数理解析研究所講究録
1103 巻 1999 年 131-137

Representations of finite groups and Hilbert modular forms

東京理大理工　浜畑芳紀　(Yoshinori Hamahata)

1. Hilbert modular forms.

K を n 次総実代数体とし, $K \hookrightarrow \mathbb{R}$, $\quad x \mapsto x^{(i)} \quad (i=1,2,\cdots,n)$ を n 個の埋め込みとする. $\mathfrak{o}_K$ は K の整数環とする. $\mathfrak{H}=\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z)>0\}$ は上半平面で, $\mathfrak{H}^n$ は n 個の直積とする. $SL_2(\mathfrak{o}_K)$ は $\mathfrak{H}^n$ に次のように作用する : $\gamma=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathfrak{o}_K)$ と $z=(z_1,\cdots,z_n) \in \mathfrak{H}^n$ に対して,

$$\gamma \cdot z=\left(\frac{a^{(1)}z_1+b^{(1)}}{c^{(1)}z_1+d^{(1)}},\cdots,\frac{a^{(n)}z_1+b^{(n)}}{c^{(n)}z_1+d^{(n)}}\right). \tag{1}$$

$\mathfrak{o}_K$ の ideal $\mathfrak{n}$ に対して,

$$\Gamma(\mathfrak{n})=\{\gamma \in SL_2(\mathfrak{o}_K) \mid \gamma \equiv 1_2 \pmod{\mathfrak{n}}\}$$

とおく. $\Gamma(\mathfrak{n})$ も $\mathfrak{H}^n$ へ (1) のように作用する. また, $\Gamma(\mathfrak{n})$ は, $\mathbb{P}^1(K)=K \cup \{\infty\}$ に 1 次分数変換で作用する. $\Gamma(\mathfrak{n}) \backslash \mathbb{P}^1(K)$ の元を $\Gamma(\mathfrak{n})$ の cusp という. 各 $m \in \mathbb{N}$ について

$$j_{2m}(\gamma,z)=\prod_{i=1}^{n}(c^{(i)}z_i+d^{(i)})^{-2m}$$

とおく. 但し, $\gamma=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2^+(K)$ とする. さらに, $\gamma \in GL_2^+(K)$ に対して $f|_{2m}[\gamma]=f(\gamma z)j_{2m}(\gamma,z)$ とおく.

定義. $\quad f:\mathfrak{H}^n \to \mathbb{C}$ が $\Gamma(\mathfrak{n})$ に対する weight $2m$ の Hilbert cusp form とは, 次の 3 条件をみたすこと :

1) f は $\mathfrak{H}^n$ 上で正則,

2) $\forall \gamma \in \Gamma(\mathfrak{n})$ について, $f|_{2m}[\gamma]=f$,

3) f は $\Gamma(\mathfrak{n})$ の各 cusp で正則で, $\forall\gamma \in GL_2^+(K)$ について, $f|_{2m}[\gamma]$ の Fourier 展開の定数項は 0.

$\Gamma(\mathfrak{n})$ に対する weight $2m$ の Hilbert cusp form 全体のなす集合を $S_{2m}(\Gamma(\mathfrak{n}))$ とおくと, $S_{2m}(\Gamma(\mathfrak{n}))$ は $\mathbb{C}$ 上の有限次元ベクトル空間になる. $SL_2(\mathfrak{o}_K)$ は, $(\gamma, f) \mapsto f|_{2m}[\gamma]$ により $S_{2m}(\Gamma(\mathfrak{n}))$ に作用し, $\Gamma(\mathfrak{n})$ は自明に作用する. よって, $SL_2(\mathfrak{o}_K)/\Gamma(\mathfrak{n})$ は $S_{2m}(\Gamma(\mathfrak{n}))$ に作用する。$\pi : SL_2(\mathfrak{o}_K)/\Gamma(\mathfrak{n}) \to \mathrm{Aut}(S_{2m}(\Gamma(\mathfrak{n})))$ をそれに付随する表現とする. tr π における既約指標 $\bullet$ の重複度を $m(\bullet)$ と書く.

