

# The Atkin inner product and the Atkin orthogonal polynomials for $\Gamma_0(N)$

島根大学総合理工学部 堤 裕之 (Hiroyuki Tsutsumi)

平成 11 年 4 月 26 日

## 1 はじめに

表題にある通り、今回報告させて頂いた話は、元来 Atkin によるものです。しかし、Atkin による(そのあとの金子-Zagier も同様)話は、 $SL_2(\mathbb{Z})$  固有の情報が多く使われ、その他の合同部分群にすぐに拡張できるわけではありませんでした。今回は特に合同部分群の中でも、楕円曲線との関係から重要な  $\Gamma_0(N)$  型への拡張を試みましたが、このような真に  $SL_2(\mathbb{Z})$  の部分となっている群以外へも拡張の試みが、特に九州大学の小池 正夫先生によってなされています。(そこでは私の場合と異なり、主に超幾何級数が使われます)

## 2 Atkin 内積

$\mathcal{H}$  を複素上半平面とし、 $\mathcal{M} := \mathbb{C}[j]$ 、但し  $j$  は楕円モジュラー関数、

$$j(\tau) = \frac{1}{q} + 744 + 196884q + 21493760q^2 + 864299970q^3 + \dots, \quad q = e^{2\pi i\tau}$$

とし、この  $j$  を通すことで、 $\mathcal{M}$  を  $SL_2(\mathbb{Z})$  の weight 0 の保型関数で、上半平面  $\mathcal{H}$  上正則、cusp では極を許すもの全体と同一視する。これにより、 $\mathbb{C}[j]$  には Hecke 作用素  $\{T_n\}$  が働く。Atkin は 1980 年代に  $\mathcal{M}$  に対して以下のことを示した。

**定理 2.1 (Atkin)** (i)  $\mathbb{C}[j]$  上の非退化な内積  $(\ , \ )$  で  $(f|T_n, g) = (f, g|T_n)$  が全ての  $f, g \in \mathbb{C}[j], n \geq 0$  について成り立つものが本質的に一意に存在する。

(ii) この内積に関する直交多項式系を  $\{A_n(j)\}_{n \geq 0}$ 、 $A_n(j)$  は  $n$  次モニック、とする。  $A_n(j) \in \mathbb{Q}[j]$  であり、更に  $p$  を素数、 $n_p = \deg ss_p(j)$  とするとき、

$$A_{n_p}(j) \bmod p = ss_p(j)$$

が成り立つ。ここで、 $ss_p$  は標数  $p$  の超特異楕円曲線の  $j$  不変量を根にもつ多項式で以下のように定義される。

$$ss_p(j) := \prod_{E/\mathbb{F}_p, \text{supersingular}} (j - j(E)) \in \mathbb{F}_p[j].$$

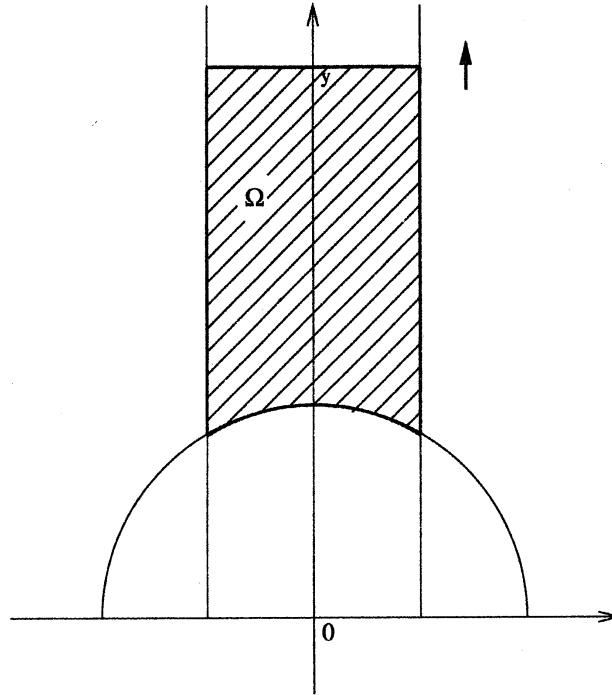


図 1:  $SL_2(\mathbb{Z})$  の基本領域と  $\Omega_y$

この内積はその性質から重み正の保型形式の空間の上に定義されている Petersson 内積の類似物と考えられるが、実際に以下の事実が成立する。

定理 2.2 (Borchers) ( , ) で Atkin 内積を表すことにする。このとき、

$$(f, g) = \frac{1}{\text{vol}(SL_2(\mathbb{Z}) \setminus \mathcal{H})} \lim_{y \rightarrow \infty} \int_{\Omega_y} f \cdot g \frac{dx dy}{y^2}$$

