数理解析研究所講究録
1103 巻 1999 年 150-156

A bound for the Least Gaussian Prime ω in a given angle

松井 一
Matsui Hajime

$f(z)=\sum_{n\geq 1}a(n)e^{2\pi inz}$ を正則尖点形式であって, $SL_2(\mathbf{Z})$ に関するものとし, 重さ k とする. さらに f は全ての Hecke 作用素の同時固有関数であり, $a(1)=1$ であるとする. 素数 p に対し Ramanujan-Deligne の定理から $|a(p)|\leq 2p^{\frac{k-1}{2}}$ が知られているから, $2\cos\theta_p=a(p)p^{-\frac{k-1}{2}}$, $0\leq\theta_p\leq\pi$ によって実数列 $\{\theta_p\}$ を定めることができる. このとき佐藤-Tate 予想は次のように述べることができる.

Conjecture. 任意の開部分区間 $(a,b)\subset[0,\pi]$ について,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sharp\{p\leq x;\theta_p\in(a,b)\}}{\sharp\{p\leq x\}}=\frac{2}{\pi}\int_a^b\sin^2\theta d\theta.$$

これは現在でも未解決であるが, ひとつの十分条件は知られている. それを述べよう. f の m-次 symmetric power L-関数 $L_m(s)$ を,

$$L_m(s)=\prod_p\prod_{l=0}^m(1-e^{i(m-2l)\theta_p})^{-1}\quad(\mathrm{Re}(s)>1)$$

によって定義する. このとき全ての正整数 m について $L_m(s)$ が $\mathrm{Re}(s)\geq 1$ に正則解析接続されてそこで非零ならば, 佐藤-Tate 予想は正しいことが知られている.

現在までのところ, $m\leq 2$ に対しては $L_m(s)$ は整関数であることがわかっており ($m=3$ については最近 Kim-Shahidi [3] によって証明されたようである), $m=4,5$ に対しては全 s-平面に有理型解析接続され, $m=4$ のときは $\mathrm{Re}(s)\geq 1$ で正則だが, $m=5$ のときは $\mathrm{Re}(s)\geq 1$, $s\neq 1$ では正則だが, $s=1$ では高々 1 位の極, 高々 1 位の零点ということしか言えておらず, また $m\geq 6$ については何もわかっていないというのが現状である.

このように, 我々は佐藤-Tate 予想とはまだかなりの隔たりがあると言わざるを得ない. しかし, 現在までの結果を用いて, 佐藤-Tate 予想にどれだけ近づけるかという方向に関しては, 次の Serre の結果がある. 先の $\{\theta_p\}$ から, $a_p=2\cos\theta_p=a(p)p^{-\frac{k-1}{2}}$, $-2\leq a_p\leq 2$ として実数列 $\{a_p\}$ に対して定式化することにする.

Theorem (Serre, [9]). 任意の $\epsilon>0$ に対し, $a_p>2\cos\frac{2\pi}{7}-\epsilon$ を満たす無限個の素数が存在する. また $a_p>-2\cos\frac{2\pi}{7}+\epsilon$ を満たす無限個の素数が存在する. $2\cos\frac{2\pi}{7}=1.246\cdots$.

さらに Serre はそこで次の問題を提出している.

Problem. (i) 上の定理をより効果的にせよ. 例えば, $\epsilon > 0$ の関数 $\delta(\epsilon)$ で,

$$\limsup_{x \to +\infty} \frac{\sharp\{p \leq x; a_p > 2\cos\frac{2\pi}{7} - \epsilon\}}{\sharp\{p \leq x\}} \geq \delta(\epsilon)$$

を満たすものを求めよ.

(ii) $\epsilon > 0$ の関数 $B(\epsilon)$ で, $p \leq B(\epsilon)$ なる素数があって, $a_p > 2\cos\frac{2\pi}{7} - \epsilon$ を満たすものを求めよ.

このうち (i) は Solé [10] によって既に解かれている. 本稿で Serre の問題と言ったときには, この (ii) のこととする. おそらく Serre は次に述べる Lagarias-Montgomery-Odlyzko の結果を意識したのではないかと思われる. 以下本稿では $c_1, c_2, c_3, \cdots$ は全て計算可能な絶対正定数を表すことにする.

