数理解析研究所講究録
1101 巻 1999 年 110-113

The Amount of Partial Information and Sufficiency

筑波大・数学 大谷内奈穂 (Nao Ohyauchi)
筑波大・数学 赤平 昌文 (Masafumi Akahira)

1 はじめに

Fisher([F25])は母数に対して統計量の補助性の概念を導入し，補助統計量の値が与えられたときに条件付原理を用いた．また，局外母数が存在するときに，Godambe([G80])は十分性と補助性について論じた．そしてそのようなときに，Bhapkar([Bh89]，[Bh91])は補助統計量による条件付操作について論じ，さらに関心のある母数に対する統計量の部分的十分性(partial sufficiency)のいくつかの定義について考察した．なお部分的十分性については，Basu([Ba78])の論説がある．

本論では，局所母数が存在するとき，部分的情報量と十分性について論じ，部分的(情報)十分性の定義を与え，その特徴付けを行う．

2 部分的情報量と十分性

確率ベクトル$\mathbf{X} := (X_1, \cdots, X_n)$の($\sigma$-有限測度$\mu$に関する)同時確率密度関数(joint probability density function 略してj.p.d.f.)を$f_{\theta,\eta}(\mathbf{x})$とする．ただし，$\mathbf{x} := (x_1, \cdots, x_n)$，$\theta$は関心のある実母数とし，$\eta$は実ベクトル値局外母数とする．このとき，適当な正則条件の下で，Fisher情報行列を

$$
\begin{aligned}
I^{\mathbf{X}} &:= \begin{pmatrix} I^{\mathbf{X}}_{\theta\theta} & I^{\mathbf{X}}_{\theta\eta} \\ I^{\mathbf{X}}_{\eta\theta} & I^{\mathbf{X}}_{\eta\eta} \end{pmatrix} \\
&:= \begin{pmatrix} E_\theta\left[\left\{\frac{\partial}{\partial\theta}\log f_{\theta,\eta}(\mathbf{X})\right\}^2\right] & E_\theta\left[\left\{\frac{\partial}{\partial\theta}\log f_{\theta,\eta}(\mathbf{X})\right\}\left\{\frac{\partial}{\partial\eta'}\log f_{\theta,\eta}(\mathbf{X})\right\}\right] \\ E_\theta\left[\left\{\frac{\partial}{\partial\theta}\log f_{\theta,\eta}(\mathbf{X})\right\}\left\{\frac{\partial}{\partial\eta}\log f_{\theta,\eta}(\mathbf{X})\right\}\right] & E_\theta\left[\left\{\frac{\partial}{\partial\eta}\log f_{\theta,\eta}(\mathbf{X})\right\}\left\{\frac{\partial}{\partial\eta'}\log f_{\theta,\eta}(\mathbf{X})\right\}\right] \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

によって定義する．ただし，$\frac{\partial}{\partial\eta'}\log f_{\theta,\eta}(\mathbf{X})$は$\frac{\partial}{\partial\eta}\log f_{\theta,\eta}(\mathbf{X})$の転置ベクトルとする．また，$\theta$に対する$\mathbf{X}$の部分的情報量を

$$
I^{\mathbf{X}}_{\theta|\eta} := I^{\mathbf{X}}_{\theta\theta} - I^{\mathbf{X}}_{\theta\eta}(I^{\mathbf{X}}_{\eta\eta})^{-1} I^{\mathbf{X}}_{\eta\theta} \tag{2.1}
$$

で定義する．そして同様にして，θに対する統計量$T = t(\mathbf{X})$のFisher情報行列を

$$
I^T := \begin{pmatrix} I^T_{\theta\theta} & I^T_{\theta\eta} \\ I^T_{\eta\theta} & I^T_{\eta\eta} \end{pmatrix}
$$

によって定義し，θに対するTの部分的情報量を

$$I^T_{\theta|\eta} := I^T_{\theta\theta} - I^T_{\theta\eta}(I^T_{\eta\eta})^{-1}I^T_{\eta\theta} \tag{2.2}$$