2. Representations of $SL_2(\mathbb{F}_q)$.

q を奇素数のべきとし, $\mathbb{F}_q$ を q 個の元からなる有限体とする. $q^* = q(-1)^{(q-1)/2}$ とおく. η を $\mathbb{F}_q$ の非平方数とし, $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $M' = \begin{pmatrix} 1 & \eta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とおく. そのとき, M, M' のそれぞれの共役類の上で次のような値をとり, 他の共役類の上で同じ値をとる既約指標の対が 2 つある:

	M	M'
ψ^+	$\frac{1+\sqrt{q^*}}{2}$	$\frac{1-\sqrt{q^*}}{2}$
ψ^-	$\frac{1-\sqrt{q^*}}{2}$	$\frac{1+\sqrt{q^*}}{2}$
ψ'^+	$\frac{-1+\sqrt{q^*}}{2}$	$\frac{-1-\sqrt{q^*}}{2}$
ψ'^-	$\frac{-1-\sqrt{q^*}}{2}$	$\frac{-1+\sqrt{q^*}}{2}$

ここで, ψ^+, ψ^- は $(q+1)/2$ 次で, ψ'^+, ψ'^- は $(q-1)/2$ 次である. これらを class (G) の既約指標と呼ぶことにする.

3. Known results.

この節では, $\mathfrak{n}$ は素 ideal $\mathfrak{p}$ で $q = N\mathfrak{p}$ が奇素数のべきであるようなもののみを考える. $SL_2(\mathfrak{o}_K)/\Gamma(\mathfrak{n}) \cong SL_2(\mathbb{F}_q)$ で, $SL_2(\mathbb{F}_q)$ が $S_{2m}(\Gamma(\mathfrak{p}))$ に作用している. このとき, $q \equiv 1 \pmod 4$ のとき, tr π に ψ^+, ψ^- のみが

現われ, $q \equiv 3 \pmod 4$ のとき, $\mathrm{tr}\,\pi$ に ψ'^{+}, ψ'^{-} のみが現われる. それゆえ, 次の重複度の一次結合

$$m := m(\psi^{+}) - m(\psi^{-}) + m(\psi'^{+}) - m(\psi'^{-}) \tag{2}$$

は無駄のある表示であるが, (2) を一般化した形の重複度の一次結合を後で扱いたいので, 敢えて (2) の形で表示することにする.

定理 (Hecke) $n=1,\ m=1,\ \mathfrak{p}=(p)$ のとき,

$$m = \begin{cases} 0 & (p \equiv 1 \pmod 4), \\ h_{\mathbb{Q}(\sqrt{-p})} & (p \equiv 3 \pmod 4). \end{cases}$$

ここで, $h_{\mathbb{Q}(\sqrt{-p})}$ は $\mathbb{Q}(\sqrt{-p})$ の類数である.

定理 (Eichler) $n=1,\ m=1,\ \mathfrak{p}=(p)$ のとき,

$$m = \frac{1}{\sqrt{p^*}} \sum_{i=1}^{p-1} \left(\frac{i}{p}\right) \nu(i).$$

但し, $p^* = p(-1)^{(p-1)/2}$, $\mathrm{e}[\bullet] = \exp(2\pi i \bullet)$, $\nu(i) = -\frac{\mathrm{e}\left[\frac{i}{p}\right]}{1-\mathrm{e}\left[\frac{i}{p}\right]}$.

定理 (Saito, Yoshida) $n \geq 1,\ m \geq 2$ のとき,

$$|m| = 2^{n-1} \sum_{L/K} \frac{h_L}{h_K}.$$

但し, 和は L/K は K の総虚 2 次拡大で, 相対判別式が $\mathfrak{p}$ なるものをわたる.

定理 (Meyer-Sczech) $n=2,\ m \geq 1,\ (\mathfrak{p}, 6d_K)=1$ のとき,

$$m = -2 \sum_{L/K} \frac{h_L}{h_K}.$$

ここに, d_K は K の判別式で, 和は L/K は K の総虚 2 次拡大で, 相対判別式が $\mathfrak{p}$ なるものをわたる.

定理 (Saito) $n=2,\ m=1,\ h_K=1, (\mathfrak{p}, 6d_K)=1,\ \mathfrak{p}=(\mu)$ (μ は総正) のとき,

$$m=\frac{1}{\sqrt{q^*}}\cdot\frac{2}{[U:U(\mathfrak{p})]}\sum_{\alpha\in(\mathfrak{o}_K/\mathfrak{p})^\times}\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{p}}\right)\nu(\alpha).$$

ここに, $q=N\mathfrak{p},\ q^*=q(-1)^{(q-1)/2}$ で, $\left(\frac{}{\mathfrak{p}}\right)$ は mod $\mathfrak{p}$ の平方剰余記号である.

