数理解析研究所講究録
1103 巻 1999 年 187-199

Duke-Imamogle の方法による奇数 weight の Saito-Kurokawa lifting

荒川 恒男 (立教大学理学部)

整数 weight $2k-2$ (k: 偶数) の楕円保型形式の空間から、次数 2、weight k の Siegel 保型形式の空間に、Hecke 作用素の作用と compatible な lifting があるという齋藤-黒川予想 ([Ku]) は、1980 年頃 Maass [Ma2], Andrianov [An] の仕事を経て、Eichler-Zagier ([E-Z]) により最終的に解決された (決定的な寄与は、Maass の仕事 [Ma2] のようである)。この証明で難しい点のひとつは、lift された保型形式の保型性 (modularity) を示すことにある。Eichler-Zagier (元は Maass による) は、Jacobi 形式を用いて、巧妙に示しているが、汎用性の少ない証明という欠点もある。最近、Duke-Imamogle [D-I] は、太田の逆定理 [Im] と Katok-Sarnak [K-S] による Shimura 対応の real analytic version とを用いて、lift された保型形式の保型性を証明した。これは、保型性の証明法を増やすという点でも興味深いものである。

他方、wieght k が奇数の場合の Saito-Kurokawa lifting については、余り多くのことが知られていないようである (Maass に例外的で興味を惹かれる仕事 [Ma3] がある)。ここでは、Duke-Imamogle の方法を用いて、level 4 の weight $k-1/2$ の半整数 cusp 形式の空間から、同じ level の指標付きの weight k の Sigel 保型形式の空間への Saito-Kurokawa lifting を構成する。lifting を 2 通り構成し、その間の関係を調べることにより、保型性が示される点が興味深い。最後に Maass、Eichler-Zagier の方法によるアプローチにも言及したい。

元来の太田の逆定理 ([Im]) と Duke-Imamogle の仕事に関しては、伊吹山氏が大変丁寧な解説 [Ib] を書いているので、そちらを参照して下さい。この報告も [Ib] に負う所大とします。また逆定理については、菅野氏が、第 1 回整数論オータムワークショップ報告集 (伊吹山氏編) に Weissauer's Converse Theorem の題 [Su] で、将来役にたつであろう逆定理の解説を書いているので、併せてご覧下さい。

1 Saito-Kurokawa lifting

最初に、ごく簡単に Saito-Kurokawa lifting を復習しよう。

整数 $k>0$ に対して、重さ $k-1/2$ の合同部分群 $\Gamma_0(4)$ に関する半整数楕円保型形式の空間 $M_{k-1/2}(\Gamma_0(4))$ を、上半平面 $\mathfrak{H}$ 上の正則関数 f で、次の (i)、(ii) を満たすものの成す $\mathbb{C}$-線型空間とする。

(i) 任意の $M\in\Gamma_0(4)$ に対して $f(M\tau)=j(M,\tau)^{2k-1}f(\tau)$

(ii) 各 cusp で正則.

ここで、$j(M,\tau)$ は Shimura の保型因子で、$M\in\Gamma_0(4)$ のとき

$$j(M,\tau)=\frac{\theta(M\tau)}{\theta(\tau)} \qquad \text{with} \quad \theta(\tau)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}e^{2\pi i n^2\tau}$$

で与えられる。$f\in M_{k-1/2}(\Gamma_0(4))$ の Fourier 展開を

$$f(\tau)=\sum_{n=0}^{\infty}c(n)e(n\tau)$$

とするとき、Fourier 係数の条件

$(-1)^k n\equiv 1,\ 2 \bmod 4$ ならば $c(n)=0$

を満たす f の成す $M_{k-1/2}(\Gamma_0(4))$ の部分空間を $M^+_{k-1/2}(\Gamma_0(4))$ と記す。$M_{k-1/2}(\Gamma_0(4))$, $M^+_{k-1/2}(\Gamma_0(4))$ の cusp 形式の成す部分空間を、$S_{k-1/2}(\Gamma_0(4))$, $S^+_{k-1/2}(\Gamma_0(4))$ と記す。

以下、この節では、k は偶数とする。$M_k(\Gamma_2)$ を重さ k、次数 2 の Siegel modular 群 $\Gamma_2=Sp_2(\mathbb{Z})$ に関する Siegel 保型形式の成す空間とする。さらに、Maass 部分空間 Ma_k を、$F\in M_k(\Gamma_2)$ でその Fourier 係数 $a(T)$ が Maass relation

$$a\begin{pmatrix} m & r/2 \\ r/2 & n\end{pmatrix}=\sum_{0<d|(m,r,n)}d^{k-1}a\begin{pmatrix} 1 & r/2d \\ r/2d & mn/d^2\end{pmatrix} \quad ((m,r,n)\neq(0,0,0))$$

