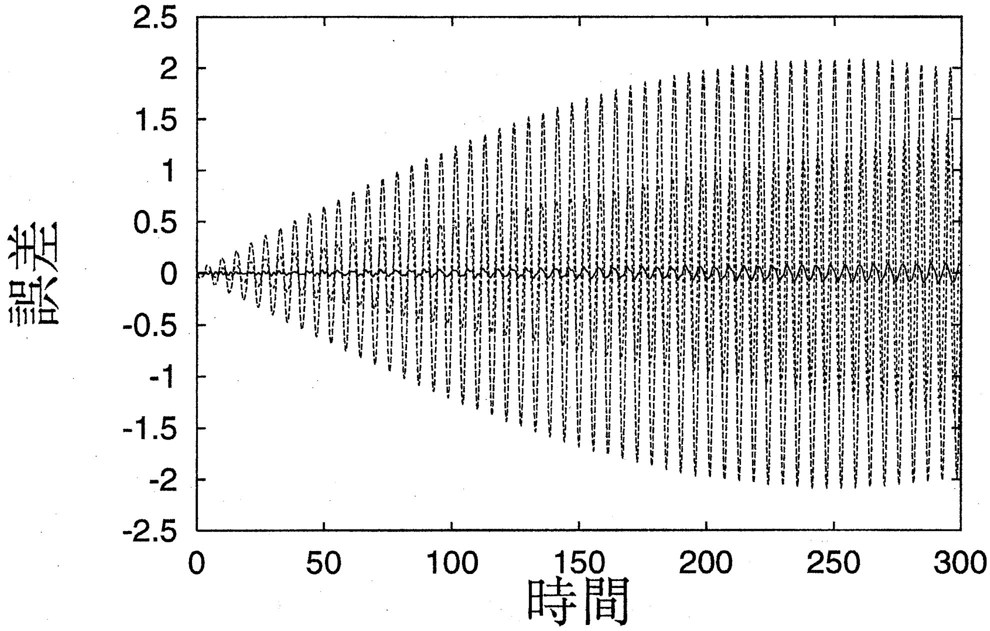
として、3つの近似法から得られた $O(\epsilon^2)$ の近似解 $q(t)$ と 4 次の symplectic integrator [19] によって得られる数値解との誤差を図 1 に示した。

まず、正準摂動論と (I,θ)-RG 法による誤差は、短時間では線形に大きくなっており、その振動は単一の振動数で書かれている。ここで、例えば厳密解が $\sin \omega t$ のとき、振動数だけに $\Delta\omega$ の誤差を持った近似解 $\sin(\omega + \Delta\omega)t$ の誤差は短時間では $-\Delta\omega t \cos(\omega t)$ となり、これらの近似法の誤差と同様の振舞をする。よってこれらの近似法で近似しているのは振動数 (もしくは回転数) と考えられる。長時間では誤差の振幅が押えられていることにも注意されたい (図 1(b))。今の場合に $\Delta\omega$ を見積もると、誤差の大きい (I,θ)-RG 法でも $\Delta\omega \sim 0.012$ 程度であり、これは $\epsilon^3 = 0.027$ のオーダーである。

一方、q-RG 法による誤差は振幅は小さいが、その振動は単一の振動数では書けない複雑なものとなっている (図 2)。従って、q-RG 法では振動数 (もしくは回転数) の近似は良くないが $|q(t)|$ をなるべく近似するような近似法であると言える。



(a) 短時間の振舞



(b) 長時間の振舞

図 1: 3 つの近似法と数値解との誤差。(a) 振幅の小さい方からそれぞれ、q-RG 法、正準摂動論、(I, θ)-RG 法と数値解との誤差である。(b) 長時間の振舞を見ると、誤差の拡大が押えられている様子が見られる。

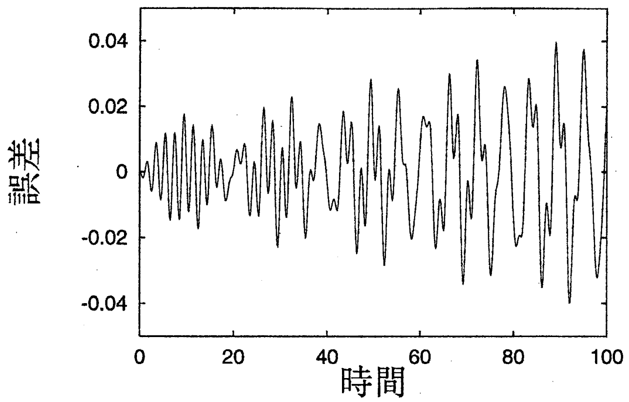


図 2: q-RG 法による数値解との誤差。図 1(a) から縦軸のスケールを変えた。振幅は小さいが複雑な振動をしている様子が見られる。

8 まとめ

微分方程式に対して大域的な解を得るための手法として最近提唱された繰り込み群の方法をハミルトン系に適用した時、Reduce された方程式である繰り込み群方程式がハミルトン系であるかどうかを調べた。考えた系は、調和振動子に摂動的なポテンシャルが加わった系である。この結果、次のことたちを示した。