4. 結果.

以下, K は実2次体で, $\mathfrak{n}$ は次のような形の ideal のみを考える: $\mathfrak{p}_1, \cdots, \mathfrak{p}_t$ は相異なる素 ideal で $q_i=N\mathfrak{p}_i,\ \mathfrak{n}=\mathfrak{p}_1\cdots\mathfrak{p}_t$ とする. そのとき, $SL_2(\mathfrak{o}_K)/\Gamma(\mathfrak{n})\cong\prod_{i=1}^t SL_2(\mathbb{F}_{q_i})$ で $SL_2(\mathfrak{o}_K)/\Gamma(\mathfrak{n})$ の既約指標$=\prod_{i=1}^t SL_2(\mathbb{F}_{q_i})$ の既約指標である.

定理 $n=2,\ m\geq 1,\ h_K=1,\ \mathfrak{n}=\mathfrak{p}_1\cdots\mathfrak{p}_t=(\mu)$ (μ は総正), $(\mathfrak{n}, 6d_K)=1$ のとき,

$$\sum_{e_1,\cdots,e_t\in\{\pm1\}}\sum_{i=1}^t\sum_{\varphi_i\in\{\psi_i,\psi_i'\}}e_1\cdots e_t\cdot m(\varphi_1^{e_1}\cdots\varphi_t^{e_t})$$
$$=\frac{1}{\sqrt{q_1^*\cdots q_t^*}}\cdot\frac{2^t}{[U:U(\mathfrak{n})]}\sum_{\alpha\in(\mathfrak{o}_K/\mathfrak{n})^\times}\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{n}}\right)\nu(\alpha).$$

但し, $q_i^*=q_i(-1)^{(q-1)/2}$, $\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{n}}\right):=\prod_{i=1}^t\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{p}_i}\right)$. $\nu(\alpha)$ について説明するために記号の準備をする.

$U(\mathfrak{n})$ を K の単数で mod $\mathfrak{n}$ で 1 と合同なもの全体のなす群とし, $[U:U(\mathfrak{n})]=t$ とする. $\mathfrak{o}_K=\mathbb{Z}+\mathbb{Z}w\quad(0<w'<1<w)$ となる $w\in\mathfrak{o}_K$ がある. w は次のような連分数展開をもつ:

$$w=b_1-\cfrac{1}{b_2-\cfrac{1}{\ddots-\cfrac{1}{b_r-\cfrac{1}{b_1}}}}.$$

そのとき, $1 \leq k \leq r$ なる各整数 k に対して正整数 p_k, q_k を

$$\frac{p_k}{q_k} = b_1 - \cfrac{1}{b_2 - \cfrac{1}{\ddots - \cfrac{1}{b_{k-1} - \cfrac{1}{b_k}}}}$$

によって定義する. $6d_K$ と素な $\alpha \in \mathfrak{o}_K$ に対して, $\nu(\alpha)$ を次のように定義する:

$$\nu(\alpha) := \sum_i \frac{\mathbf{e}\left[\mathrm{tr}\left(\frac{\alpha}{\mu}\right)\cdot\frac{p_i - q_i w'}{w-w'}\right]\cdot\mathbf{e}\left[\mathrm{tr}\left(\frac{\alpha}{\mu}\right)\cdot\frac{-p_{i-1}+q_{i-1}w'}{w-w'}\right]}{\left(1-\mathbf{e}\left[\mathrm{tr}\left(\frac{\alpha}{\mu}\right)\cdot\frac{p_i-q_iw'}{w-w'}\right]\right)\left(1-\mathbf{e}\left[\mathrm{tr}\left(\frac{\alpha}{\mu}\right)\cdot\frac{-p_{i-1}+q_{i-1}w'}{w-w'}\right]\right)}$$
$$+\sum_j \frac{\mathbf{e}\left[\mathrm{tr}\left(\frac{\alpha}{\mu}\right)\cdot\frac{p_j-q_jw'}{w-w'}\right]}{\left(1-\mathbf{e}\left[-\mathrm{tr}\left(\frac{\alpha}{\mu}\right)\cdot\frac{p_j-q_jw'}{w-w'}\right]\right)}\left\{-1+\frac{b_j}{1-\mathbf{e}\left[-\mathrm{tr}\left(\frac{\alpha}{\mu}\right)\cdot\frac{p_j-q_jw'}{w-w'}\right]}\right\},$$