ここで、 $\Omega_y$  は実軸と実軸に平行な直線  $\Im(\tau) = y, (y \gg 1)$  に挟まれた領域と  $SL_2(\mathbb{Z})$  の標準的な基本領域との共通部分を表す。(図 1 を参照)

この内積を他の合同部分群、今回は特に  $\Gamma_0(N)$  なる群へ拡張することを考える。

$$\Gamma_0(N) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}) \mid c \equiv 0 \pmod{N} \right\}$$

Atkin 内積には同値な幾つかの定義があるが、この内の 1 つに次がある。

$$(f, g) = \text{constant term of } f \cdot g E_2 \text{ as Laurent series in } q = e^{2\pi i \tau}.$$

ここで、 $E_2$  は  $SL_2(\mathbb{Z})$  の重み 2 の Eisenstein series であり、以下の与えられる。

$$E_2(\tau) = 1 - 24 \sum_{m=1}^{\infty} \left( \sum_{d|m} d \right) q^m.$$

この定義を基に  $\Gamma_0(N)$  なる合同部分群について Atkin 内積を拡張し、今までに述べた 2 つの定理が同様に成立することを確かめることが出来る。すなわち

**定義 2.3**  $\mathcal{M}^{(N)}$  を  $\mathcal{H}$  で正則な  $\Gamma_0(N)$  の保型関数で, 無限遠点以外の任意の *cusp* で正則, 無限遠点では極を許すもの全体から成る集合とする.  $f, g \in \mathcal{M}^{(N)}$  に対して内積  $(\ , \ )_{(N)}$  を,

$$(f, g)_{(N)} = \text{constant term of } f \cdot g E_2^{(N)} \text{ as Laurent series in } q$$

で定義する。ここで,  $E_2^{(N)}$  は  $\Gamma_0(N)$  の無限遠点に関する重み 2 の Eisenstein series である。

**注意**  $k \geq 3$  に対して  $\Gamma_0(N)$  の無限遠点に関する重み  $k$  の Eisenstein series は,

$$E_k^{(N)}(\tau) := \frac{1}{2} \sum_{\substack{c, d \in \mathbb{Z} \\ (cN, d) = 1}} \frac{1}{(cN\tau + d)^k}$$

で定義される. 上記  $E_2^{(N)}$  は  $E_k^{(N)}$  を Fourier 展開したものを形式的に  $k = 2$  とした級数によって定義される。これは少々長いが, 以下のような級数になる。

$$E_2^{(N)}(\tau) = \prod_{p|N} \frac{p^2}{p^2 - 1} \sum_{e|N} \frac{\mu(e)}{e^2} \left(1 - 24 \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{d|N} d\right) q^{\frac{N}{e}m}\right).$$

ここで,  $p$  は素数を表し,  $\mu$  は Möbius 関数のことである。

**定理 2.4**  $\{T_n^{(N)}\}$  を  $\Gamma_0(N)$  に関する Hecke 作用素とし,  $n$  と  $N$  は互いに素な正の整数であるとする. このとき, 全ての  $f, g \in \mathcal{M}^{(N)}$  について,

$$(f|T_n^{(N)}, g)_{(N)} = (f, g|T_n^{(N)})_{(N)}$$

が成立する。

**定理 2.5** 定理 2.2 と同様, 以下の関係が Poincare 計量との間に成立する。

$$(f, g) = \frac{1}{\text{vol}(\Gamma_0(N) \backslash \mathcal{H})} \lim_{\Omega \rightarrow \mathcal{F}} \int_{\Omega} f \cdot g \frac{dx dy}{y^2}$$