で定義する．さらに，すべてのθとすべてのηに対して

$$I^T_{\theta|\eta} = I^X_{\theta|\eta}$$

が成り立つとき，Tは部分的に(情報)十分であるという．

3 部分的(情報)十分性の特徴付け

この節では，Tが部分的に(情報)十分であるための必要十分条件を求める．まず，母数θとηの直交性の条件$I^{\mathbf{X}}_{\theta\eta} \equiv 0$，すなわち，すべての$\theta$とすべての$\eta$に対して$I^{\mathbf{X}}_{\theta\eta} = 0$が成り立つと仮定する．一般には，$I^{\mathbf{X}}_{\theta\eta} \not\equiv 0$であるが，適当な関数$\phi$を用いて局外母数を変換$\tilde{\eta} := \phi(\theta, \eta)$によって再定義すれば，$I^{\mathbf{X}}_{\theta\tilde{\eta}} \equiv 0$になることも多い．このとき次の定理が成り立つ．

定理 1 $I^{\mathbf{X}}_{\theta\eta} \equiv 0$と仮定する．このとき$I^{\mathbf{X}}_{\theta|\eta} \equiv I^T_{\theta|\eta}$であるための必要十分条件は，$I^T_{\theta\theta} \equiv I^{\mathbf{X}}_{\theta\theta}$である．

証明の概略 まず，行列$I^{\mathbf{X}} - I^T$は非負定符号になる．そこで，$I^{\mathbf{X}}_{\theta|\eta} \equiv I^T_{\theta|\eta}$とすれば，$I^{\mathbf{X}}_{\theta\eta} \equiv 0$という条件を用いて，(2.1)と(2.2)から

$$I^{\mathbf{X}}_{\theta\theta} \equiv I^T_{\theta\theta} - I^T_{\theta\eta}(I^T_{\eta\eta})^{-1}I^T_{\eta\theta}$$

になる．また，$I^{\mathbf{X}}_{\theta\theta} \geq I^T_{\theta\theta}$ で$(I^T_{\eta\eta})^{-1}$が正定値であるから，$I^{\mathbf{X}}_{\theta\theta} \equiv I^T_{\theta\theta}$になり，$I^T_{\theta\eta} \equiv 0$となる．

逆については，まず，$I^{\mathbf{X}}_{\theta\eta} \equiv 0$であるから，(2.1)と(2.2)から行列

$$I^{\mathbf{X}} - I^T \equiv \begin{pmatrix} I^{\mathbf{X}}_{\theta\theta} - I^T_{\theta\theta} & -I^T_{\theta\eta} \\ -I^T_{\eta\theta} & I^{\mathbf{X}}_{\eta\eta} - I^T_{\eta\eta} \end{pmatrix}$$

は非負定符号となる．そして，$I^{\mathbf{X}}_{\theta\theta} \equiv I^T_{\theta\theta}$とすれば，$I^T_{\theta\eta} \equiv 0$となる．□

次に，Tが与えられたときのXの条件付確率密度関数(conditional p.d.f.略してc.p.d.f)を$h_{\theta,\eta}(\mathbf{x}|T)$，$T$のp.d.f.を$g_{\theta,\eta}(T)$とすると

$$f_{\theta,\eta}(\mathbf{x}) = h_{\theta,\eta}(\mathbf{x}|t)\, g_{\theta,\eta}(t) \quad a.e. \tag{3.1}$$

となる．また，

$$I^{\mathbf{X}}_{\theta\theta} - I^T_{\theta\theta} = E\left[E\left[\left\{\frac{\partial}{\partial\theta}\log h_{\theta,\eta}(\mathbf{X}|T)\right\}^2 \Big| T\right]\right]$$

になる(Fisher[F25], Rao[R61]). よって，$I^{\mathbf{X}}_{\theta\theta} \equiv I^{T}_{\theta\theta}$ならば

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\log h_{\theta,\eta}(\mathbf{x}|t) = 0 \quad a.e.$$

となるから，$h_{\theta,\eta}(\mathbf{x}|t)$は$\theta$に無関係になる．従って，(3.1)から

$$f_{\theta,\eta}(\mathbf{x}) = h_{\eta}(\mathbf{x}|t)\, g_{\theta,\eta}(t) \quad a.e. \tag{3.2}$$

になる．逆に，(3.2)が成り立つとすれば，$I^{T}_{\theta\theta} \equiv I^{\mathbf{X}}_{\theta\theta}$になる．よって，次の定理を得る．

定理 2　$I^{\mathbf{X}}_{\theta\eta} \equiv 0$と仮定する．このとき，統計量$T = t(\mathbf{X})$が$\theta$に対して部分的(情報)十分であるための必要十分条件は,$\mathbf{X}$のj.p.d.f.が

$$f_{\theta,\eta}(\mathbf{x}) = h_{\eta}(\mathbf{x}|t)\, g_{\theta,\eta}(t) \quad a.e.$$

