数理解析研究所講究録
1100 巻 1999 年 152-156

標本函数系と Hilbert 空間 L^2 上の直交系

東京工業大学名誉教授
梅垣壽春 (HISAHARU UMEGAKI)

§1. まえがき

表記の標本函数系 (Sampling Functions の系) は，情報理論を創造した C.E.Shannon がその理論の一つの柱となる time-parameter $t\in\mathbb{R}$ $(=(-\infty,\infty))$ 上の信号函数の把握・解析などを含めて論じたものであり，それは画期的な概念で情報・信号解析の重要な base となっている．これらを数学的見地に立って論ずる場合，函数解析・Fourier 解析の興味ある展開がなされる．

本論で扱われるエネルギー有限な信号函数 f, g, $\cdots$ とは，real line $\mathbb{R}$ 上で a.e. 定義され且つ 2 乗可積分な複素数値函数全体の集団，つまりこれ等が Hilbert 空間 $L^2(\mathbb{R})$ を構成している．その様な数理的な base に立って所論を構築する．文末に記載した文献は本論を記述するに最も参考とした論文，書物である．本論は Wavelet 直交系構成への一道程である．Wavelets の概念を修得するに文献 [2] は大変理解し易いことを茲に記し度い．

§2. 標本函数 (Sampling functions)

標本函数 $S_\lambda(\cdot)$ は次の様にして与えられる: 実数 $\lambda>0$ を fix し

$$S_\lambda(t)=\begin{cases}2\lambda\dfrac{\sin 2\pi\lambda t}{2\pi\lambda t} & (0\neq t\in\mathbb{R})\\ 2\lambda & (t=0).\end{cases}\tag{2.1}$$

一般に $f\in L^2(\mathbb{R})$ の Fourier 変換は

$$\hat{f}(\omega)=\underset{T\to\infty}{\mathrm{l.\,i.\,m.}}\int_{-T}^{T}f(t)e^{-2\pi i\omega t}dt\tag{2.2}$$

の定式を用いる．標本函数は $S_\lambda(\cdot)\in L^2(\mathbb{R})$ で，これの Fourier 変換は

$$\widehat{S}_\lambda(\omega)=1_{[-\lambda,\lambda]}(\omega)\quad(\text{区間 }[-\lambda,\lambda]\text{ 上の定義函数}).\tag{2.3}$$

この標本函数 $S_\lambda(\cdot)$ について，数学的立場で，先ず興味を呼ぶものは次に述べる Hilbert 空間 BL_λ である．

周波数帯が区間 $[-\lambda,\lambda]$ に限定されている信号函数 (:Band Limited in $[-\lambda,\lambda]$) の全体を BL_λ で表す:

$$BL_\lambda=\{f\in L^2(\mathbb{R});\hat{f}(\omega)=0\ (\forall\omega\,(|\omega|>\lambda)\}.$$

このとき区間 $[-\lambda, \lambda]$ を周波数帯 (bandwidth of frequency) という．これらの記号設定の基で次の定理を得る．

$\boxed{\text{註}}$ 以下，本 § で述べる定理 2.1〜3 は既知であり，前論文 [6, 7] などで既に示したものであるが，§3 の所論展開上の関連で必要とするので，ここで再録し証明無しで述べ度い．

〈定理 2.1〉 任意の $\lambda > 0$ に対して定まる空間 BL_λ は Hilbert 空間 $L^2(\mathbb{R})$ の閉部分空間，従って，それ自身で BL_λ は Hilbert 空間となる．

〈定理 2.2〉 (i) $K_\lambda(s,t) \triangleq S_\lambda(s-t)$ $(s, t \in \mathbb{R})$ とおくと，2 変数函数 $K_\lambda(s,t)$ は再生核 (RK と略記) の条件を満たす.
(ii) (Yao [8]) Hilbert 空間 BL_λ は函数 $K_\lambda(\cdot,\cdot)$ を RK とする再生核 Hilbert 空間 RKHS である:

$$BL_\lambda = H(K_\lambda).$$

一方標本関数 $S_\lambda(\cdot)$ を用いて

$$E^S_\lambda f = S_\lambda * f, \quad f \in L^2(\mathbb{R}), \lambda \geqq 0$$

($*$ は convolution 積) とする．このとき

〈定理 2.3〉 (Umegaki [7]) (i) E^S_λ $(\lambda \geqq 0)$ は Hilbert 空間 $L^2(\mathbb{R})$ の部分空間 BL_λ 上への射影作用素である.
(ii) 射影作用素の一径族 $\{E^S_\lambda\}_{\lambda \geqq 0}$ は $L^2(\mathbb{R})$ 上の Spectral Resolution である.
(iii) $\{E^S_\lambda\}$ によるスペクトル積分は

$$P^2 \left(= \frac{-1}{(2\pi)^2} \frac{d^2}{dt^2} \right) = \int_0^\infty \lambda dE^S_\lambda.$$

茲で自己共役作用素 P は Schrödinger 対 (P, Q) の P である.