を満たすものの全体とする。

そこで、$f(\tau)=\sum_{n=0}^{\infty}c(n)e(n\tau)\in M^+_{k-1/2}(\Gamma_0(4))$ とする。2 次の半正定値半整数対称行列 T ($T\neq 0$) に対して $a(T)$ を

$$a\begin{pmatrix} m & r/2 \\ r/2 & n\end{pmatrix}=\sum_{0<d|(m,r,n)}\chi(d)d^{k-1}c\left(\frac{\det 2T}{d^2}\right)$$

で定義する。d は m, r, n の最大公約数 (m,r,n) を割る正の整数を動く。$a(0)$ は

$$a(0)=c_k=-\frac{2k}{B_{2k}} \qquad (B_{2k}\text{ は } Bernoulli \text{ 数である})$$

とおく ([E-Z, p.43])。さらに、2 次 Siegel 上半平面 $\mathfrak{H}_2$ 上の関数 $\iota(f)(Z)$ を

$$\iota(f)(Z) = \sum_{T \geq 0} a(T) e(\mathrm{tr}(TZ)),$$

で定義する。ただし、T は 2 次の半正定値半整数対称行列全体を動く。次の定理が主定理 ([Ma2], [E-Z], [An]) である。

定理 1.1 $f \in M^+_{k-1/2}(\Gamma_0(4))$ とする。

(i) $\iota(f) \in Ma_k$.

(ii) $M^+_{k-1/2}(\Gamma_0(4)) \cong Ma_k$. 同型は $f \longrightarrow \iota(f)$ で与えられる。

(iii) この同型 ι は、*Hecke* 環の作用と *compatible* である。

注意) Shimura 対応により、$M_{2k-2}(SL_2(\mathbb{Z})) \cong M^+_{k-1/2}(\Gamma_0(4))$ であるので、2 つの同型を繋げると、$M_{2k-2}(SL_2(\mathbb{Z}))$ から Ma_k への同型になり、(iii) の結果は、対応する L-関数の言葉に翻訳されている ([E-Z])。

2 奇数 weight の場合

以下、k は正の奇数とする。χ を mod 4 の自明でない指標とする。$\Gamma_0^{(2)}(4)$ を $M \in \Gamma_2 := Sp_2(\mathbb{Z})$ で $c(M) \equiv 0 \bmod 4$ を満たす M の成す Γ_2 の合同部分群とする ($c(M)$ は M の左下 block を表す)。$M_k(\Gamma_0^{(2)}(4), \chi)$ を、

$$F(MZ) = \chi(\det c) \det(cZ+d)^k F(Z) \quad \text{for} \quad \forall M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0^{(2)}(4)$$

を満たす 2 次 Siegel 上半平面 $\mathfrak{H}_2$ 上の正則関数 $F(Z)$ の成す空間とする。$S_2(\mathbb{Z})$ (resp. $S_2^*(\mathbb{Z})$) を 2 次整数 (resp. 半整数) 係数対称行列の成す集合とする。$S_2(\mathbb{Z})^+$ (resp. $S_2^*(\mathbb{Z})^+$) を $S_2(\mathbb{Z})$ (resp. $S_2^*(\mathbb{Z})$) の正定値な元からなる部分集合とする。$e(z) = exp(2\pi i z)$ と略記する。$F \in M_k(\Gamma_0^{(2)}(4), \chi)$ は、次の形に Fourier 展開される。

$$F(Z) = \sum_{T \in S_n^*(\mathbb{Z}),\, T \geq 0} a(T) e(\mathrm{tr}(TZ)).$$

Maass 部分空間 $\widetilde{M}a(k, \chi)$ を、$F \in M_k(\Gamma_0^{(2)}(4), \chi)$ でその Fourier 係数 $a(T)$ が、任意の $T = \begin{pmatrix} m & r/2 \\ r/2 & n \end{pmatrix} \in S_2^*(\mathbb{Z})$, $T \geq 0$, $T \neq 0$ に対し、Maass relation

$$a\begin{pmatrix} m & r/2 \\ r/2 & n \end{pmatrix} = \sum_{0<d|(m,r,n)} \chi(d) d^{k-1} a\begin{pmatrix} 1 & r/2d \\ r/2d & mn/d^2 \end{pmatrix} \quad ((m,r,n) \neq (0,0,0))$$

を満たすものの全体とする。
このような χ 付きの Maass 部分空間は、k が偶数の場合に、小嶋氏により導入された ([Ko])。さらに、部分空間 $Ma(k,\chi)$ を

$$Ma(k,\chi) = \widetilde{M}a(k,\chi) \bigcap \left\{ F \in M_k(\Gamma_0^{(2)}(4),\chi) \;\middle|\; F\left(Z + \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}\right) = F(Z) \right\}$$

