数理解析研究所講究録
1099巻 1999年 53-60



# On quantum dynamical entropies

東京理科大学理工学部
Science University of Tokyo
大矢雅則・渡邉 昇
Masanori Ohya and Noboru Watanabe

## まえがき

量子系の力学的エントロピーは，1975年ごろ Emch [Emc]と Connes - Stormer [CS] によって最初に導入され，1987年には，Connes -Narnhoffer-Thirring [CNT] がC*-系において力学的エントロピー(CNT dynamical entropy)を定義した．Park [Par] は，いくつかのモデルについて，CNT力学的エントロピーを計算した．また，1994年には，Alicki - Fannes [AF] が単位の有限作用素分割を用いて力学的エントロピー(AF dynamical entropy)を定め，Hudetz [Hud] は位相エントロピーに関連して力学的エントロピーを論じた．1995年には，Ohya [Ohy17] が，C*-混合エントロピーをベースとして量子系に力学的エントロピーと力学的相互エントロピーを定式化し，さらに，Voiculescu [Voi]は，一般化された近似のアプローチをベースとしてC*-及びW*-代数の自己同型写像に対する力学的エントロピーを導入した．1997年には，Accardi - Ohya - Watanabe [AOW1] が，量子マルコフ連鎖を通して，力学的エントロピー(AOW dynamical entropy)を定義した．さらに，最近，Kossakowski, - Ohya - Watanabe [KOW]は，AOW と AFを含むより一般的な系に対して完全正写像に関する力学的エントロピー(KOW dynamical entropy)を定式化した．これらの力学的エントロピーの関係は，文献 [Ben, MO, AOW2,] 等でなされている．また，[OP1, Cho] 等の文献において，力学的エントロピーに関するいくつかの計算が行われている．

以下では，特に，AOW，AF 及び KOW の力学的エントロピーについて簡単に説明する．

## 1．AOWの力学的エントロピーの定式化

量子マルコフ連鎖を通して定められる力学的エントロピー(AOW dynamical entropy)は，Accardi - Ohya - Watanabe によって以下のように定式化されている [AOW1].

$\mathcal{A}$ をヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ へ作用するフォンノイマン代数とし，$\varphi$ を $\mathcal{A}$ と $\mathcal{A}_0 = M_d$ ($d \times d$行列)上の状態とする．Accardi による推移期待値
$\mathcal{E}_\gamma : \mathcal{A}_0 \otimes \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ は

$$\mathcal{E}_\gamma\left(\tilde{A}\right) = \sum_i \gamma_i A_{ii} \gamma_i$$

と書き表せるものである．ここで $\tilde{A}$ は

$$\tilde{A} = \sum_{i,j} e_{ij} \otimes A_{ij} \in \mathcal{A}_0 \otimes \mathcal{A}$$

であり，

$$\gamma = \{\gamma_j\}$$

は，単位行列 $I \in \mathcal{A}$ の有限分割である．QMC は $\psi \equiv \{\varphi, \mathcal{E}_{\gamma,\theta}\} \in \sum\left(\bigotimes_1^\infty \mathcal{A}_0\right)$ で次のように定義される．

$$\psi\left(j_1(A_1) \cdots j_n(A_n)\right) \equiv \varphi\left(\mathcal{E}_{\gamma,\theta}\left(A_1 \otimes \mathcal{E}_{\gamma,\theta}\left(A_2 \otimes \cdots \otimes A_{n-1} \mathcal{E}_{\gamma,\theta}\left(A_n \otimes I\right) \cdots\right)\right)\right)$$

ここで $\mathcal{E}_{\gamma,\theta} = \theta \circ \mathcal{E}_\gamma$，$\theta \in Aut(\mathcal{A})$，$j_k$ は $\bigotimes_1^\infty \mathcal{A}_0$ に $\mathcal{A}_0$ を埋め込む次のような写像である．

$$j_k(A) = I \otimes \cdots \otimes I \otimes \underset{k-th}{A} \otimes \cdots$$