ここで Shannon の展開定理を Hilbert 空間上の基本収束定理の帰結として次の定理の形で表示しよう:

$$\varphi_n(t) \triangleq \frac{1}{\sqrt{2\lambda}} S_\lambda \left(t - \frac{n}{2\lambda} \right), \quad n = 1, 2, \ldots$$

とおき，これを標本関数系という．これの Fourier 変換は

$$\widehat{\varphi}_n(\omega) \frac{1}{\sqrt{2\lambda}} \exp\left(-\frac{2\pi i n \omega}{2\lambda} \right) \widehat{S}_\lambda(\omega).$$

これを用いて

〈定理 2.4〉 (標本展開定理) (i) 標本函数系 $\{\varphi_n\}$ は CONS in BL_λ, 茲で CONS は Complete OrthoNormal System の略記.

(ii) 全ての信号函数 $f \in BL_\lambda$ は CONS $\{\varphi_n\}$ に関する Fourier 展開によって，次の (1), (2) の極限式によって表示される．

(1) $\lim \left\| f - \frac{1}{\sqrt{2\lambda}} \sum_{n=-N}^{N} f\left(\frac{n}{2\lambda}\right) \varphi_n \right\|_2 = 0,$

(2) $\lim \left\| f - \frac{1}{\sqrt{2\lambda}} \sum_{n=-N}^{N} f\left(\frac{n}{2\lambda}\right) \varphi_n \right\|_\infty = 0.$

ここで lim は $N \to \infty$ の下である．即ち，この展開式は L^2-norm に関する平均収束のみならず，時間軸上で一様収束することを意味している．

§3. 直交系 $\{S_{m,n}\}$ の構成

一般に函数 $\xi \in L^2(\mathbb{R})$，$\|\xi\|_2 = 1$，を基函数として導かれる一つの函数を

$$\xi_{m,n}(t) = 2^{m/2}\xi(2^m t - n), \quad m, n \in Z \tag{3.1}$$

とおく．このとき，$\xi_{m,n} \in L^2(\mathbb{R})$，さらに

$$\int |\xi_{m,n}(t)|^2 \, dt = 2^m \int |\xi(2^m t - n)|^2 \, dt = 2^m \int |\xi(t)|^2 \, 2^{-m} dt = \|\xi\|_2^2 = 1 \tag{3.2}$$

が云え，こうして導入された 2 重 index の函数列 $\{\xi_{m,n}\}$ $(m, n \in Z)$ が CONS in $L^2(\mathbb{R})$ であるとき $\{\xi_{m,n}\}$ は ξ を基函数とする 'Wavelet CONS' という．この CONS 構成を標本函数 $S_\lambda(\cdot)$ におけるパラメーターが '$\lambda = 1/2$' の場合に適用しよう．

$\boxed{\text{註}}$ 式 (3.2) のように，積分記号として単に $\int$ と記した場合は $\int = \int_{\mathbb{R}}$ と見做す．以下同様．

$$S(t) = S_{1/2}(t) \quad (t \in \mathbb{R})$$

とおく，i.e.

$$S(t) = \begin{cases} \dfrac{\sin \pi t}{\pi t} & (0 \neq t \in \mathbb{R}) \\ 1 & (t = 0). \end{cases}$$

これは $S(\cdot) \in L^2(\mathbb{R})$ で $\|S\|_2 = 1$. また §2 の (2.3) によって

$$\widehat{S}(\omega) = (\mathcal{F}S)(\omega) = 1_{[-1/2,1/2]}(\omega) \quad (\omega \in \mathbb{R}).$$