とする。$F \in Ma(k,\chi)$ に対し、

$$F\left(Z + \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}\right) = F(Z)$$

の条件は、F が

$$F(Z) = \sum_{T \in S_2(\mathbb{Z}),\, T \geq 0} a(T) e(\mathrm{tr}(TZ))$$

と Fourier 展開されることを意味するので、Fourier 係数は

$$a\begin{pmatrix} m & r \\ r & n \end{pmatrix} = \sum_{0<d|(m,r,n)} \chi(d) d^{k-1} a \begin{pmatrix} 1 & r/d \\ r/d & mn/d^2 \end{pmatrix}$$

を満たす。

$\varphi \in S_{k-1/2}(\Gamma_0(4))$ の、Fourier 展開 $\varphi(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} c(n) e(n\tau)$ に対し、$a(T)$ $(T \in S_2(\mathbb{Z})^+)$, $b(T)$ $(T \in S_2^*(\mathbb{Z})^+)$ を

$$a\begin{pmatrix} m & r \\ r & n \end{pmatrix} = \sum_{0<d|(m,r,n)} \chi(d) d^{k-1} c\left(\frac{\det T}{d^2}\right)$$

resp.

$$b\begin{pmatrix} m & r/2 \\ r/2 & n \end{pmatrix} = \sum_{0<d|(m,r,n)} \chi(d) d^{k-1} c\left(\frac{\det 2T}{d^2}\right)$$

で定義する。さらに、$Z \in \mathfrak{H}_2$ に対し、

$$\iota(\varphi)(Z) = \sum_{T \in S_2(\mathbb{Z})^+} a(T) e(\mathrm{tr}(TZ)), \qquad \widetilde{\iota}(\varphi)(Z) = \sum_{T \in S_2^*(\mathbb{Z})^+} b(T) e(\mathrm{tr}(TZ))$$

とする。次が成り立つ。

定理 2.1 $\varphi \in S_{k-1/2}(\Gamma_0(4))$ ならば $\iota(\varphi) \in Ma(k,\chi)$, $\widetilde{\iota}(\varphi) \in \widetilde{M}a(k,\chi)$ である。

注意) $\varphi \in S_{k-1/2}(\Gamma_0(4))$ の像 $\iota(\varphi)$ 、$\widetilde{\iota}(\varphi)$ は Siegel cusp 形式になると予想されるが、目下のところ証明できない。

$\varphi \in S_{k-1/2}(\Gamma_0(4))$ に対し、$\psi(\tau) = \sqrt{2}(-1)^{\frac{k-1}{2}} 4^{1/2-k} \left(\frac{\tau}{i}\right)^{\frac{1}{2}-k} \varphi\left(-\frac{1}{4\tau}\right)$ とおくと、$\psi \in S_{k-1/2}(\Gamma_0(4))$ である。そこで、

$$F(Z) = \iota(\varphi)(Z), \qquad G(Z) = \widetilde{\iota}(\psi)(Z) \quad \text{とおく}.$$

定理 2.2 このとき、$F(-(4Z)^{-1}) = \det\left(\frac{2Z}{i}\right)^k G(Z)$ となる。さらに、

$$\psi \in S^+_{k-1/2}(\Gamma_0(4)) \Longrightarrow F(-(4Z)^{-1}) = \det\left(\frac{2Z}{i}\right)^k F(Z) \qquad i.e.,\ F = G.$$

証明の方針： Duke-Imamogle の方法で定理 2.2 を示すと、定理 2.2 $\Longrightarrow$ 定理 2.1 は容易に従う。

以下に、Duke-Imamogle の方法の紹介を兼ねて 定理 2.2 の証明の概略を述べる。Introduction でも述べたが、伊吹山 [Ib] がこの方法の大変良い解説になっている。

最初に、Maass wave form の定義を与えよう。

定義 (Maass wave form) $v : \mathfrak{H} \longrightarrow \mathbb{C}$ が、重さ 0 の Maass wave form であるとは、次の 3 条件が満たされるときをいう。

(i) $v(Mz) = v(z) \qquad \forall M \in SL_2(\mathbb{Z})$

(ii) v は、x, y について C^∞-関数で、ある $\lambda \in \mathbb{C}$ について $\Delta v = -\lambda v$ を満たす。ただし、$\Delta = y^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)$ は $\mathfrak{H}$ 上の $SL_2(\mathbb{R})$-不変微分作用素である。

(iii) (growth condition) $\exists \alpha > 0$ に対し、$v(x+iy) = O(y^\alpha) \quad (y \to \infty)$.