$\varphi$ に対して唯一の密度作用素 $\rho$（$\varphi(A) = \mathrm{Tr}\,\rho A, \forall A \in \mathcal{A}$）が存在するとしよう．$\bigotimes_1^n \mathcal{A}_0$ 上の $\psi_n$ を次のように表されるものとして定義する．

$$\psi_n\left(A_1 \otimes \cdots \otimes A_n\right) = \psi\left(j_1(A_1) \cdots j_n(A_n)\right)$$

$\psi_n$ に対する密度作用素 $\xi_n$ は次のように与えられる．

$$\xi_n \equiv \sum_{i_1}\cdots\sum_{i_n}\mathrm{Tr}_{\mathcal{A}}\left(\theta^n\left(\gamma_{i_n}\right)\cdots\theta\left(\gamma_{i_2}\right)\gamma_{i_1}\rho\gamma_{i_1}\cdots\theta^n\left(\gamma_{i_n}\right)\right)e_{i_1i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_ni_n}$$

ここで，

$$P_{i_n\cdots i_1} = tr_{\mathcal{A}}\left(\theta^n\left(\gamma_{i_n}\right)\cdots\theta\left(\gamma_{i_2}\right)\gamma_{i_1}\rho\gamma_{i_1}\cdots\theta^n\left(\gamma_{i_n}\right)\right)$$

とおくと，$\theta$と$\gamma$に対するAOWの力学的エントロピーは次のように定義される[AOW1].

$$\tilde{S}_\varphi(\theta;\gamma) \equiv \limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(-tr\xi_n\log\xi_n\right) = \limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(-\sum_{i_1\cdots i_n}P_{i_n\cdots i_1}\log P_{i_n\cdots i_1}\right).$$

もし，$P_{i_n\cdots i_1}$ がマルコフ性を満たすならば上式は次のように書ける.

$$\tilde{S}_\varphi(\theta;\gamma) = -\sum_{i_1,i_2}P\left(i_2|i_1\right)P\left(i_1\right)\log P\left(i_2|i_1\right)$$

$\theta$ と $\mathcal{A}$ のフォンノイマン部分代数 $\mathcal{B}$ に関するAOWの力学的エントロピーは

$$\tilde{S}_\varphi(\theta;\mathcal{B}) \equiv \sup\left\{\tilde{S}_\varphi(\theta;\gamma);\quad \gamma\subset\mathcal{B}\right\}.$$

## 2．AFの力学的エントロピーの定式化

有限分割を用いた力学的エントロピー(AF dynamical entropy)は，Alicki - Fanesによって次のように定められている[AF].

$\mathcal{A}$ を $C*$ 代数，$\theta$ を $\mathcal{A}$ 上の自己同型写像，そして $\varphi$ を $\theta$ に関する 定常な状態，$\mathcal{B}$ を $\mathcal{A}$ 上のユニタリ * 部分代数とする．もし $\gamma$ が次の式を満たすとき，$\mathcal{B}$ の要素の集合 $\gamma=\{\gamma_1,\cdots,\gamma_k\}$ をサイズ $k$ の有限作用素分割と呼ぶ.

$$\sum_{i=1}^{k}\gamma_i^*\gamma_i = I.$$

作用 $\circ$ は，全ての分割 $\gamma=\{\gamma_1,\cdots,\gamma_k\},\xi=\{\xi_1,\cdots,\xi_l\}$ に対して次のように定義されている.

$$\gamma\circ\xi \equiv \left\{\gamma_i\xi_j; i=1,2,\cdots,k\,,\, j=1,2,\cdots,l\right\}$$

サイズ $k$ のどのような分割 $\gamma$ に対しても，$k\times k$ 密度行列 $\rho[\gamma]=\left(\rho[\gamma]_{i,j}\right)$ は次のように与えられている．

$$\rho[\gamma]_{i,j}=\varphi\left(\gamma_j^*\gamma_i\right)\left(=tr\rho\gamma_j^*\gamma_i\right)$$