ここで,  $\mathcal{F}$  は  $\Gamma_0(N) \backslash \mathcal{H}$  の虚軸について対象な基本領域で,  $\Omega$  は無限遠点に付いては実軸と平行な直線で, その他の *cusp* では *cusp* に中心を持つ十分小さい円で基本領域を切り取った領域を表す.(図 2 参照) また, 極限は実軸と平行な直線を無限遠に, 無限遠以外の *cusp* 中心の小円の半径を 0 に近づけることを意味する。

これら 2 つの定理の証明の為に, 無限遠点に関する重み 2 の Eisenstein series の  $\Gamma_0(N)$  に関する変換公式を用いた. 色々な文献をあたっても直接この公式を載せているものを見つけないことが出来なかったので, 参考までに以下に書いておく。

$$E_2^{(N)}\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) = (c\tau + d)^2 E_2^{(N)}(\tau) + \frac{6c(c\tau + d)}{\pi i [SL_2(\mathbb{Z}) : \Gamma_0(N)]}, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N).$$

証明は基本的に, いわゆる Hecke trick を用いるものだが, 特定の合同部分群に関しては  $SL_2(\mathbb{Z})$  と同様な簡単な証明法があるので, 後でそれを紹介する。

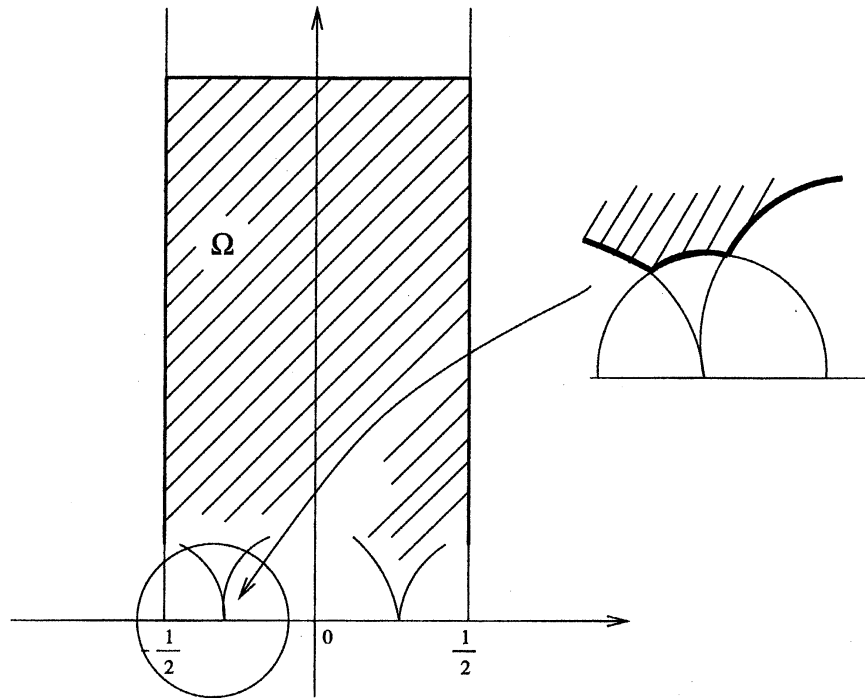


図 2:  $\Gamma_0(N)$  の基本領域と  $\Omega$

### 3 Atkin の直交多項式系

ここからは特に合同部分群として  $SL_2(\mathbb{Z}), \Gamma_0(2), \Gamma_0(3), \Gamma_0(4)$  に話を限る. これらの群は  $SL_2(\mathbb{Z})$  の合同部分群の中でも特に数論的三角群と呼ばれ, 更に  $\Gamma_0(N)$  型の群で数論的三角群になっているものはこれで尽くされている.  $\Gamma = SL_2(\mathbb{Z}), \Gamma_0(2), \Gamma_0(3), \Gamma_0(4)$  と置いたとき,  $\Gamma \backslash \mathcal{H}$  をコンパクト化したリーマン面の種数は 0 であり, これはすなわち  $\Gamma$  に関する重み 0 の保型関数  $j$  で  $\mathcal{M}^{(N)} = \mathbb{C}[j]$  となるものが存在することを示している.  $SL_2(\mathbb{Z})$  のときは, いわゆる楕円モジュラー関数  $j = j(\tau)$  であることは既に述べた通りである. これは,  $\mathcal{M}^{(N)}$  が  $j$  の多項式環であることを意味しており, Atkin 内積はこの多項式環上の内積である. このことから  $\mathcal{M}^{(N)}$  の中に Atkin 内積に関する直交多項式の系列を考える事が可能である. この直交多項式の系列を  $\{A_n^{(N)}(j)\}_{n \geq 0}$  と置き  $\Gamma_0(N)$  に関する Atkin の直交多項式系と呼ぶことにする. この多項式系は特に  $SL_2(\mathbb{Z})$  のとき, 超幾何級数や楕円曲線の超特異多項式と結び付き, 様々な興味深い性質を持つのであるが,  $SL_2(\mathbb{Z})$  と同種の合同部分群である  $\Gamma_0(2), \Gamma_0(3), \Gamma_0(4)$  についても同様のことが成り立たないか考えることがこの section の目的である. 特に今回は超幾何級数との関係について述べる.