Theorem ([4]). K を有限次代数体, L を K の有限次 Galois 拡大体, $C \subset \mathrm{Gal}(L/K)$ をその Galois 群のある共役類の和集合とする. L で不分岐な K の素イデアル P に対し, P を割る L の素イデアルの Frobenius 自己同型が定める Galois 群のひとつの共役類を $[\frac{L/K}{P}]$ と表すことにする. このとき

$$NP \leq 2d_L^{c_1}$$

なる K の素イデアルがあって $[\frac{L/K}{P}] \in C$ となる. ここで N は絶対ノルム, d_L は L の判別式の絶対値である. また L の Dedekind ζ-関数に対する一般 Riemann 予想が成立すれば, 素イデアルを

$$NP \leq c_2 \log^2 d_L$$

にとることができる.

この Lagarias-Montgomery-Odlyzko の結果は, 代数体における Chebotarev の密度定理のひとつの定量版と言うことができる. 実際, [5] において, Galois 群の計算がひとつの動機であったと述べている. 先の Serre の問題の (ii) は, この定理のひとつの類似を狙ったものではないかと思われる.

さて Serre の問題からは少し離れるが, 並行して得られた関連するひとつの結果について述べよう. Lagarias-Montgomery-Odlyzko の結果は, 類指標の Hecke L-関数に対する解析的な計算によって得られるが, 量指標まで含めて考えたときに何が言えるかということである. このとき, Galois 群の共役類に対応するものとして何を考えたら良いかというのがまず問題となるが, ひとつの方向性として, 量指標の偏角の条件を付けることを試みる.

Main Theorem 1. K を虚 2 次体, L を K の有限次アーベル拡大体, C をその Galois 群の部分集合とする. χ を K の量指標で導手 H であり, 零でない整数 u があって全ての $a \in 1 + H$ に対し $\chi(a) = \left(\frac{a}{|a|}\right)^u$ となるものとする. また $\lambda < \mu \leq \lambda + 2\pi$ とする. こ

のとき K の素イデアル P で

$$NP \le \exp\left(\frac{b_1}{\sqrt{\mu-\lambda}}\log\left(NH(|u|+1)\right)\cdot\log^{\frac{3}{2}}\left(\frac{2\pi}{\mu-\lambda}+1\right)\right)$$

なるものがあり，$[\frac{L/K}{P}] \in C$ 且つ $\alpha < \arg(\chi(P)) < \beta$ を満たす．ここで b_1 は L, K のみに依存する正定数である．また L の Dedekind ζ-関数および K の量指標の L-関数に対する一般 Riemann 予想が成立すれば，素イデアル を

$$NP \le \frac{c_3\log^2 d_L}{(\mu-\lambda)^2}\log^2\left(NH(|u|+1)\right)\cdot\log^4\left(\frac{2\pi}{\mu-\lambda}+1\right)$$

にとることができる．

L, K を Gauss 数体，量指標 χ を $a \in K^\times$ に対し$\chi(a) = \left(\frac{a}{|a|}\right)^4$ とすれば，表題の通りの Gauss 素数に関する情報が得られる．

Main Theorem 1 は，Lagarias-Montgomery-Odlyzko の結果と比べてみると，K が虚 2 次体になっており，L/K をアーベル拡大としているという点でかなり限定されている．特に，Lagarias-Odlyzko [5] で解説しているように，アーベルとは限らない一般の拡大を扱うには，Artin L-関数のある種の和を類指標の Hecke L-関数の和に変換するテクニックが必要となるが，量指標が入ってくるとこれがうまくいかない．また b_1 が絶対正定数でないという点については，Siegel 零点が影響しているためであって，Lagarias-Montgomery-Odlyzko [4] では見事にこの困難を克服している．この応用もまだできていない．Siegel 零点に関することおよび Main Theorem 1 の証明については，あとで少し述べることにする．次に Serre の問題の部分的な解答について述べよう．次の結果を得ることができる．

Main Theorem 2. 任意の $\epsilon > 0$ について，

(i) $p \le k^{\frac{c_4}{\sqrt{\epsilon}}}$ なる素数があり，$a_p > -\epsilon$ を満たし，

(ii) $p \le k^{\frac{c_5}{\sqrt{\epsilon}}}$ なる素数があり，$-1-\epsilon < a_p < 1+\epsilon$ を満たす．

また $L_0(s)$, $L_1(s)$, $L_2(s)$ に対する一般 Riemann 予想が成立すれば，(i), (ii) において素数を $p \le \frac{c_6}{\epsilon^2}\log^2 k$ にとれる．

これは本来の Serre の問題では $a_p > 2\cos\frac{2\pi}{7} - \epsilon$ となる最小の素数を評価せよということであったが，$a_p > -\epsilon$ および$-1-\epsilon < a_p < 1+\epsilon$ に対してはできると言っている訳で，だいぶ弱いかたちになってしまっている．証明の概略を見ていこう．以下では一般 Riemann 予想を仮定しない，無条件の場合の (i) のみ解説する．