1. 位置座標 q の運動方程式から作った $O(\epsilon^2)$ までの繰り込み群方程式は元の系が座標回転によって変数分離可能な時、その時に限りハミルトン系になる (2 自由度)
2. 上の時、正準性を壊すのは $O(\epsilon^1)$ の永年項から生まれる $O(\epsilon^2)$ の t に比例する永年項である
3. 作用・角変数 (I, θ) から作った繰り込み群方程式は任意の系に対していつでもハミルトン系になる (N 自由度)
4. 上の時、角変数 θ の回転数は正準摂動論で得られるものと $O(\epsilon^2)$ まで一致する
5. 位置座標からの繰り込み群方程式は振幅を、作用・角変数からの繰り込み群方程式と正準摂動論は回転数をより良く近似することを示唆した

これらの項目の一般化を議論しよう。まず、1. と 2. は本質的に 1 自由度の時、その時に限り正準性が保たれるという主張であるから、N 自由度系にしたときも成り立つと予想している。また、4. において可積分部分を

調和振動子から一般の系にしたり、近似の精度を $O(\epsilon^3)$ 以上にすると、この主張はなりたたない。なぜならば、$O(\epsilon^2)$ まで双方の解が一致することが要求されるが、これは成り立たないからである。

最後に、繰り込み群の方法の利点と限界に付いて述べる。結果の 5. からも分かる通り、近似法を変えると「よく近似されるもの」が変わってしまうのである。繰り込み群の方法は小さいパラメータ ϵ のスケールが自動的に導出できるという利点があるが、変数をどのようにとるかということは近似したい量に合わせて非自動的に設定してやらなければならないのである。

参考文献

[1] Karney C F F 1983 Long time correlations in the stochastic regime *Physica* **8D** 360

[2] Chirikov B V and Shepelyansky D L 1984 Correlation properties of dynamical chaos in Hamiltonian systems *Physica* **13D** 395

[3] Baba A, Hirata Y, Saito S and Ohmine I 1997 Fluctuation, relaxation and rearrangement dynamics of a model $(H_2O)_{20}$ cluster: Non-statistical dynamical behavior *J. Chem. Phys.* **106** 3329-37 and references therein

[4] Yamaguchi Y Y 1997 Second order phase transition in a highly chaotic Hamiltonian system with many degrees of freedom *Int. J. Bif. Chaos* **7** 839-47

[5] Kolmogorov A N 1954 *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **98** 527; Arnold V I 1963 *Russ. Math. Surv.* **18** 9; Moser J 1962 *Nachr. Akad, Wiss. Goettingen Math.-Phys. K1.2* **1** 1; Jackson E A 1989/1990 *Perspectives of Nonlinear Dynamics, V1/V2* (Cambridge University Press, Cambridge)

[6] Lichtenberg A J and Lieberman M A 1992 *Regular and Chaotic Dynamics - Second Edition* (Springer-Verlag, New York) pp.183

[7] Meiss J D and Ott E 1986 Markov tree model of transport in area-preserving maps *Physica* **20D** 387-402

[8] Aizawa Y 1984 Symbolic dynamics approach to the two-dimensional chaos in area preserving maps: a fractal geometrical model *Prog. Theor. Phys.* **71** 1419-21

[9] Yamaguchi Y Y and Konishi T 1998 A geometrical model for stagnant motions in Hamiltonian systems with many degrees of freedom, *Prog. Theor. Phys.* **99** 139-44

[10] Hinch E J 1991 *Perturbation Methods* (Cambridge University Press, Cambridge)

[11] Chen L-Y, Goldenfeld N and Oono Y 1996 Renormalization group and singular perturbations: Multiple scales, boundary layers, and reductive perturbation theory *Phys. Rev.* E **54** 376-94

[12] Kunihiro T 1995 A geometrical formulation of the renormalization group method for global analysis *Prog. Theor. Phys.* **94** 503-14

[13] Hori G 1966 Theory of general perturbations with unspecified canonical variables *Publ. Astron. Soc. Japan* **18** 287-96

[14] Deprit A 1969 Canonical transformations depending on a small parameter *Celestial Mech.* **1** 12-30

[15] Hietarinta J 1987 Direct methos for the search of the second invariant *Phys. Rep.* **147** 87-154

[16] Yamaguchi Y Y and Nambu Y 1998 Renormalization group equations and integrability in Hamiltonian systems *Prog. Theor. Phys.* **100** 199-204

[17] Yamaguchi Y Y and Nambu Y 1998 Canonical structure of renormalization group equations and separability of Hamiltonian systems (Submitted to J. Phys. A) chao-dyn/9810010

[18] Nambu Y and Yamaguchi Y Y 1998 In preparation

[19] Yoshida H 1993 Recent progress in the theory and application of symplectic integrators *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* **56** 27-43