このとき，分割 $\gamma$ とシフト $\theta$ に関する力学的エントロピー $\tilde{H}_\varphi(\theta,\mathcal{B},\gamma)$ はフォンノイマンエントロピー $S(\cdot)$ によって次のように定義される[AF].

$$\tilde{H}_\varphi(\theta,\mathcal{B},\gamma)=\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}S\left(\rho\left[\theta^{n-1}(\gamma)\circ\cdots\circ\theta(\gamma)\circ\gamma\right]\right)$$

力学的エントロピー $\tilde{H}_\varphi(\theta,\mathcal{B})$ は $\mathcal{B}$ に対してsupをとることによって次のように与えられる．

$$\tilde{H}_\varphi(\theta,\mathcal{B})=\sup\left\{\tilde{H}_\varphi(\theta,\mathcal{B},\gamma);\quad \gamma\subset\mathcal{B}\right\}.$$

## 3．ＫＯＷの力学的エントロピーの定式化

上記のAOWとAFの力学的エントロピーを含むより一般の系に対して定められる完全正写像に対する力学的エントロピー(KOW dynamical entropy)は，Kossakowski - Ohya - Watanabe によって以下のように定式化される[KOW].

$\mathbf{B}(\mathcal{K})$ および $\mathbf{B}(\mathcal{H})$ を $\mathcal{K},\mathcal{H}$ 上の全ての有界線形作用素の集合とし，$\mathfrak{S}(\mathcal{K})$ および $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ を $\mathcal{K},\mathcal{H}$ 上の全ての密度作用素の集合とする．また，$\mathbf{B}(\mathcal{K})\otimes\mathbf{B}(\mathcal{H})$上の正規でunital な完全正写像を $\Gamma$ とする．$\mathbf{B}(\mathcal{K})$上の正規状態 $\omega$ に対して，$\omega(A)=tr\tilde{\omega}A$ を満たす密度作用素 $\tilde{\omega}\in\mathfrak{S}(\mathcal{K})$が存在する．このとき，

$$E^{\Gamma,\omega}\left(\tilde{A}\right)=\omega(\Gamma(A))=tr\tilde{\omega}\Gamma(A),\quad \forall\tilde{A}\in\mathbf{B}(\mathcal{K})\otimes\mathbf{B}(\mathcal{H})$$

によって定まる$\mathbf{B}(\mathcal{K})\otimes\mathbf{B}(\mathcal{H})$から$\mathbf{B}(\mathcal{H})$への写像 $E^{\Gamma,\omega}$ は，Accardi の遷移期待値[Acc]と呼ばれ，その共役写像 $E^{*\Gamma,\omega}:\mathfrak{S}(\mathcal{H})\to\mathfrak{S}(\mathcal{K}\otimes\mathcal{H})$ は，

$$E^{*\Gamma,\omega}(\rho)=\Gamma^*(\tilde{\omega}\otimes\rho),\quad \forall\rho\in\mathfrak{S}(\mathcal{H})$$

で与えられ，Accardi - Ohya のリフティング[AO]と呼ばれる．

正規でunital な完全正写像 $\Lambda:\mathbf{B}(\mathcal{H})\to\mathbf{B}(\mathcal{H})$ に対して，$id$ を $\mathbf{B}(\mathcal{K})$ 上の恒等写像とすると $id\otimes\Lambda$ も $\mathbf{B}(\mathcal{K})\otimes\mathbf{B}(\mathcal{H})$ 上の正規でunital な完全正写像である．いま，この $\Lambda$ を使って，遷移期待値 $E_{\Lambda}^{\Gamma,\omega}$ とリフティング $E_{\Lambda}^{*\Gamma,\omega}$ を次のように定める．

$$
\begin{aligned}
&E_{\Lambda}^{\Gamma,\omega}(\tilde{A})=\omega((id\otimes\Lambda)\Gamma(A))=tr\tilde{\omega}\Gamma(A),\quad \forall\tilde{A}\in\mathbf{B}(\mathcal{K})\otimes\mathbf{B}(\mathcal{H}),\\
&E_{\Lambda}^{*\Gamma,\omega}(\rho)=\Gamma^{*}(\tilde{\omega}\otimes\Lambda^{*}(\rho)),\quad \forall\rho\in\mathfrak{S}(\mathcal{H}).
\end{aligned}
$$