まず $L_1(s)$ に対して，素数をわたる和と零点をわたる和の間の等式を導く．これは解析的整数論において明示公式と呼ばれるものの一種である．そのために積分

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{2-i\infty}^{2+i\infty} -\frac{L_1'}{L_1}(s)k(s)ds$$

を 2 通りに計算する. ここで $k(s)$ は [4] でも用いられていた積分核で, $k(s)=k(s;x)=\left(\frac{x^{2s-2}-x^{s-1}}{s-1}\right)^2$ である. さてこのときの明示公式は

$$\sum_p \sum_{m\geq 1} a_p \log p \cdot \widehat{k}(p^m;x) \;=\; \sum_\rho -k(\rho;x), \tag{1}$$

ここで ρ は $L_1(s)$ の零点, また $\widehat{k}(v;x)$ は $k(s)$ の逆 Mellin 変換で, $v>0$ に対し,

$$\widehat{k}(v;x)=\widehat{k}(v)=\frac{1}{2\pi i}\int_{2-i\infty}^{2+i\infty} k(s;x)v^{-s}ds=\begin{cases} \dfrac{1}{v}\log\dfrac{v}{x^2} & \text{if } x^2\leq v\leq x^3, \\ \dfrac{1}{v}\log\dfrac{x^4}{v} & \text{if } x^3\leq v\leq x^4, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

で与えられる. このように正の実数の半直線 $v>0$ の上と下を truncate し, しかもほぼ v^{-1} で落ちていくようにできるのが, 積分核として $k(s)$ をとった利点である. (1) でまず $m\geq 2$ のところはあまり問題にならない. また (1) の右辺は, 零点の個数の公式, および $L_1(s)$ の零点のない領域

$$L_1(\sigma+it)\neq 0 \quad \text{on} \quad \sigma>1-\frac{c_6}{\log(k(t+1))} \tag{2}$$

により評価することができる. (2) については, Moreno [8] 参照. (2) の領域のうち, $t=0$ の部分に零点がないことを示すのがもっとも難しいのだが, これについてはあとで少し解説する. 以上により評価式, $x\geq 2$ に対し

$$\sum_p a_p \log p \cdot \widehat{k}(p;x) \;\ll\; \log^2 k \tag{3}$$

を得る. また Riemann ζ-関数 $L_0(s)$ に対して同様の解析を行なうことにより, $\sum_p \log p\cdot\widehat{k}(p;x)-\log^2 x\ll 1$ も得られる.

さて $(-\epsilon,2]\subset[-2,2]$ に対する特性関数を $C_{(-\epsilon,2]}(\,\cdot\,)$ とするとき, $a+\epsilon\leq(2+\epsilon)C_{(-\epsilon,2]}(a)$ に注意する. しかも $a+\epsilon$ について $a=2\cos\theta$ と変換して, 佐藤-Tate 測度 $\frac{2}{\pi}\sin^2\theta d\theta$ で積分すると, 値は ϵ となり常に正である. この場合は易しいことであるが, これは Solé [10] の手法である. Solé は [10] において, 第 2 種 Chebyshev 多項式の根で $[-2,2]$ を区切ったときのそれぞれの区間について, 同様の性質を持つ多項式系を構成しており, Problem (i) をこれを用いて解いている.

先に得られた評価式を代入していって,

$$\begin{aligned}(2+\epsilon)\sum_{a_p\in(-\epsilon,2]}\log p\cdot\widehat{k}(p;x) &= (2+\epsilon)\sum_p C_{(-\epsilon,2]}(a_p)\log p\cdot\widehat{k}(p;x)\\ &\geq \epsilon\sum_p\log p\cdot\widehat{k}(p;x)+\sum_p a_p\log p\cdot\widehat{k}(p;x)\\ &\geq \epsilon\log^2 x-c_7\log^2 k. \end{aligned}\tag{4}$$

ここで $x > k\sqrt{\frac{c_7}{\epsilon}}$ のとき, 右辺 > 0 であるから, $k(s)$ の逆 Mellin 変換の形から, $k^2\sqrt{\frac{c_7}{\epsilon}} < p \leq k^4\sqrt{\frac{c_7}{\epsilon}}$ なる素数があって $a_p \in (-\epsilon, 2]$ とならなければならない. したがって (i) が得られた.