$\mathcal{P}_2$ を 2 次正定値対称行列の成す集合とし、その行列式 1 の元から成る部分集合を

$$\mathcal{P}S_2 = \{Y \in \mathcal{P}_2 \mid \det Y = 1\}$$

とする。群 $SL_2(\mathbb{R})$ は $Y \longrightarrow {}^tg^{-1}Yg^{-1}$ で $\mathcal{P}_2$ 及び $\mathcal{P}S_2$ に作用する。上半平面 $\mathfrak{H}$ は $\mathcal{P}S_2$ と $SL_2(\mathbb{R})$ の作用と comptible な微分同型になる。すなわち、$z = x + iy$ に対し、

$$Y(z) = \begin{pmatrix} y^{-1} & -xy^{-1} \\ -xy^{-1} & y^{-1}(x^2+y^2) \end{pmatrix}$$

とおくと、$Y(z) \in \mathcal{P}S_2$ であり、$Y(gz) = {}^tg^{-1}Y(z)g^{-1}$ となる。この同型を通して Maass wave form は $\mathcal{P}S_2$ 上の関数とみなされる。さらに、それを $\mathcal{P}_2$ 上にまでのばした関数を Maass の量指標と、このノートではよぶことにする。すなわち、$u : \mathcal{P}_2 \longrightarrow \mathbb{C}$ が Maass の量指標とは、

(i) $\forall c > 0$ と $Y \in \mathcal{P}_2$ に対し、$u(cY) = u(Y)$.

(ii) ある Maass wave form v に対し、$u(Y) = v(z)$ $(Y \in \mathcal{P}S_2)$. ただし、z は Y に対応する $\mathfrak{H}$ の点 $(Y = Y(z))$ である

が満たされるときをいう。Maass の量指標については [Ma1] に詳しい。

以下、$Y \in \mathcal{P}_2$ に対し $Y(z) = \frac{1}{\sqrt{\det Y}} \cdot Y$ の関係で定まる $z \in \mathfrak{H}$ を z_Y と記す。

さらに、半整数 weight 保型形式と整数 weight 保型形式の間の Shimura 対応の、Katok-Sarnak [K-S] による Maass wave form version を記述するために、weight 1/2 の Maass wave form を定義する。

定義 (weight 1/2 の Maass wave form)　$r \in \mathbb{C}$ に対して、次の 3 条件 (i) ~ (iii) を満たす関数 $g : \mathfrak{H} \longrightarrow \mathbb{C}$ の成す $\mathbb{C}$-線型空間を T_r^+ と記す：

(i) g は、x, y について C^∞-関数で

$$g(Mz) = g(z)j(M,z)|cz+d|^{-1/2}, \quad \forall M \in \Gamma_0(4)$$

をみたし、各 cusp である増大条件をみたす：$\exists \alpha > 0$ が存在し、$\forall M \in SL_2(\mathbb{Z})$ に対し、

$$|g(Mz)| = O(y^\alpha) \quad (y \to \infty).$$

(ii) g は、$g(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} B(n,y)e(nx)$ と Fourier 展開され、さらに $n \neq 0$ のとき、$B(n,y)$ は

$$B(n,y) = b(n)W_{\mathrm{sign}n/2,\, ir/2}(4\pi y|n|), \qquad W_{\alpha,\beta} \text{ (は Whittaker 関数)}$$

(iii) $n \equiv 2,\ 3 \bmod 4$ ならば、$B(n,y) = 0$.

次の定理は、weight 0 の Maass wave form の空間から weight 1/2 の Maass form への Shimura 対応を記述する。v が cusp 形式のときが Katok-Sarnak [K-S] により、定数関数と Eisenstein 級数のときは Duke-Imamogle [D-I] による.

定理 2.3 (Katok-Sarnak, Duke-Imamogle)　v *を weight* 0 *の Maass wave form とし、*$\Delta v = -(\frac{1}{4}+r^2)v$ *とする。さらに、*v *は even、すなわち、*$v(-\bar{z}) = v(z)$ *を満たすとする。このとき、*$g \in T_r^+$ *で、負の Fourier 係数* $b(-n)$ *について、*

$$b(-n) = n^{-3/4} \sum_{T\in S_2^*(\mathbb{Z})^+/SL_2(\mathbb{Z}),\ \det 2T=n} v(z_T)|AutT|^{-1} \qquad (n \in \mathbb{Z}_{>0})$$

をみたすものが存在する。ただし、$AutT$ *は* T *の単数群* $\{U \in SL_2(\mathbb{Z}) \mid {}^tUTU = T\}$ *である。*T *は* $S_2^*(\mathbb{Z})^+$ *の元の* $SL_2(\mathbb{Z})$*-同値類をわたる。*