ここで，$\Lambda^{*}:\mathfrak{S}(\mathcal{H})\to\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ は量子チャネルと呼ばれ，量子通信理論において重要な役割を果たしている．このとき，任意の $A_1,\mathrm{L}\ ,A_n\in\mathbf{B}(\mathcal{K})$，$B\in\mathbf{B}(\mathcal{H})$ と任意の $\rho\in\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ に対して，

$$
\begin{aligned}
&tr_{(\otimes_1^n\mathcal{K})\otimes\mathcal{H}}\Phi_{\Lambda,n}^{*\Gamma,\omega}(\rho)(A_1\otimes\mathrm{L}\ \otimes A_n\otimes B)\\
&\equiv tr_{\mathcal{H}}\rho\left(E_{\Lambda,n}^{\Gamma,\omega}\left(A_1\otimes E_{\Lambda,n}^{\Gamma,\omega}\left(A_2\otimes\cdots\otimes A_{n-1}E_{\Lambda,n}^{\Gamma,\omega}(A_n\otimes B)\cdots\right)\right)\right)
\end{aligned}
$$

よりリフティング $\Phi_{\Lambda,n}^{*\Gamma,\omega}:\mathfrak{S}(\mathcal{H})\to\mathfrak{S}\left(\left(\bigotimes_1^n\mathcal{K}\right)\otimes\mathcal{H}\right)$ と部分状態 $\rho_{\Lambda,n}^{\Gamma,\omega},\bar{\rho}_{\Lambda,n}^{\Gamma,\omega}$ が

$$
\begin{aligned}
&\rho_{\Lambda,n}^{\Gamma,\omega}\equiv tr_{\mathcal{H}}\Phi_{\Lambda,n}^{*\Gamma,\omega}(\rho)\in\mathfrak{S}\left(\bigotimes_1^n\mathcal{K}\right),\\
&\bar{\rho}_{\Lambda,n}^{\Gamma,\omega}\equiv tr_{(\otimes_1^n\mathcal{K})}\Phi_{\Lambda,n}^{*\Gamma,\omega}(\rho)\in\mathfrak{S}(\mathcal{H})
\end{aligned}
$$

で求められる．ここで，$\Phi_{\Lambda,n}^{*\Gamma,\omega}(\rho)\in\mathfrak{S}\left(\left(\bigotimes_1^n\mathcal{K}\right)\otimes\mathcal{H}\right)$ は，部分状態 $\rho_{\Lambda,n}^{\Gamma,\omega},\bar{\rho}_{\Lambda,n}^{\Gamma,\omega}$ に対する合成状態を表している．このとき，$\Lambda,\rho,\Gamma,\omega$ に関するKOWの力学的エントロピーは,

$$
\tilde{S}(\Lambda;\rho,\Gamma,\omega)=\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}S\left(\rho_{\Lambda,n}^{\Gamma,\omega}\right)
$$

で定められる[KOW]．ここで，$S(\cdot)$ は $\rho_{\Lambda,n}^{\Gamma,\omega}$ のフォンノイマンエントロピーである．さらに，$\Lambda,\rho$ に関するKOWの力学的エントロピーは,

$$
\tilde{S}(\Lambda;\rho)\equiv\sup\left\{\tilde{S}(\Lambda;\rho,\Gamma,\omega);\Gamma,\omega\right\}
$$

で定義される．

次に，このKOWの力学的エントロピーの定式化をもとに，AOWとAFの力学的エントロピーを正規でunital な完全正写像 $\Lambda:\mathbf{B}(\mathcal{H})\to\mathbf{B}(\mathcal{H})$ に関して一般化する．