まず,  $\Gamma_0(2), \Gamma_0(3), \Gamma_0(4)$  での  $j$  を具体的に書き下す. これらは定数項の違いはあるが, Thompson 級数と呼ばれるものなので, そこで使われる記号を用いる. しかしながら, この定数項の違いは無視できないものであることを注意しておく. また, この section の定理の中の  $SL_2(\mathbb{Z})$  に関する部分は全て金子-Zagier の論文 [6] による.

$$\cdot SL_2(\mathbb{Z}) \quad j = j(\tau) = \frac{1}{q} + 744 + 196884q + 21493760q^2 + 864299970q^3 \dots,$$

$$\cdot \Gamma_0(2) \quad j = T_{2B}(\tau) = \frac{E_4^{(2)}(\tau)}{t_2(\tau)} + 64 = \frac{1}{q} + 40 + 276q + 2048q^2 + 11202q^3 + \dots,$$

$$\cdot \Gamma_0(3) \quad j = T_{3B}(\tau) = \frac{(\eta(\tau)\eta(3\tau))^6}{t_3(\tau)} + 27 = \frac{1}{q} + 15 + 54q - 76q^2 - 243q^3 + \dots,$$

$$\cdot \Gamma_0(4) \quad j = T_{4C}(\tau) = \frac{\Theta(\tau)^4}{t_4(\tau)} = \frac{1}{q} + 8 + 20q - 62q^3 + 216q^5 - 641q^7 + 1636q^9 + \dots$$

ここで,  $t_2, t_3, t_4, \Theta, \eta$  はそれぞれ以下で表される関数である.

$$\Theta(\tau) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} q^{n^2}, \quad \eta(\tau) = q^{\frac{1}{24}} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n) \text{ (Dedekind } \eta \text{ function)},$$

$$t_2(\tau) = \frac{\eta(2\tau)^{16}}{\eta(\tau)^8}, \quad t_3(\tau) = \frac{\eta(3\tau)^{18}}{\eta(\tau)^6}, \quad t_4(\tau) = \frac{\eta(4\tau)^8}{\eta(2\tau)^4}.$$

注意 上で定義した  $t_2, t_3, t_4$  という関数は  $SL_2(\mathbb{Z})$  の場合の  $\Delta = \eta(\tau)^{24}$  と以下の点で類似した関数である.

- i) 無限遠点のみに零点を持つ.
- ii) 対数微分により重み 2 の *Eisenstein series* となる.

実際に次のようになっている.

$$\frac{1}{2\pi i} \frac{t_2'(\tau)}{t_2(\tau)} = E_2^{(2)}(\tau), \quad \frac{1}{4\pi i} \frac{t_3'(\tau)}{t_3(\tau)} = E_2^{(3)}(\tau), \quad \frac{1}{2\pi i} \frac{t_4'(\tau)}{t_4(\tau)} = E_2^{(4)}(\tau).$$

もちろんこの事実から  $E_2^{(N)}$ ,  $N = 2, 3, 4$  の変換公式を出すことも可能である.