ここに, i は $1 \leq i \leq rt$ をみたし, $\mathbf{e}\left[\mathrm{tr}\left(\frac{\alpha}{\mu}\right)\cdot\frac{p_i-q_iw'}{w-w'}\right]$ も $\mathbf{e}\left[\mathrm{tr}\left(\frac{\alpha}{\mu}\right)\cdot\frac{-p_{i-1}+q_{i-1}w'}{w-w'}\right]$ も 1 でないもの全体を動く. j も $1 \leq j \leq rt$ をみたし, $\mathbf{e}\left[\mathrm{tr}\left(\frac{\alpha}{\mu}\right)\cdot\frac{-p_{j-1}+q_{j-1}w'}{w-w'}\right] = 1$ となるもの全体を動く.

5. 証明の概略.

各 i に対して, $\eta_i \in \mathfrak{o}_K$ で $\left(\frac{\eta_i}{\mathfrak{p}_i}\right) = -1$, $\left(\frac{\eta_i}{\mathfrak{p}_j}\right) = 1 \quad (j \neq i)$ なるものをとる. 定理の左辺を m' とおく.

補題

$$m' = \sum_{i=1}^{t} \sum_{\epsilon_i \in \{1, \eta_i\}} \left(\frac{\epsilon_1 \cdots \epsilon_t}{\mathfrak{n}}\right) \mathrm{tr}\ \pi\left(\begin{pmatrix} 1 & \epsilon_1 \cdots \epsilon_t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right).$$

(1) $m = 1$ の場合: $X(\mathfrak{n})$ を $\Gamma(\mathfrak{n})$ から定義される Hilbert modular surface とし, $\widetilde{f}_{\epsilon_1\cdots\epsilon_t}$ を $(z_1, z_2) \mapsto (z_1 + \epsilon_1^{(1)} \cdots \epsilon_t^{(1)}, z_2 + \epsilon_1^{(2)} \cdots \epsilon_t^{(2)})$ によって

induce される $X(\mathfrak{n})$ の自己同型とする. Ω^2 を $X(\mathfrak{n})$ 上の正則 2-形式の層とすると, $S_2(\Gamma(\mathfrak{n})) = H^0(X(\mathfrak{n}), \Omega^2)$ である. $\mathrm{tr}\ \pi(\begin{pmatrix} 1 & \epsilon_1 \cdots \epsilon_t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}) = \mathrm{tr}(\widetilde{f}_{\epsilon_1\cdots\epsilon_t}|H^0(X(\mathfrak{n}), \Omega^2)$ となる. $H^2(X(\mathfrak{n}), \Omega^2) \cong H^0(X(\mathfrak{n}), \mathcal{O}_{X(\mathfrak{n})}))$ でその $\mathbb{C}$ 上の次元は 1 だから,

$$\mathrm{tr}(\widetilde{f}_{\epsilon_1\cdots\epsilon_t}|H^2(X(\mathfrak{n}), \Omega^2)) = \mathrm{tr}(\widetilde{f}_{\epsilon_1\cdots\epsilon_t}|H^0(X(\mathfrak{n}), \mathcal{O}_{X(\mathfrak{n})})) = 1.$$

よって,

$$\sum_{i=1}^{t} \sum_{\epsilon_i \in \{1,\eta_i\}} \left(\frac{\epsilon_1 \cdots \epsilon_t}{\mathfrak{n}}\right) \mathrm{tr}(\widetilde{f}_{\epsilon_1\cdots\epsilon_t}|H^2(X(\mathfrak{n}), \Omega^2)) = \sum_{i=1}^{t} \sum_{\epsilon_i \in \{1,\eta_i\}} \left(\frac{\epsilon_1 \cdots \epsilon_t}{\mathfrak{n}}\right) = 0.$$

また, $H^1(X(\mathfrak{n}), \mathcal{O}_{X(\mathfrak{n})}) = 0$が知られていて, $H^1(X(\mathfrak{n}), \Omega^2) \cong H^1(X(\mathfrak{n}), \mathcal{O}_{X(\mathfrak{n})}))$ なので,

$$\sum_{i=1}^{t} \sum_{\epsilon_i \in \{1,\eta_i\}} \left(\frac{\epsilon_1 \cdots \epsilon_t}{\mathfrak{n}}\right) \mathrm{tr}(\widetilde{f}_{\epsilon_1\cdots\epsilon_t}|H^1(X(\mathfrak{n}), \Omega^2)) = 0.$$