$\mathbf{B}(\mathcal{K})$ を $d \times d$ 行列代数 $M_d\ (d \le \dim \mathcal{H}) \subset \mathbf{B}(\mathcal{H})$ とし，正規化されたベクトル $e_i \in \mathcal{H}\ (i = 1, \mathrm{L}\ , d)$ に対して，$E_{ij} \equiv |e_i\rangle\langle e_j|$ と置く．さらに，$\gamma_1, \cdots, \gamma_d$ を単位の有限作用素分割とすると，AOWとAFに対する部分状態 $\rho_{\Lambda,n}^{\gamma(0)}, \rho_{\Lambda,n}^{\gamma}$ は，

$$\rho_{\Lambda,n}^{\gamma(0)} \equiv \sum_{i_1, \mathrm{L}\ , i_n}^{d} tr_{\mathcal{H}} \rho \Lambda \left( W_{i_1 i_1} \left( \Lambda \left( W_{i_2 i_2} \left( \mathrm{L}\ \Lambda \left( W_{i_n i_n} \left( I_{\mathcal{H}} \right) \right) \right) \cdots \right) \right) \right) E_{i_1 i_1} \otimes \mathrm{L}\ \otimes E_{i_n i_n},$$

$$\rho_{\Lambda,n}^{\gamma} \equiv \sum_{i_1, \mathrm{L}\ , i_n}^{d} \sum_{j_1, \mathrm{L}\ , j_n}^{d} tr_{\mathcal{H}} \rho \Lambda \left( W_{j_1 i_1} \left( \Lambda \left( W_{j_2 i_2} \left( \mathrm{L}\ \Lambda \left( W_{j_n i_n} \left( I_{\mathcal{H}} \right) \right) \right) \cdots \right) \right) \right) E_{i_1 j_1} \otimes \mathrm{L}\ \otimes E_{i_n j_n}$$

で与えられれる．ここで，$W_{ij}(A) \equiv \gamma_i^* A \gamma_j$，$A \in \mathbf{B}(\mathcal{H})$ である．このとき，$\Lambda, \rho, \{\gamma_i\}$ に関する一般化されたAOWの力学的エントロピーと一般化されたAFの力学的エントロピーは，KOWの定式化を用いて，

$$\tilde{S}^{(0)}\left(\Lambda; \rho, \{\gamma_i\}\right) = \limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} S\left(\rho_{\Lambda,n}^{\gamma(0)}\right),$$

$$\tilde{S}\left(\Lambda; \rho, \{\gamma_i\}\right) = \limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} S\left(\rho_{\Lambda,n}^{\gamma}\right)$$

で定められる[KOW]．さらに，$\mathcal{B} \subset \mathbf{B}(\mathcal{H})$ に関して，$\Lambda, \rho$ に対する一般化されたAOWの力学的エントロピーと一般化されたAFの力学的エントロピーは，それぞれ

$$\tilde{S}_{\mathcal{B}}^{(0)}(\Lambda; \rho) \equiv \sup\left\{ \tilde{S}^{(0)}\left(\Lambda; \rho, \{\gamma_i\}\right);\ \ \{\gamma_i\} \subset \mathcal{B} \right\},$$

$$\tilde{S}_{\mathcal{B}}(\Lambda; \rho) \equiv \sup\left\{ \tilde{S}\left(\Lambda; \rho, \{\gamma_i\}\right);\ \ \{\gamma_i\} \subset \mathcal{B} \right\}$$

で定められる．このとき，次の定理が成り立つ．

**定理３．１**　　$\tilde{S}_{\mathcal{B}}(\Lambda; \rho) \le \tilde{S}_{\mathcal{B}}^{(0)}(\Lambda; \rho).$

力学的エントロピーの定義は，$n$で割って，$n$の値に関して無限大の極限を取るとという操作を行うので，ほとんどの場合０になることが多いが，この定理により，一般化されたAOWの力学的エントロピーの値が一般化されたAFの力学的エントロピーの値より大きいことがわかり，一般化されたAFの力学的エントロピーの値が０となり尺度として用いることができないような対象に対しても一般化されたAOWの力学的エントロピーを使うことにより分類することができるものと考えられる．さらに，一般化されたAOWの力学的エントロピーは

具体的な数値を求めることが簡単であるが，一般化されたAFの力学的エントロピーでは簡単なモデルについても計算が非常に難しいという特徴があることを付け加えておく．

# 参考文献

[Acc] L. Accardi: "Noncommutative Markov chain", International School of Mathematical Physics, Camerino, 268-295, 1974.