注意)　(i) g は unique に決まるわけではない。

(ii) v が even という仮定が、後の保型性の証明には、重要な意味をもつ（後述)。v が even ということを、対応する Maass 量指標 u の言葉で述べると

$$v \quad \text{even} \iff \quad u(I_0YI_0) = u(Y) \quad \left(I_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right)$$

となることに注意する。$u(I_0YI_0) = -u(Y)$ のとき、u を（従って v も）odd という。

定理 2.2 の証明に戻る。$\varphi(z)=\sum_{n=1}^{\infty}c(n)e(nz)\in S_{k-1/2}(\Gamma_0(4))$ に対し、前述のように、ψ を

$$\psi(z)=\sqrt{2}(-1)^{\frac{k-1}{2}}4^{1/2-k}\left(\frac{z}{i}\right)^{\frac{1}{2}-k}\varphi\left(-\frac{1}{4z}\right)$$

で定義し、Fourier 展開を $\psi(z)=\sum_{n=1}^{\infty}a(n)e(nz)$ とおく。このとき、

$$F(Z)=\iota(\varphi)(Z) = \sum_{T\in S_2(\mathbb{Z})^+} c(T)e(\mathrm{tr}(TZ))$$

$$G(Z)=\widetilde{\iota}(\psi)(Z) = \sum_{T\in S_2^*(\mathbb{Z})^+} a(T)e(\mathrm{tr}(TZ))$$

と書くと、$c(T)$, $a(T)$ の定義より

$$c\begin{pmatrix} m & r \\ r & n \end{pmatrix} = \sum_{d|(m,r,n)}\chi(d)d^{k-1}c\left(\frac{\det T}{d^2}\right)$$

および、

$$a\begin{pmatrix} m & r/2 \\ r/2 & n \end{pmatrix} = \sum_{d|(m,r,n)}\chi(d)d^{k-1}a\left(\frac{\det 2T}{d^2}\right) \tag{2.1}$$

である。この表示から、次の評価がただちに従う。
ある正定数 M（φ, ψ に依存する）が存在し、

$$\left|c\begin{pmatrix} m & r \\ r & n \end{pmatrix}\right| < M(mn)^{k+1/2}, \qquad \left|a\begin{pmatrix} m & r/2 \\ r/2 & n \end{pmatrix}\right| < M(mn)^{k+1/2} \tag{2.2}$$

となる。
さて、$\mathcal{P}_2$ 上の Maass 量指標 u を任意にとる。u に対応する Maass wave form を v $(\Delta v=-(\frac{1}{4}+r^2))$ とし、定理 2.3 により定まる T_r^+ に属する weight 1/2 の Maass wave form を g とする。そこで、F と G の Mellin 変換を計算する。

$$\xi_2(G,u;s):=\int_{\mathcal{R}}G\left(\frac{iY}{2}\right)(\det Y)^s u(Y)dv(Y)$$

とおく。ただし、$\mathcal{R}$ は $\mathcal{P}_2$ の $SL_2(\mathbb{Z})$ の作用による基本領域を表し、

$$dv(Y)=(\det Y)^{-3/2}dy_{11}dy_{12}dy_{22} \qquad (Y=(y_{ij}))$$

とする。Maass [Ma] の結果を使った形式的な計算により、

$$\xi_2(G,u;s)=2\pi^{1/2}\pi^{-2s}\Gamma\left(s-\frac{1}{4}+\frac{ir}{2}\right)\Gamma\left(s-\frac{1}{4}-\frac{ir}{2}\right)D_2(G,u,s).$$

ここで、$D_2(G,u,s)$ は G の 量指標 u 付きの Koecher-Maass 級数を表す：

$$D_2(G,u,s)=\sum_{T\in S_2^*(\mathbb{Z})^+/SL_2(\mathbb{Z})}\frac{a(T)u(T)}{|Aut(T)|(\det T)^s}.$$

$D_2(G,u,s)$ は、$a(T)$ の評価 (2.2) より $\mathrm{Re}(s)$ が十分大のとき絶対収束するので、その範囲で $\xi_2(G,u;s)$ も絶対収束し、s の正則関数を表す。$a(I_0TI_0)=a(T)$ であるので、u が odd のときは $D_2(G,u,s)=0$ となり、u が even のとき（従って v も even）だけ考えれば十分である。$Prim_2^*(\mathbb{Z})^+$ を原始的 (primitive) 正定値半整数対称行列の集合とする。$a(T)$ の表示 (2.1) を利用して