したがって,

$$m' = \sum_{i=1}^{t} \sum_{\epsilon_i \in \{1,\eta_i\}} \left(\frac{\epsilon_1 \cdots \epsilon_t}{\mathfrak{n}}\right) \left(\sum_{i=0}^{2} (-1)^i \mathrm{tr}(\widetilde{f}_{\epsilon_1\cdots\epsilon_t}|H^i(X(\mathfrak{n}), \Omega^2))\right)$$

と書ける. この右辺を正則 Lefschetz 固定点定理を使って書き直すと定理の右辺が得られる.

(2) $m \geq 2$ の場合: $D = X(\mathfrak{n}) - \Gamma(\mathfrak{n}) \setminus \mathfrak{H}^2$ とおき, $\mathcal{L} = \Omega^2(\log D)$ を $X(\mathfrak{n})$ 上の D に沿って対数極をもつ 3-形式のなす層とする. そのとき, $S_{2m}(\Gamma(\mathfrak{n})) = H^0(X(\mathfrak{n}), \mathcal{L}^{\otimes(m-1)} \otimes \Omega^2)$ となって, $\mathrm{tr}\ \pi(\begin{pmatrix} 1 & \epsilon_1 \cdots \epsilon_t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}) = \mathrm{tr}(\widetilde{f}_{\epsilon_1\cdots\epsilon_t}|H^0(X(\mathfrak{n}), \mathcal{L}^{\otimes(m-1)} \otimes \Omega^2)$ が成立する. $\mathcal{L}^{\otimes(m-1)}$ は $\overline{\Gamma(\mathfrak{n}) \setminus \mathfrak{H}^2}$ 上の ample 層の $X(\mathfrak{n}) \to \overline{\Gamma(\mathfrak{n}) \setminus \mathfrak{H}^2}$ による引き戻しであるから, 小平消滅定理により

$$H^i(X(\mathfrak{n}), \mathcal{L}^{\otimes(m-1)} \otimes \Omega^2) = 0 \qquad (i \geq 1)$$

が成立する. よって,

$$m' = \sum_{i=1}^{t} \sum_{\epsilon_i \in \{1,\eta_i\}} \left(\frac{\epsilon_1 \cdots \epsilon_t}{\mathfrak{n}}\right) \left(\sum_{i=0}^{2} (-1)^i \mathrm{tr}(\widetilde{f}_{\epsilon_1\cdots\epsilon_t}|H^i(X(\mathfrak{n}), \mathcal{L}^{\otimes(m-1)} \otimes \Omega^2))\right)$$

となる. $\mathcal{L}^{\otimes(m-1)}$ は D の回りで自明だから, 正則 Lefschetz 固定点定理を使う際に, $\mathcal{L}^{\otimes(m-1)} \otimes \Omega^2$ の代わりに Ω^2 に置き換えてもよい. したがって, $m \geq 2$ の場合が $m = 1$ の場合に帰着できる.

References

1. M. Eichler, *Einige Anwendung der Spurformel in Bereich der Modulkorrespondenzen*, Math. Ann., **168** (1967), 128-137.
2. Y. Hamahata, *The spaces of Hilbert cusp forms for totally real cubic fields and representations of $SL_2(\mathbb{F}_q)$*, J. Math. Sci. Univ. Tokyo, **5** (1998), 367-399.
3. E. Hecke, *Über das Verhalten der Integrale I Gattung bei beliebigen, insbesondere in der Theorie der elliptischen Modulfunktionen*, Abh. Math. Sem. Ham. Univ., **8** (1930), 271-281.
4. D. McQuillan, *A generalization of a theorem of Hecke*, Amer. J. Math., **84** (1964), 306-316.
5. W. Meyer and R. Sczech, *Über eine topologische und eine zahlentheoretische Anwendung von Hirzebruch's Spitzenauflösung*, Math. Ann., **240** (1979), 69-96.
6. H. Saito, *On the representation of $SL_2(\mathbb{F}_q)$ in the space of Hilbert modular forms*, J. Math. Kyoto Univ., **15** (1975), 101-128.

Yoshinori HAMAHATA
Department of Mathematics
Faculty of Science and Technology
Science University of Tokyo
Noda, Chiba, 278-8510, JAPAN