次に Main Theorem 1 の証明の概略を述べる. ここでも一般 Riemann 予想を仮定しない無条件の場合のみを扱うことにする. 以下 b_2, b_3, b_4 は L, K のみに依る正定数を表すことにする. 今度は虚 2 次体の量指標の Hecke L-関数

$$L(s, \phi\chi^r) = \sum_I \frac{\phi\chi^r(I)}{NI^s} = \prod_P \left(1 - \phi\chi^r(P)NP^{-s}\right)^{-1} \quad (\mathrm{Re}(s) > 1)$$

に対して似た解析を行なう. ここでϕ はアーベル拡大 L/K に類体論によって対応する K のある合同イデアル類群の類指標, $r \in \mathbf{Z}$ である. (3) に対応する評価式として

$$\left| \sum_{NP:\,\mathrm{prime}} \phi\chi^r(P) \log NP \cdot \widehat{k}(NP; x) - \delta_{\phi\chi^r} \log^2 x \right| \leq b_2 \log^2 NH(|ur| + e).$$

が得られる. また主定理 2 の 証明で, Solé による, 特性関数を下から押える手法の代わりに, [7] において Selberg 多項式と呼ばれているものを使う. それは,

$$\begin{aligned} B_R(t) &= -\frac{1}{R+1}\sum_{r=1}^{R}\left\{\left(1 - \frac{r}{R+1}\right)\cot\left(\frac{\pi r}{R+1}\right) + \frac{1}{\pi}\right\}\sin 2\pi r t \\ &\quad + \frac{1}{2(R+1)^2}\left\{\frac{\sin\pi(R+1)t}{\sin\pi t}\right\}^2, \end{aligned}$$

とするとき,

$$S_K^-(t) = b - a - B_R(b-t) - B_R(t-a) \tag{5}$$

で定義される. ここで R は正整数である. $B_R(t)$ は次の極値的 (extremal) 性質を持つ. すなわち, $[t]$ で 実数 t を越えない整数, $\tau(t)$ で鋸歯関数,

$$\tau(t) = \begin{cases} t - [t] - \frac{1}{2} & t \notin \mathbf{Z}, \\ 0 & t \in \mathbf{Z}, \end{cases}$$

を表すことにすると, 常に $\tau(t) \leq B_R(t)$ が成り立ち, しかも $T(t)$ を次数 R の三角多項式で 常に $\tau(t) \leq T(t)$ を満たすものとすると, $\int_0^1 T(t)dt \geq \frac{1}{2(R+1)}$ が成立するが, ここで等号が成り立つ必要十分条件が $T(t) = B_R(t)$ となる. これらは Vaaler [11] によって示されたことである. 単位円上の開区間 (a, b), $a < b \leq a + 1$ の特性関数を $C_{(a,b)}(t)$ とするとき, 端点 a, b を除き $C_{(a,b)}(t) = b - a - \tau(b-t) - \tau(t-a)$ が成り立つから, (5) の定義から $S_R^-(t) \leq C_{(a,b)}(t)$ が常に言える. この $S_R^-(t)$ を Solé による多項式の代わりに用いることによって, 最終的に, (4) に対応する評価は,

$$\begin{aligned} &\sum{}' \log NP \cdot \widehat{k}(NP; x) \\ &\geq \frac{1}{[L:K]}\left\{\frac{\mu - \lambda}{2\pi} - \frac{1}{R+1}\right\}\log^2 x - b_3 \log^2 NH(|u|R+1) \cdot \log(R+1) \end{aligned} \tag{6}$$

が得られる. ここで和 $\sum'$ は L/K で不分岐で $[\frac{L/K}{P}] \in C$ 且つ $\lambda < \arg(\chi(P)) < \mu$ を満たすものにわたる. あとは $x = \exp\sqrt{\{(R+1)\log^2 NH(|u|R+1)\cdot\log(R+1)\}}$ として $R = [b_4/(\mu-\lambda)]$ とすると, (6) の右辺 > 0 が言えるから, $NP \leq \exp\left(\frac{b_1}{\sqrt{\mu-\lambda}}\log NH(|u|+1)\cdot\log^{\frac{3}{2}}\left(\frac{2\pi}{\mu-\lambda}+1\right)\right)$ を満たし $[\frac{L/K}{P}] \in C$ 且つ $\lambda < \arg(\chi(P)) < \mu$ となる K の素イデアル P の存在が従う. なお主定理 1 について詳細は [6] を参照して欲しい.