$$\begin{aligned}
D_2(G,u,s) &= \sum_{T_0\in Prim_2^*(\mathbb{Z})^+/SL_2(\mathbb{Z})}\sum_{e=1}^{\infty}\frac{a(eT_0)u(eT_0)}{|Aut(eT_0)|(\det eT_0)^s}\\
&= \sum_{T_0\in Prim_2^*(\mathbb{Z})^+/SL_2(\mathbb{Z})}\sum_{e=1}^{\infty}\sum_{0<d|e}\chi(d)d^{k-1}\frac{a(\det(2eT_0)/d^2)u(T_0)}{|Aut(T_0)|e^{2s}(\det T_0)^s}\\
&= \sum_{d=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{T_0\in Prim_2^*(\mathbb{Z})^+/SL_2(\mathbb{Z})}\chi(d)d^{-2s+k-1}\frac{a(\det(2mT_0))u(mT_0)}{|Aut(mT_0)|(\det mT_0)^s}\\
&= L(2s-k+1,\chi)\sum_{T\in S_2^*(\mathbb{Z})^+/SL_2(\mathbb{Z})}\frac{a(\det 2T)u(T)}{|Aut(T)|(\det T)^s}
\end{aligned}$$

Katok-Sarnak の定理を使った Duke-Imamogle の trick を用いて

$$\begin{aligned}
D_2(G,u,s) &= 4^sL(2s-k+1,\chi)\sum_{T\in S_2^*(\mathbb{Z})^+/SL_2(\mathbb{Z})}\frac{a(\det 2T)v(z_T)}{|Aut(T)|(\det 2T)^s}\\
&= 4^sL(2s-k+1,\chi)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a(n)b(-n)}{n^{s-3/4}}.
\end{aligned}$$

結局、

$$\xi_2(G,u;s)=2\pi^{1/2}\pi^{-2s}4^s\Gamma\left(s-\frac{1}{4}+\frac{ir}{2}\right)\Gamma\left(s-\frac{1}{4}-\frac{ir}{2}\right)L(2s-k+1,\chi)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a(n)b(-n)}{n^{s-3/4}}$$

となる。この形を眺めると、保型形式 ψ、g の積とある Eisenstein 級数との Rankin-Selberg 型積分になっていることがわかる。そこで、合同群 $\Gamma_0(4)$ の χ 付きの Eisenstein 級数を復習する。

$$E_\infty(z,s)=\sum_{M\in\Gamma_\infty\backslash\Gamma_0(4)}\chi(d)\left(\frac{cz+d}{|cz+d|}\right)^k(\mathrm{Im}Mz)^s$$

とおくと、Re$(s) > 1$ で収束し、$\Gamma_0(4)$ の cusp ∞ での Eisenstein 級数になる。さらに、cusp 0 での Eisebstein 級数を

$$E_0(z,s) = \left(\frac{z}{|z|}\right)^k E_\infty\left(-\frac{1}{4z}, s\right)$$

で定義する。gamma 因子を付けて

$$\widetilde{E}_\infty(z,s) = 2^{3s}\pi^{-s}\Gamma(s+k/2)L(2s,\chi)E_\infty(z,s)$$

$$\widetilde{E}_0(z,s) = 2^{3s}\pi^{-s}\Gamma(s+k/2)L(2s,\chi)E_0(z,s)$$

とおく。これらの Eisenstein 級数は全 s-平面の有理型関数に解析接続され、関数等式

$$\widetilde{E}_\infty(z,s) = (-i)\widetilde{E}_0(z,1-s)$$

を満たす。$g \in T_r^+$ に対して、関数 g_0 を

$$g_0(z) = \sqrt{2}\left(\frac{z}{i}\right)^{-1/2}|z|^{1/2}g(-1/4z)$$

で定義すると、

$$g_0(z) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} B(4m, y/4)e^{2\pi i m x}$$

と Fourier 展開されることが知られている（[D-I], [Ib]）。

$$\begin{aligned}\Lambda_\infty(\psi,g,s) &= \int_{\Gamma_0(4)\backslash\mathfrak{H}} y^{\frac{k}{2}-\frac{1}{4}}\psi(z)g(z)\widetilde{E}_\infty(z,s)\frac{dxdy}{y^2}\\ \Lambda_\infty(\varphi,g_0,s) &= \int_{\Gamma_0(4)\backslash\mathfrak{H}} y^{\frac{k}{2}-\frac{1}{4}}\varphi(z)g_0(z)\widetilde{E}_\infty(z,s)\frac{dxdy}{y^2}\end{aligned}$$