[AO] L. Accardi and M. Ohya: "Compound channels, transition expectations and liftings", Appl. Math. Optim. 39, 33-59, 1999.

[AOW1] L. Accardi, M. Ohya and N. Watanabe: "Dynamical entropy through quantum Markov chain", Open Systems and Information Dynamics, 4, No.1, 71-87, 1997.

[AOW2] L. Accardi, M. Ohya and N. Watanabe:"Note on quantum dynamical entropies", Reports on Mathematical Physics, 38, No.3, 457-469, 1996.

[AlF] R. Alicki and M. Fannes :"Defining quantum dynamical entropy", Letters in Mathematical Physics, 32, 75-82, 1994.

[Ben] F. Benatti: "Deterministic Chaos in Infinite Quantum Systems", Springer, Berlin (1993).

[Cho] M. Choda,: "Entropy for extensions of Bernoulli shifts", Ergodic Theory Dynam. Systems, 16, No.6, 1197--1206 (1996).

[CNT] A. Connes, H. Narnhoffer and W. Thirring: "Dynamical entropy of C*algebras and von Neumann algebras", Acta Mathematica, 134, 289-306, 1975.

[CS] A. Connes and E. Størmer : "Entropy for automorphisms of $\mathrm{II}_1$ von Neumann algebras", Acta Mathematica, 134, 289-306, 1975.

[Emc1] G.G. Emch:"Positivity of the K-entropy on non-abelian K-flows", Zeitschrift Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete 29, 241, 1974.

[Hud] T. Hudetz: "Topological entropy for appropriately approximated C*-algebras", J. Math. Phys. 35, No. 8, 4303--4333, 1994.

[IKO] R.S. Ingarden, A. Kossakowski and M. Ohya : "Information Dynamics and Open Systems", Kluwer, 1997.

[Kol] A.N. Kolmogorov: "Theory of transmission of information", Amer. Math. Soc.

Translation, Ser. 2, 33, 291, 1963.

[KOW] A. Kossakowski, M. Ohya and N. Watanabe: "Quantum Dynamical Entropy for Completely Positive Map", to appear in Infinite Dimensional Analysis and Quantum Probability.

[MO] N. Muraki and M. Ohya: "Entropy functionals of Kolmogorov Sinai type and their limit theorems", Letter in Mathematical Physics., 36, 327-335, 1996.

[Ohy3] M. Ohya: "Quantum ergodic channels in operator algebras", Journal in Mathematical Analysis and Applications, 84, 318-328 ,1981.

[Ohy4] M. Ohya: "On compound state and mutual information in quantum information theory", IEEE Information Theory, 29, 770-774, 1983.

[Ohy5] M. Ohya: "Note on quantum probability", IL Nuovo Cimento, 38, 402-404, 1983.

[Ohy13] M. Ohya: "Some aspects of quantum information theory and their applications to irreversible processes", Reports on Mathematical Physics, 27, 19-47, 1989.

[Ohy17] M. Ohya: "State change, complexity and fractal in quantum systems", Quantum Communications and Measurement, 2, 309-320, 1995.

[OO] 大矢雅則，小嶋　泉 (編著)："量子情報と進化の力学"，牧野書店，1996.

[OP1] M. Ohya and D. Petz: "Quantum Entropy and its Use", Springer-Verlag, 1993.

[OW6] M. Ohya and N. Watanabe: "Note on irreversible dynamics and quantum information", Contributions in Probability, 205-220, 1996.

[Par] Y.M. Park: "Dynamical entropy of generalized quantum Markov chains", Lett. Math. Phys. 32, 63--74, 1994.

[Voi] D. Voiculescu: "Dynamical approximation entropies and topological entropy in operator algebras", Communications in Mathematical Physics, 170, 249-281, 1995.