上の証明において, $L_1(s)$, $L_2(s)$ が整関数であることと, 零点のない領域 (2) が得られていることが本質的である. 前に述べたとおり, $L_3(s)$ も整関数であることが最近になって示されたようである. もしも $L_3(s)$ に対しても, (2) と同様の零点のない領域が得られるのであれば, 定理において $a_p > 1-\epsilon$ とした結果が得られるのであるが, 今のところそれはできていない.

最後に L-関数の零点のない領域について, 若干の解説を試みる. 先の $L_1(s)$ の零点のない領域において, $t=0$ の部分に零点がないことを示すのがもっとも難しいと述べた. このあるかも知れない零点は一般に Siegel 零点 (あるいは例外零点) と呼ばれ, Dedekind ζ-関数等についても同様の現象が起こる. 実は Moreno [8] においては, はじめはこの Siegel 零点の非存在は示されていなかった.

$L_1(s)$ の Siegel 零点の非存在をはじめて示したのは, Hoffstein-Ramakrishnan [2] によってである. [2] では我々の扱った正則尖点形式に対してだけでなく, 任意の代数体上の GL(2) cuspidal 保型表現の standard L-関数に対して示している. しかも [2] では, $L_2(s)$ に対しても (正確には, より一般に GL(3) について同様に) Siegel 零点の非存在を, ある仮定のもとに得ており, その仮定も Banks [1] によって示された. このことから, 定理の (ii) では $L_1(s)$, $L_2(s)$ 共に用いるため, (i) と同様に証明することができる.

ところで $L_3(s)$ が整関数であることを持ちいて, $L_1(s)$ の Siegel 零点がないことを示すことができる. これは Moreno [8] に既に記されており, Serre の注意とのことである. それには次の L-関数の積を用いる.

$$\Psi(s) \;=\; L_0(s)^6 L_1(s)^7 L_2(s)^4 L_3(s)$$

このように積をとったのは, L_0 の巾 6 よりも L_1 の巾 7 の方が大きく, しかも恒等式 $6+7(2\cos\theta)+4(2\cos 2\theta+1)+(2\cos 3\theta+2\cos\theta) \geq 0$ を持ちいて, $-\frac{\Psi'}{\Psi}$ のある種の正値性が導かれるためである. 実は Hoffstein-Ramakrishnan [2] においても, ある種の保型 L-関数の積で同様の正値性を持つものを用いて示している. 現在のところ L-関数の零点のない領域を得るには, この方法の他にはあまり知られていない.

参考文献

[1] W. D. Banks, Twisted symmetric-square L-functions and the nonexistence of Siegel zeros on $GL(3)$. Duke Math. J. Vol. 87, No. 2, (1997), 343-353.

[2] J. Hoffstein, D. Ramakrishnan, Siegel zeros and cusp forms. Internat. Math. Res. Notices (1995), no. 6, 279-308.

[3] H. H. Kim, F. Shahidi, Symmetric cube L-functions for GL_2 are entire. preprint.

[4] J. C. Lagarias, H. L. Montgomery, A. M. Odlyzko, A bound for the least prime ideal in the Chebotarev density theorem. Inventiones Math. 54 (1979), 271-296.

[5] J. C. Lagarias, A. M. Odlyzko, Effective versions of the Chebotarev density theorem. In: Algebraic Number Fields, L-Functions and Galois Properties (A. Fröhlich, ed.), New York, London: Academic Press (1977), 409-469.

[6] H. Matsui, A bound for the least Gaussian prime ω with $\alpha < \arg(\omega) < \beta$. to appear.

[7] H. L. Montgomery, Ten lectures on the interface between analytic number theory and harmonic analysis, No.84, CBMS, Amer. Math. Soc. (1994).

[8] C. J. Moreno, Expricit formulas in the theory of automorphic forms. In: Number Theory Day, Lecture Notes in Math. 626, Springer-Verlag, Berlin (1977), 73-216.

[9] J.-P. Serre, letter to F. Shahidi, dated June 24, 1992, appendix in: F. Shahidi, Symmetric power L-functions for $GL(2)$. In: Elliptic Curves and Related Topics (H. Kisilevsky, M. Ram Murty ed.), CRM Vol.4, 159-180, AMS (1994).

[10] P. Solé, Sato-Tate conjectures and Chebyshev polynomials. The Ramanujan J. 1 (1997), 211-220.

[11] J. D. Vaaler, Some extremal functions in Fourier analysis. Bull. Amer. Math. Soc. 12 (1985), 183-216.

名古屋大学多元数理科学研究科 D 3.
e-mail adress: d96004z@math.nagoya-u.ac.jp