とおくと、これらは s の全平面で正則な関数になり、Eisenstein 級数の関数等式により、関数等式

$$\Lambda_\infty(\varphi,g_0,s) = 2^{k-3/2}\Lambda_\infty(\psi,g,1-s)$$

を満たす。積分 $\Lambda_\infty(\psi,g,s)$, $\Lambda_\infty(\varphi,g_0,s)$ の右辺を unfold して忠実に計算すると、本質的にそれぞれ、$\xi_2(G,u;s)$, $\xi_2(F,u;s)$ に一致することがわかる。すなわち、

$$\begin{aligned}\xi_2(G,u;s) &= c(k)2^s\Lambda_\infty\left(\psi,g,s-\frac{k-1}{2}\right)\\ \xi_2(F,u;s) &= c(k)2^{3/2-s}\Lambda_\infty\left(\varphi,g_0,s-\frac{k-1}{2}\right)\end{aligned}$$

である。ただし、$c(k) = 2^{3k/2-2}\pi^{1/4-k/2}$.
この表示より、$\xi_2(F,u;s)$ と $\xi_2(G,u;s)$ は全 s-平面の正則関数（整関数）で、任意の垂直帯状領域で有界であり、関数等式

$$\xi_2(F,u;s) = \xi_2(G,u;k-s)$$

をみたすことが従う。任意の量指標 u についてこれらのことが成り立つので、太田（Imai）の逆定理（[Im], [Ib], [Su] 参照）が使えて、

$$F(iY^{-1}/2) = (\det Y)^k G(iY/2),$$

すなわち、

$$F(-(4Z)^{-1}) = \det\left(\frac{iZ}{2}\right)^k G(Z)$$

となる。$\psi \in S^+_{k-1/2}(\Gamma_0(4))$ のとき、$F = G$ は容易に従う。

注意） Siegel 保型形式に付随する Koecher-Maass 級数については、[Ma1] 参照。また、Koecher-Maass 級数に関連する話題については、第 1 回整数論オータムワークショップ報告集「Koecher-Maass 級数について」(1998, edited by T. Ibukiyama) に面白いことが、一杯詰まっている。

3 Maass および Eichler-Zagier の方法

ここでは、2 節で扱った lifting を Maass [Ma2]、Eichler-Zagier [E-Z] の方法で考えてみる。最初に関係する Jacobi 形式の空間を定義する。k は正の奇数とする。
$\mathfrak{H} \times \mathbb{C}$ 上の正則関数 $\phi(\tau,z)$ で、次の 3 条件

(i) $\phi(\tau, z+\lambda\tau+\mu) = e(-\lambda^2\tau - 2\lambda z)\phi(\tau,z) \quad \forall\lambda,\ \mu \in \mathbb{Z}$

(ii) $\phi(M(\tau,z)) = \chi(d)(c\tau+d)^k e\left(-\frac{cz^2}{c\tau+d}\right)\phi(\tau,z) \qquad \forall M \in \Gamma_0(4)$

(iii) ϕ は各 cusp で正則。

を満たすものの成す $\mathbb{C}$-線型空間を $J_{k,1}(\Gamma_0(4),\chi)$ と記す。$\phi \in J_{k,1}(\Gamma_0(4),\chi)$ は

$$\phi(\tau,z) = \sum_{n,\,r\in\mathbb{Z},\,4n\geq r^2} c(n,r)e(n\tau + rz)$$

と Fourier 展開される。2 変数 τ, z の theta 級数、$\theta_0(\tau,z)$、$\theta_1(\tau,z)$ を

$$\theta_0(\tau,z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e(n^2\tau + 2nz), \qquad \theta_1(\tau,z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e((n+1/2)^2\tau + 2(n+1/2)z)$$

で定義する。いつものように、任意の $\phi \in J_{k,1}(\Gamma_0(4),\chi)$ はこの theta 級数の線型結合で書ける：

$$\phi(\tau,z) = h_0(\tau)\theta_0(\tau,z) + h_1(\tau)\theta_1(\tau,z).$$

theta 級数については、次の変換公式はよく知られている：

$$\begin{pmatrix} \theta_0(M(\tau,z)) \\ \theta_1(M(\tau,z)) \end{pmatrix} = e\left(-\frac{cz^2}{c\tau+d}\right) \begin{pmatrix} j(M,\tau) & 0 \\ 0 & \mu(M,\tau) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_0(\tau,z) \\ \theta_1(\tau,z) \end{pmatrix}$$

$$\forall M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(4).$$

$j(M,\tau)$ は Shimura の保型因子であり、$\mu(M,\tau)$ も $\Gamma_0(4)$ の保型因子となる。$|\mu(M,\tau)| = |c\tau+d|^{1/2}$ である。保型因子 $\mu(M,\tau)$ 付きの weight $k-1/2$ の保型形式の空間 $M^*_{k-1/2}(\Gamma_0(4))$ は、$\mathfrak{H}$ 上の正則関数 f で条件

(i) $f(M\tau)\mu(M,\tau) = \chi(M)(c\tau+d)^k f(\tau) \quad \forall M \in \Gamma_0(4)$