となることである．

上の定理 2 は，Neyman型因子分解定理であり，非常に有用である．

例 1　$X_1, \cdots, X_n$をたがいに独立に，いずれも正規分布$N(\mu, \sigma^2)$に従う確率変数とする．このとき，$\mathbf{X} := (X_1, \cdots, X_n)$のj.p.d.f.は

$$f_{\theta,\eta}(\mathbf{x}) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi\eta})^n}\exp\left\{-\frac{1}{2\eta}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2\right\}\exp\left\{-\frac{n}{2\eta^2}(\bar{x} - \theta)^2\right\}$$

になる．ただし，$\mathbf{x} := (x_1, \cdots, x_n)$，$\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i/n$とする．よって，定理 2 より，$\bar{X}$は$\theta$に対して部分的(情報)十分である．

例 2　$X_1, \cdots, X_n$を確率変数とし，$z_{ji}(j = 1, \cdots, k; i = 1, \cdots, n)$を定数の値をとる独立変数とする．そして，線形回帰モデル

$$X_i = \beta_0 + \beta_1 z_{1i} + \cdots + \beta_k z_{ki} + \epsilon_i \quad (i = 1, \cdots, n)$$

を考える．ただし，$\epsilon_1, \cdots, \epsilon_n$はたがいに独立に，いずれも$N(0, \sigma^2)$に従う確率変数とし，$\sigma^2$は既知とする．このとき，$\mathbf{X} := (X_1, \cdots, X_n)$のj.p.d.f.は

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma)^n}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \beta_0 - \beta_1 z_{1i} - \cdots - \beta_k z_{ki})^2\right\}$$

になる．ただし，$\mathbf{x} := (x_1, \cdots, x_n)$とする．ここで，$\beta_1$を関心のある母数とし，他のすべての母数を局外母数とする．通常，β_1と$(\beta_0, \beta_2, \cdots, \beta_p)$は(情報)直交しない．そこで

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i = 0, \quad \sum_{i=1}^{n}\omega_i z_{ji} = 0 \quad (j = 2, \cdots, k)$$

となるように

$$\omega_i := z_{1i} - c_1 - c_2 z_{2i} - \cdots - c_k z_{ki} \quad (i = 1, \cdots, n)$$

をとり，

$$\gamma_0 := \beta_0 + c_1\beta_1, \quad \gamma_2 := \beta_2 + c_2\beta_1, \quad \cdots, \quad \gamma_k := \beta_k + c_k\beta_1$$

と変換する．このとき

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= \frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma)^n} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \gamma_0 - \beta_1\omega_i - \gamma_2 z_{2i} - \cdots - \gamma_k z_{ki})^2\right\} \\ &= \frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma)^n} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 - 2\beta_1\sum_{i=1}^{n}\omega_i x_i + {\beta_1}^2\sum_{i=1}^{n}{\omega_i}^2\right)\right\} \\ &\quad \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(\gamma_0 + \gamma_2 z_{2i} + \cdots + \gamma_k z_{ki})^2\right\} \end{aligned}$$

になる．よって，β_1は他のすべての母数$\gamma_0, \gamma_2, \cdots, \gamma_k$に直交していることが分かり，また，定理２より，$T := \sum_{i=1}^{n} \omega_i X_i$またはそれと同等な最小２乗推定量

$$\hat{\beta}_1 := \sum_{i=1}^{n} \omega_i X_i \Big/ \sum_{i=1}^{n} {\omega_i}^2$$

がβ_1に対する部分的(情報)十分になる．

参考文献

[Ba78] Basu, D.(1978). On partial sufficiency : A review. *J. Statist. Plann. Inference* **2**, 1-13.

[Bh89] Bhapkar, V.P.(1989). Conditioning on ancillary statistics and loss of information in the presence of nuisance parameters. *J. Statist. Plann. Inference* **21**, 139-160.

[Bh91] Bhapkar, V.P.(1991). Loss of information in the presence of nuisanse parameters and partial sufficiency. *J. Statist. Plann. Inference* **28**, 185-203.

[F25] Fisher, R.A.(1925). Theory of statistical estimation. *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **22**, 700-725.

[G80] Godambe, V.P.(1980). On sufficiency and ancillarity in the presence of a nuisance parameter. *Biometrika* **67**, 155-162.