ここで函数 $\xi \in L^2(\mathbb{R})$，$\|\xi\|_2 = 1$，に対し式 (3.1) によって函数 $\xi_{m,n}$ を構成したと同様に，標本函数 $S(\cdot)$ に対して函数 $S_{m,n}$ を構成する:

$$S_{m,n}(t) = 2^{m/2}S(2^m t - n), \quad m, n \in Z.$$

更に，積分計算式 (3.2) によって

$$\|S_{m,n}\|_2 = \|S\|_2 = \left\|S_{1/2}\right\|_2 = 1.$$

次に，各 $m, n \in Z$ に対して

$$\widetilde{S}_{m,n}(\omega) \triangleq \widehat{S}_{m,n}(\omega)\Big|_{[-2^{m-1},2^{m-1}]} \quad (\widehat{S}_{m,n}\text{の区間}\,[-2^{m-1},2^{m-1}]\,\text{上への制限})$$

とおく．これ等に関して，次の定理が成立する．

〈定理 3.1〉 固定した $m \in Z(>0)$ に対して，函数列 $\{\widetilde{S}_{m,n}, n \in Z\}$ は CONS in $L^2(-2^{m-1}, 2^{m-1})$.

証明．Fourier 変換 $\widehat{S}_{m,n}$ について計算すればよい．

$$\begin{aligned}
\widehat{S}_{m,n}(\omega) &= 2^{m/2}\int S(2^m t - n)e^{-2\pi i\omega t}dt \\
&\quad (u = 2^m t - n \text{ とおくと}, 2^m t = u + m,\ t = 2^{-m}(u+m), \\
&\quad du = 2^m dt,\ dt = 2^{-m}du \text{ であるから}) \\
&= 2^{m/2}\int S(u)\exp(-2\pi i\,\omega\cdot 2^{-m}(u+n))2^{-m}du \\
&= 2^{-m/2}\int S(u)\exp(-2\pi i\,\omega\cdot 2^{-m}(u+n))du \\
&= 2^{-m/2}\int S(u)e^{-2\pi i\omega 2^{-m}u}e^{-2\pi i\omega 2^{-m}n}du \\
&= 2^{-m/2}\widehat{S}(2^{-m}\omega)\exp(-2\pi i\,\omega 2^{-m}n).
\end{aligned}$$

ここで，函数 $\widehat{S}(2^{-m}\cdot)$ は閉区間 $[-2^{m-1}, 2^{m-1}]$ 上の定義函数と一致する:

$$\widehat{S}(2^{-m}\cdot) = 1_{[-2^{m-1},2^{m-1}]}(\cdot).$$

すると

$$\begin{aligned}
\langle \widehat{S}_{m,n}, \widehat{S}_{m,n'}\rangle &= 2^{-m}\int_{-2^{m-1}}^{2^{m-1}} \exp(-2\pi i\,\omega 2^{-m}n)\exp(2\pi i\,\omega 2^{-m}n')\,d\omega \\
&= \delta(n,n') \quad (\text{Kronecker } \delta).
\end{aligned}$$

函数 $\widehat{S}_{m,n}$ の定義域を区間 $[-2^{m-1}, 2^{m-1}]$ 上に制限したものが，$\widetilde{S}_{m,n}$ であり，これより函数列 $\{\widetilde{S}_{m,n}\}_{n=1}^{\infty}$ が Hilbert 空間 $L^2(-2^{m-1}, 2^{m-1})$ 上で CONS であることが云える．

各 $\widehat{S}_{m,n}$ は $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ 全域で定義されている．これ等 m，n を独立に変動させて函数列を再構成することによって Hilbert 空間 $L^2(\mathbb{R})$ 上の CONS を構成して行く議論が残るが，他日，Hilbert 空間上の作用素論の関連も含めて論じ度い．

参考文献

[1] R. B. Ash, *Information Theory*, Interscience Publ., 1990.

[2] C. K. Chui, *An Introduction to Wavelets*, Academic Press, 1992.

[3] 国澤清典・梅垣壽春, 情報理論の進歩, 岩波書店, 1965 年.

[4] S. Saito, *Integral Transforms, Reproducing Kernels and their Applications*, πPitman Research Notes in Math. Series, Langman Sci. & Tech., **369**, 1997.

[5] 梅垣壽春, 情報数理の基礎, サイエンス社, 1995 年.

[6] 梅垣壽春, 信号函数の生成する再生核Hilbert空間, 数理解析研究所講究録, **1067** (1998), 118-124.

[7] H. Umegaki, *A spectral property of one parameter family of sampling functions – from signal analysis to functional analysis,* $QP-PQ$, Quantum Probability & Related Topics, **7** (1992), 453-463.

[8] K. Yao, *Applications of reproducing kernel Hilbert spaces*, Inform. Control, **11** (1967), 427-444.