(ii) 各 cusp で正則

を満たすものの成す $\mathbb{C}$-線型空間とする。

次の命題が成り立つ（証明は、上記の theta 級数の変換公式より容易に従う）。

Proposition 3.1 同型 $J_{k,1}(\Gamma_0(4),\chi) \longrightarrow M_{k-1/2}(\Gamma_0(4)) \bigoplus M^*_{k-1/2}(\Gamma_0(4))$ が成り立つ。この同型は写像 $\phi \longmapsto (h_0(\tau), h_1(\tau))$ で与えられる。

各 $\phi \in J_{k,1}(\Gamma_0(4),\chi)$ と自然数 m に対して Eichler-Zagier の作用素 V_m を

$$(\phi|_{k,1}V_m)(\tau,z) = m^{k-1} \sum_{M\in\Gamma_0(4)\backslash M_2^*,\ \det M=m} \chi(a)(c\tau+d)^{-k} e\left(-\frac{cz^2}{c\tau+d}\right)\phi\left(M\tau, \frac{mz}{c\tau+d}\right)$$

で定義する。ここで、$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ と書いた。また、

$$M_2^* = \left\{ M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z}) \,\middle|\, \det M \neq 0,\ c \equiv 0 \bmod 4,\ (a,2)=1 \right\}$$

とした。

Maass 部分空間 $\widetilde{Ma}(k,\chi)$ については、次の定理が基本的である。

定理 3.2 *Jacobi* 形式の空間 $J_{k,1}(\Gamma_0(4),\chi)$ は *Maass* 部分空間 $\widetilde{Ma}(k,\chi)$ に同型である。同型 $l: J_{k,1}(\Gamma_0(4),\chi) \longrightarrow \widetilde{Ma}(k,\chi)$ は

$$l(\phi)\begin{pmatrix} \zeta & z \\ z & \tau \end{pmatrix} = \phi_0(\tau,z) + \sum_{m=1}^{\infty} (\phi|_{k,1}V_m)(\tau,z)e(m\zeta)$$

で与えられる。ただし、

$$\phi_0(\tau,z) = \left(\frac{(2/i)^{k-1}\Gamma(k)L(k,\chi)}{\pi^k} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{0<d|n}\chi(d)d^{k-1}\right)e(n\tau)\right)c(0,0)$$

で、$c(0,0)$ は、ϕ の最初の *Fourier* 係数とする。さらに、l は同型 $l: M_{k-1/2}(\Gamma_0(4)) \longrightarrow Ma(k,\chi)$ を引き起こす。この同型は、$S_{k-1/2}(\Gamma_0(4))$ 上では ι に一致する。

参考文献

[An] Andrianov, A. N.: Modular descent and the Saito-Kurokawa conjecture. **53**(1979), 267-280.

[D-I] Duke, W. and Imamoḡlu, Ö.: A converse Theorem and the Saito-Kurokawa Lift, International Mathematics Research Noticees **7**(1996), 347-355.

[E-Z] Eichler, M. and Zagier, D.: The Theory of Jacobi forms, Birkhäuser, 1985.

[Ib] Ibukiyama, T.: A survey on the new proof of Saito-Kurokawa lifting after Duke and Imamoglu, 第５回整数論サマースクール報告集「Siegel 保形形式入門」pp.134-176.

[Im] Imai, K.: Generalization of Hecke's correspondence to Siegel modular forms, Amer. J. Math. **102**(1980), 903-936.

[K-S] Katok, S. and Sarnak, P.: Heegner points, cycles and Maass forms, Israel J. Math. **84**(1984), 193-227.

[Ko] Kojima, H.: On construction of Siegel modular forms of degree two. J. Math. Soc. Japan **34**(1982), 393-412.

[Ku] Kurokawa, N.: Examples of eigenvalues of Hecke operators on Siegel cusp forms of degree two. Inv. Math. **49**(1978), 149-165.

[Ma1] Maass, H.: Maass, H.: Siegel's modular forms and Dirichlet series, Lecture Notes in Math. **216**, Springer 1971.

[Ma2] Maass, H.: Über eine Spezialschar von Modulformen zweiten Grades I, II, III. Inv. Math. **52**(1979), 95-104. **53**(1979), 249-253, **53**(1979), 255-265.

[Ma3] Maass, H.: Über ein Analogen zur Vermutung von Saito-Kurokawa. Inv. Math. **60**(1980), 85-104

[Su] Sugano. T.: Weissauer's Converse Theorem. 第1回整数論オータムワークショップ報告集「Koecher-Maass 級数について」, 1998. pp. 81-98.

Tsuneo Arakawa
Department of Mathematics
Rikkyo University
Nishi-Ikebukuro
Tokyo 171
Japan