次に超幾何級数と Atkin の直交多項式との関係を述べる.  $SL_2(\mathbb{Z})$  の場合にこれを始めて行ったのは Atkin で, 彼はこの事実を経由して直交多項式系が標数正の楕円曲線に対して定義される超特異多項式 ( $ss_p$ ) と結び付くことを示した. 更に, 金子-Zagier はこの超幾何と結び付く部分を改良し, 直交多項式系がある 3 項漸化式を持つことを示し, さらには, 直交多項式の explicit な表示を与えた.  $\Gamma_0(2), \Gamma_0(3), \Gamma_0(4)$  の場合も全く同様の事が言える.

定理 3.1  $F$  を超幾何級数, すなわち,

$$F(a, b, c; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(1)_n (c)_n} x^n$$

として,

$$\frac{F\left(\frac{5}{4}, \frac{3}{4}, 1; 64x\right)}{F\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, 1; 64x\right)} = \frac{1}{1 - \frac{a_1x}{1 - \frac{a_2x}{1 - \frac{a_3x}{\dots}}}} \quad (1)$$

のように連分数展開を行う. この連分数展開の  $n$  次近似を

$$f_n(x) = \frac{1}{1 - \frac{a_1x}{1 - \frac{a_2x}{1 - \frac{\dots}{1 - a_{2n-1}x}}}}$$

と置くと,  $f_n(x) = \frac{h_n(x)}{g_n(x)}$ ,  $g_n, h_n$  は  $g_n(0) = h_n(0) = 1$ ,  $\deg g_n = n$ ,  $\deg h_n = n - 1$  と書ける. このとき,

$$A_n^{(2)}(T_{2B}) = T_{2B}^n \cdot g_n\left(\frac{1}{T_{2B}}\right)$$

が成立する. なお,  $SL_2(Z), \Gamma_0(3), \Gamma_0(4)$  の場合は式 (1) をそれぞれ,

$$\frac{F\left(\frac{5}{12}, \frac{13}{12}, 1; 1728x\right)}{F\left(\frac{5}{12}, \frac{1}{12}, 1; 1728x\right)},$$

$$\frac{F\left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, 1; 27x\right)}{F\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1; 27x\right)},$$

$$\frac{F\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 1; 16x\right)}{F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1; 16x\right)}$$

に置き換えれば良い.

この事実と直交多項式の古典的な事実を用いることで容易に次の 3 項漸化式を示せる.

系 1  $\{A_n^{(N)}\}$ ,  $N = 1, 2, 3, 4$  はそれぞれ以下の漸化式を満たす.

$$\cdot SL_2(\mathbb{Z}) \quad A_0^{(1)}(j) = 1, \quad A_1^{(1)}(j) = j - 720,$$

$$A_{n+1}^{(1)}(j) = \left( j - 24 \frac{144n^2 - 29}{(2n+1)(2n-1)} \right) A_n^{(1)}(j) - 36 \frac{(12n-13)(12n-7)(12n-5)(12n+1)}{n(n-1)(2n-1)^2} A_{n-1}^{(1)}(j).$$

$$\cdot \Gamma_0(2) \quad A_0^{(2)}(T_{2B}) = 1, \quad A_1^{(2)}(T_{2B}) = T_{2B} - 48,$$

$$A_{n+1}^{(2)}(T_{2B}) = \left( T_{2B} - 8 \frac{16n^2 - 7}{(2n+1)(2n-1)} \right) A_n^{(2)}(T_{2B}) - 4 \frac{(16n^2 - 1)(4n-3)(4n-5)}{n(n-1)(2n-1)^2} A_{n-1}^{(2)}(T_{2B}).$$

$$\cdot \Gamma_0(3) \quad A_0^{(3)}(T_{3B}) = 1, \quad A_1^{(3)}(T_{3B}) = T_{3B} - 18,$$

$$A_{n+1}^{(3)}(T_{3B}) = \left( T_{3B} - 3 \frac{18n^2 - 7}{(2n+1)(2n-1)} \right) A_n^{(3)}(T_{3B}) - \frac{9(9n^2 - 1)(3n-2)(3n-4)}{4n(n-1)(2n-1)^2} A_{n-1}^{(3)}(T_{3B}),$$

$$\cdot \Gamma_0(4) \quad A_0^{(4)}(T_{4C}) = 1, \quad A_1^{(4)}(T_{4C}) = T_{4C} - 8,$$

$$A_{n+1}^{(4)}(T_{4C}) = (T_{4C} - 8) A_n^{(4)}(T_{4C}) - 4 \frac{(2n+1)(2n-3)}{n(n-1)} A_{n-1}^{(4)}(T_{4C}).$$

更に, explicit formula は以下のようになる.

系 2 モニックな多項式  $U_n^{(N)}$ ,  $N = 1, 2, 3, 4$  を以下で定義する.

$$\begin{aligned} j^n F \left( \frac{1}{12}, \frac{5}{12}, 1; \frac{1728}{j} \right) &= U_n^{(1)}(j) + O \left( \frac{1}{j} \right), \\ T_{2B}^n F \left( \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, 1; \frac{64}{T_{2B}} \right) &= U_n^{(2)}(j) + O \left( \frac{1}{T_{2B}} \right), \\ T_{3B}^n F \left( \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1; \frac{27}{T_{3B}} \right) &= U_n^{(3)}(j) + O \left( \frac{1}{T_{3B}} \right), \\ T_{4C}^n F \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1; \frac{16}{T_{4C}} \right) &= U_n^{(4)}(j) + O \left( \frac{1}{T_{4C}} \right). \end{aligned}$$

このとき,  $n \geq 0$  について,

$$A_n^{(1)}(j) = \sum_{m=0}^{\infty} (-12)^3 m \binom{n + \frac{1}{12}}{m} \binom{n - \frac{7}{12}}{m} \binom{2n-1}{m}^{-1} U_{n-m}^{(1)}(j),$$

$$\begin{aligned}
A_n^{(2)}(T_{2B}) &= \sum_{m=0}^{\infty} (-64)^m \binom{n + \frac{1}{4}}{m} \binom{n - \frac{1}{4}}{m} \binom{2n-1}{m}^{-1} U_{n-m}^{(2)}(T_{2B}), \\
A_n^{(3)}(T_{3B}) &= \sum_{m=0}^{\infty} (-27)^m \binom{n + \frac{1}{3}}{m} \binom{n - \frac{1}{3}}{m} \binom{2n-1}{m}^{-1} U_{n-m}^{(3)}(T_{3B}), \\
A_n^{(4)}(T_{4C}) &= \sum_{m=0}^{\infty} (-16)^m \binom{n + \frac{1}{2}}{m} \binom{n - \frac{1}{2}}{m} \binom{2n-1}{m}^{-1} U_{n-m}^{(4)}(T_{4C})
\end{aligned}$$

が成立する.

以上, 特に数論的三角群についてのみ直交多項式系を決定することが出来ましたが, これら以外にも種数が0になるような合同部分群がいくつか存在します. そのような群に対しても, 直交多項式系を完全に決定すべく, 現在研究を進めています. このこと以外にも楕円曲線との関係や, 多項式の零点の分布など, まだまだ調べねばならない事が多くあります.

最後に, この話を進めるにあたって多くの有益な助言や情報を提供して下さった, 九州大学の小池 正夫先生, また特に指導教官である金子 昌信先生に感謝を表したいと思います.

## 参考文献

- [1] Richard E. Borcherds. Automorphic forms with singularities on grassmannians. *Inv.Math.*, Vol. 132, pp. 491–562, 1998.
- [2] C.F.Gauss. Disquisitiones generales circa seriem infinitarn  $1 + \frac{\alpha\beta}{1\cdot\gamma}x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1\cdot2\cdot\gamma(\gamma+1)}xx + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1\cdot2\cdot3\cdot\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}x^3 + etc.$  In *Werke III*, pp. 125–162. Pars prior, 1812.
- [3] D.Zagier. Introduction to modular forms. In *From Number Theory to Physics*, pp. 238–291. Springer, 1992.
- [4] J.H.Conway and S.P.Norton. Monstrous moonshine. *Bull. London Math. Soc.*, Vol. 11, pp. 308–339, 1979.
- [5] M.Kaneko. 楕円曲線の  $j$  不変量に関する話題. 代数学シンポジウム報告集, pp. 96–112, 山形市遊学館, 1996.
- [6] M.Kaneko and D.Zagier. Supersingular  $j$ -invariants, hypergeometric series and Atkin's orthogonal polynomials. *AMS/IP Studies in Advanced Mathematics*, Vol. 7, pp. 97–126, 1998.